

К. Калик

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ АЛГОРИФМОВ ТИПА ШВАРЦА

Во второй половине прошлого века Х. А. Шварцем был предложен алгоритм для решения задачи типа Дирихле в некоторой области Ω , являющейся суммой двух частично перекрывающихся областей Ω_1 и Ω_2 , при предположении, что задача Дирихле может быть решена сравнительно легко для каждой из областей Ω_1 и Ω_2 отдельно.

Сходным по замыслу с алгоритмом Шварца является алгоритм, предложенный С. Г. Михлиным и названный им „обобщенным алгоритмом Шварца“. Этот алгоритм служит для приближенного решения краевых задач в многосвязной области.

Алгоритм Шварца был использован при доказательстве существования краевых задач Дирихле для областей более сложного вида, когда было известно, что существует решение для областей частного вида (например для круга). Работы по этим вопросам появились сравнительно давно. В последнее время стали пользоваться алгоритмом Шварца как вычислительным аппаратом. Обобщенный алгоритм Шварца с самого начала носил прикладной характер.

В случае обоих алгоритмов до сих пор рассматривались в основном задачи Дирихле для разных уравнений. Исключением являются работы Г. М. Голузина [2а] и С. Я. Когана [5]. В работе Г. М. Голузина доказывается равномерная сходимость обобщенного алгоритма Шварца для всех трех основных краевых задач в случае уравнения Лапласа, если многосвязная область является плоской и ограничена кругами, достаточно удаленными друг от друга. С. Я. Коган доказывает, что алгоритм Шварца сходится равномерно для задачи Неймана в случае уравнения Лапласа. Заметим, что в этой работе от заданных значений нормальной производной на границе требуется, чтобы они были трижды непрерывно дифференцируемы, что является довольно жестким ограничением.

Коротко в хронологическом порядке перечислим основные результаты, относящиеся к задачам Дирихле. С. Г. Михлин [7в], используя интегральные уравнения, доказал, что обобщенный алгоритм Шварца сходится равномерно применительно к уравнениям упругости при заданных смещениях на границе в случае двухсвязной области, границы которой достаточно удалены друг от друга. Затем С. Л. Соболевым [8б] было доказано, что оба алгоритма сходятся равномерно в случае уравнений упругости при заданных смещениях на границе. При рассмотрении обобщенного алгоритма С. Л. Соболев не требует никаких ограничений относительно удаленности границ. В. И. Крылов [4] распространил метод Шварца на широкий класс эллиптических уравнений второго порядка. А. Я. Горгидзе [3] доказал сходимость обобщенного алгоритма для уравнения упругости при заданных смещениях и для того случая, когда многосвязная область имеет связность больше двух, если границы достаточно удалены друг от

друга. Б. Н. Шibaев [9] показал, что алгоритм Шварца сходится в среднем в случае задачи Дирихле для уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$, если λ меньше первого собственного числа. В работе С. Г. Михлина [76], последней в этом направлении, доказывается, что алгоритм Шварца равномерно сходится в случае задачи Дирихле для самосопряженных эллиптических уравнений второго порядка.

В настоящей статье рассматривается алгоритм и обобщенный алгоритм Шварца, причем последний для случая двухсвязных областей. Оказывается, что оба алгоритма можно применить к довольно широкому классу краевых задач, а именно, к таким, которые можно рассматривать с помощью метода ортогональных проекций. Это означает, что допускаются однородные самосопряженные эллиптические уравнения любого порядка и даже сильно эллиптические системы. Известно также, что метод ортогональных проекций можно применить для разных краевых условий, во всяком случае для краевых условий типа Дирихле, Неймана или так называемого третьего краевого условия, когда на границе области задается линейная комбинация значений неизвестной функции и ее нормальной производной.

При рассмотрении обобщенного алгоритма требуем выполнения еще одного условия, а именно: требуется, чтобы искомое решение могло быть представлено в виде контурного интеграла, взятого по границе рассматриваемой области. Это последнее условие несколько ограничивает область применимости обобщенного алгоритма Шварца ¹⁾.

В дальнейшем для простоты все доказательства проводятся для уравнения упругости, причем на границе рассматриваемой области считаются заданными значения напряжения.

§ 1. Постановка краевых задач и соответствующих алгоритмов

Сначала рассмотрим задачу, относящуюся к алгоритму Шварца.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве E_3 задана ограниченная область Ω . Для определенности предполагаем, что Ω является суммой в теоретико-множественном смысле четырех частично перекрывающихся областей Ω_i ($i=1, 2, 3, 4$). Взаимное расположение областей Ω_i может быть разным. Например, они могут быть расположены в виде цепи, т. е. $\text{mes}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \neq 0$, $\text{mes}(\Omega_2 \cap \Omega_3) \neq 0$ и $\text{mes}(\Omega_3 \cap \Omega_4) \neq 0$. Вообще, важно, чтобы только выполнялось условие $\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_{i+1}) \neq 0$ ($i=1, 2, 3$).

В дальнейшем мы предполагаем, что каждые две из областей Ω_i частично перекрываются, т. е. $\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_k) \neq 0$ ($i, k=1, 2, 3, 4$). Заметим также, что мы только для простоты считаем Ω суммой четырех областей. Вообще же Ω может быть составлена из любого конечного числа областей; удовлетворяющих условиям

$$\text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_{i+1}) \neq 0.$$

Обозначим через S_i границу области Ω_i . Пусть S_i будет кусочно гладкой ($i=1, 2, 3, 4$).

Допустим, что в области Ω задан некоторый набор функций (φ_{ik}) , ($i, k=1, 2, 3$). Для краткости введем обозначение $(\varphi) = (\varphi_{ik})$. Предполагаем, что набор функций $(\varphi) = (\varphi_{ik})$ является элементом ниже определяемого гильбертова пространства $N(\Omega)$. Элемент (φ) играет роль функции, которая даст на границе области значения напряжения от искомого решения. Именно, будем искать то решение уравнений упругости, напряжение от которого принимает значения функции

¹⁾ Вопрос о представимости решения в виде контурного интеграла при помощи функции типа Грина освещен подробно в книге К. Миранда [6].

$t(\varphi) = (t_1(\varphi), t_2(\varphi), t_3(\varphi))$ на границе области. Здесь

$$t_i(\varphi) = \mu \sum_{k=1}^s \varphi_{ik} \cos(\nu, x_k) + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \varphi_{kk} \cos(\nu, x_i) \quad (i=1, 2, 3);$$

ν — внешняя нормаль. В ходе доказательства станет ясно, что условие $(\varphi) \in N(\Omega)$ соответствует тому требованию, которое обычно предъявляют к заданным граничным значениям с тем, чтобы задача была разрешима.

Уравнения упругости напишем в следующем виде:

$$L(u) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0, \quad (1.1)$$

где μ и λ — так называемые коэффициенты Ламе; $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещения.

Сформулируем краевую задачу, к которой мы применим алгоритм Шварца. В области Ω надо найти функцию u ¹⁾, которая является решением уравнений (1.1) и удовлетворяет граничному условию

$$t(u)|_S = t(\varphi)|_S, \quad (1.2)$$

при предположении, что сравнительно легко можно найти решение уравнений (1.1) отдельно для каждой из областей Ω_i при заданных напряжениях на S_i ($i=1, 2, 3, 4$).

Здесь S означает границу области Ω , $t(u)$ — вектор напряжения, соответствующий смещению u .

Алгоритм Шварца для решения этой основной задачи состоит в следующем. В области Ω построим последовательность функций

$$\{u^{n,i}\} \quad (i=1, 2, 3, 4; \quad n=0, 1, 2, \dots), \quad (1.3)$$

которую будем называть последовательностью приближений по Шварцу. Определим $u^{0,1}$ в Ω_1 так, чтобы $L(u^{0,1}) = 0$ в Ω_1 и $t(u^{0,1})|_{S_1} = t(\varphi)|_{S_1}$. Будем считать, что $(u^{0,1}) = (\varphi)$ в $\Omega - \Omega_1$. Таким образом, $(u^{0,1})$ определен во всей области Ω . Вообще для $n \geq 0$ построим функцию $u^{n,1}$ так, чтобы удовлетворялись условия:

$$L(u^{n,1}) = 0 \text{ в } \Omega; \quad t(u^{n,1})|_{S_1} = t(u^{n-1,4})|_{S_1}; \quad u^{n,1} = \begin{cases} u^{n,1} & \text{в } \Omega_1, \\ u^{n-1,4} & \text{в } \Omega - \Omega_1, \end{cases}$$

$$L(u^{n,i}) = 0 \text{ в } \Omega_i; \quad t(u^{n,i})|_{S_i} = t(u^{n,i-1})|_{S_i}; \quad u^{n,i} = \begin{cases} u^{n,i} & \text{в } \Omega_i, \\ u^{n,i-1} & \text{в } \Omega - \Omega_i, \end{cases}$$

где $i=2, 3, 4$. Решение поставленной задачи в области Ω найдем в виде предельной функции последовательности (1.3). Нам предстоит показать, во-первых, что для сформулированной задачи можно действительно построить последовательность (1.3), во-вторых, что полученная таким образом последовательность сходится равномерно в любой внутренней подобласти Ω к некоторой функции u , и эта функция дает решение поставленной выше задачи²⁾.

Сформулируем теперь краевую задачу, к которой мы применим обобщенный алгоритм Шварца. Предварительно сделаем некоторые замечания относительно обозначений. Пусть в трехмерном пространстве E_3 дана бесконечная область Ω , которая является пересечением областей в Ω_1 и Ω_2 в теоретико-множественном смысле. Ω'_1 и Ω'_2 обозначают соответственно внешнюю область относительно замкнутых контуров S_1 и S_2 . Ω_1 и Ω_2 обозначают области, расположенные внутри S_1 и S_2 . Предполагаем, что S_1 и S_2 таковы, что может

¹⁾ Для краткости всегда говорим о функции u , подразумевая вектор-функцию $u = (u_1, u_2, u_3)$.

²⁾ Все эти вопросы будут рассмотрены в § 3.

быть решена сформулированная ниже задача. Причем, как отмечалось, в данном случае не нужно делать никаких ограничений относительно удаленности S_1 и S_2 друг от друга. Они могут даже касаться. Заметим, что данная область не обязательно должна быть бесконечной. Можно было бы рассматривать, например, „кольцевую область“, т. е. когда одна из областей целиком лежит внутри другой.

Задача. В области Ω надо найти функцию u , которая удовлетворяет уравнению (1.1) в области Ω , а на границах области — предельным условиям $t(u)|_{s_i} = t(\varphi)|_{s_i}$ ($i = 1, 2$). На заданную функцию φ налагаются некоторые ограничения в § 5.

В соответствии с обобщенным алгоритмом Шварца предполагаем, что сравнительно легко можно решить предыдущую задачу для каждой из областей Ω'_1 и Ω'_2 в отдельности.

Излагаем вкратце ход решения пока еще формально. Прежде всего, построим функцию u_0 так, чтобы $L(u_0) = 0$ в Ω'_2 и $t(u_0)|_{s_2} = t(\varphi)|_{s_2}$. Определим u_0 во всем пространстве следующим образом:

$$u_0 = \begin{cases} u_0 & \text{в } \Omega'_2, \\ \varphi & \text{в } \Omega_2. \end{cases}$$

После этого построим функцию u_1 , для которой $L(u_1) = 0$ в Ω'_1 и $t(u_1)|_{s_1} = t(u_0)|_{s_1} - t(\varphi)|_{s_1}$. Определим u_1 во всем пространстве:

$$u_1 = \begin{cases} u_1 & \text{в } \Omega'_1, \\ u_0 & \text{в } \Omega_1. \end{cases}$$

Вообще для любой $n > 0$ определим функцию u_{2n} и u_{2n+1} так, чтобы удовлетворялись условия: $L(u_{2n}) = 0$ в Ω'_2 и $t(u_{2n})|_{s_2} = t(u_{2n-1})|_{s_2}$ и также $L(u_{2n+1}) = 0$ в Ω'_1 и $t(u_{2n+1})|_{s_1} = t(u_{2n})|_{s_1}$. Считаем функции u_{2n} и u_{2n+1} продолженными во всем пространстве:

$$u_{2n} = \begin{cases} u_{2n} & \text{в } \Omega'_2, \\ u_{2n-1} & \text{в } \Omega_2 \end{cases}, \text{ и } u_{2n+1} = \begin{cases} u_{2n+1} & \text{в } \Omega'_1, \\ u_{2n} & \text{в } \Omega_1. \end{cases}$$

При помощи этих функций, определенных во всем пространстве, составим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n.$$

В § 5 мы покажем, что элементы этого ряда действительно можно построить, а также, что этот ряд сходится равномерно внутри области Ω к функции u , которая дает решение только что поставленной задачи.

Как мы уже заметили во введении, важным средством при доказательстве предыдущих утверждений служит метод ортогональных проекций. Этот метод был подробно разработан Х. Вейлем для уравнения Лапласа и М. И. Вишиком для общих самосопряженных уравнений высшего порядка. При построении гильбертова пространства $N(\Omega)$, соответствующего нашим задачам, мы пользуемся методами, разработанными в этих работах [1].

§ 2. Построение гильбертова пространства $N(G)$

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве E_3 задана некоторая область G , границу которой обозначим через Γ . Пусть Γ будет кусочно гладкой. Область G может быть ограниченной или неограниченной. Определим пространство $N(G)$. Обозначим через $N^0(G)$ линейное множество, элементами которого являются наборы функций

$(h^0) = (h_{ik}^0)$ ($i, k = 1, 2, 3$), если компоненты удовлетворяют следующим условиям:

- а) они непрерывно дифференцируемы в области G ,
- б) в случае бесконечной области они являются финитными функциями,
- в) они удовлетворяют системе уравнений:

$$\mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_{ik}^0}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_{kk}^0}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.1)$$

Замыкаем линейное множество $N^0(G)$ в метрике

$$((h^0), (h^0)) = \int_G \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 h_{ik}^2 + (\lambda + \mu) \sum_{i,k=1}^3 h_{ii}^0 h_{kk}^0 \right\} dG. \quad (2.2)$$

Обозначим замыкание через $N(G)$.

Теорема 2.1. *Пространство $N(G)$ можно разбить на ортогональную сумму двух подпространств:*

$$N(G) = U(G) \oplus \Psi(G), \quad (2.3)$$

где $U(G)$ является подпространством решений, $\Psi(G)$ — подпространством элементов, удовлетворяющих „нулевым граничным условиям“.

Смысл подпространства решений таков: если $(u) \in U(G)$, тогда существует соответствующая функция u , которая является решением уравнений $L(u) = 0$ ¹⁾. Смысл подпространства $\Psi(G)$ выясняется при его построении. Ход доказательства теоремы 2.1 следующий. Построим разбиение (2.3). После этого докажем вспомогательную лемму, при помощи которой завершаем доказательство.

Пусть $\Psi^0(G)$ обозначает линейное многообразие элементов из $N(G)$, $(\psi^0) \in \Psi^0(G)$, если его компоненты удовлетворяют условиям:

- а) равны нулю в пограничной полосе области,
- б) непрерывно дифференцируемы в области (G) .

Замыкание линейного множества $\Psi^0(G)$ в метрике (2.2) обозначаем через $\Psi(G)$. Принимая $U(G)$ за ортогональное дополнение $\Psi(G)$ до $N(G)$, мы и получили нужное разбиение пространства $N(G)$.

Лемма 2.1. *Для любого элемента $(u) \in U(G)$ и для произвольной области $G' \subset G' \subset G$ существует такая функция u , для которой*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_{ik} \quad \text{в } G' \quad (2.4)$$

и $\int_G u dG = 0$, если G — ограниченная и $\int_\Gamma u d\Gamma = 0$, если G — неограниченная область²⁾.

Доказательство. Пусть C_i — оператор усреднения [7а]. Обозначим $C_i(u) = (C_i u_{ik}) = (u_{ik}^t)$. Сначала покажем, что для $(u) \in U(G)$ выполняются следующие равенства:

$$\frac{\partial u_{ik}^t}{\partial x_j} = \frac{\partial u_{ij}^t}{\partial x_k} \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2.5)$$

¹⁾ Соответствующей функцией любого заданного элемента $(h) = (h_{ik})$ называем такую функцию $h = (h_1, h_2, h_3)$, если она существует, которая является дифференцируемой в обобщенном смысле и для которой $\frac{\partial h_i}{\partial x_k} = h_{ik}$. Наоборот, соответствующим элементом заданной функции $h = (h_1, h_2, h_3)$ называем элемент $(h) = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_k} \right)$.

²⁾ Заметим, что, говоря о производных, всегда подразумеваем обобщенные производные [8а].

Докажем это равенство для случая $i=j=1$, $k=2$. Специальным образом подбираем элемент $(\psi^0) \in \Psi^0(G)$. Пусть ζ^0 — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, равная нулю в пограничной полосе области G . Компоненты элемента (ψ^0) определяем следующим образом: $\psi_{11}^0 = \frac{\partial \zeta^0}{\partial x_2}$, $\psi_{12}^0 = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial \zeta^0}{\partial x_1}$ и $\psi_{ik}^0 = 0$ для всех остальных индексов. Можно убедиться в том, что определенный так элемент (ψ^0) принадлежит $\Psi^0(G)$. В самом деле, компоненты этого элемента непрерывно дифференцируемы в G , равняются нулю в пограничной полосе области G и удовлетворяют системе (2.1):

$$\mu \left(\frac{\partial \psi_{11}^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_{12}^0}{\partial x_2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial \psi_{11}^0}{\partial x_1} = \mu \left(\frac{\partial^2 \zeta^0}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2 \zeta^0}{\partial x_1 \partial x_2} \right) +$$

$$+ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \zeta^0}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Далее, если $(u) \in U(G)$, тогда $C_t(u) \in U(G)$. Покажем это. Оператор C_t симметричен, поэтому

$$(C_t(u), (\tilde{\psi}^0)) = ((u), C_t(\tilde{\psi}^0)), \quad (2.6)$$

где $(\tilde{\psi}^0)$ — произвольный элемент линейного множества $\Psi^0(G)$. Но так как $\tilde{\psi}_{ik}$ равняются нулю в пограничной полосе, то оператор дифференцирования коммутирует с оператором C_t . Из этого следует, что $C_t(\tilde{\psi}^0) \in U(G)$. В самом деле, $C_t \tilde{\psi}_{ik}^0$ равны нулю в пограничной полосе области G , непрерывно дифференцируемы в G и удовлетворяют системе

$$\mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (C_t \tilde{\psi}_{ik}^0) + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (C_t \psi_{kk}^0) =$$

$$= C_t \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tilde{\psi}_{ik}^0}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tilde{\psi}_{kk}^0}{\partial x_i} \right\} = 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

Отсюда, принимая во внимание (2.3) и (2.6), получим

$$(C_t(u), (\tilde{\psi}^0)) = ((u), C_t(\tilde{\psi}^0)) = 0,$$

т. е. $C_t(u)$ в самом деле принадлежит к $U(G)$. Теперь легко доказать утверждение леммы:

$$0 = (C_t(u), (\psi^0)) = \int_G \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 u_{ik}^t \psi_{ik}^0 + (\lambda + \mu) \sum_{i,k=1}^3 u_{ii}^t \psi_{kk}^0 \right\} dG =$$

$$= \int_G (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial \zeta^0}{\partial x_2} u_{11}^t - \frac{\partial \zeta^0}{\partial x_1} u_{12}^t \right) dG,$$

где (ψ^0) — выше определенный элемент. Интегрируя по частям, получим

$$0 = \int_G \left(u_{11}^t \frac{\partial \zeta^0}{\partial x_2} - u_{12}^t \frac{\partial \zeta^0}{\partial x_1} \right) dG = - \int_G \zeta^0 \left(\frac{\partial u_{11}^t}{\partial x_2} - \frac{\partial u_{12}^t}{\partial x_1} \right) dG.$$

Но поскольку ζ^0 — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, исчезающая в пограничной полосе области G ,

то последнее равенство означает, что $\frac{\partial u_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial u_{12}^t}{\partial x_1}$. Очевидно, что таким же образом доказывается (2.5) для любых индексов.

Равенство (2.5) означает, что существует такая функция

$$u^t = (u_1^t, u_2^t, u_3^t),$$

которая определена с точностью до постоянного слагаемого и для которой $\frac{\partial u_i^t}{\partial x_k} = u_{ik}^t$. Для однозначности требуется, чтобы

$\int_G u^t dG = 0$. Остается показать, что и для $(u) \in U(G)$ в любой под-

области G' существует такая функция u , для которой $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_{ik}$ в G' и $\int_G u dG = 0$. На основе неравенства Пуанкаре можно написать

$$\int_G [u^t]^2 dG \leq C \left\{ \int_G [u^t]^2 dG + \int_G \sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{\partial u_i^t}{\partial x_k} \right)^2 dG \right\}.$$

Поскольку функции u^t — нормированные, то имеем

$$\int_G [u^t]^2 dG \leq C \int_G \sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{\partial u_i^t}{\partial x_k} \right)^2 dG.$$

Из свойств средних функций следует, что u_{ik}^t стремится в среднем к u_{ik} при $t \rightarrow 0$. Поэтому из предыдущего неравенства вытекает, что u^t стремится в среднем к некоторой функции u . Из замкнутости оператора дифференцирования следует, что $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_{ik}$. Кроме того, очевидно, что $\int_G u dG = 0$. Тем самым лемма 2.1 полностью доказана.

Для доказательства теоремы покажем, что если функция u является соответствующей функцией элемента $(u) \in U(G)$, то она удовлетворяет уравнению $L(u) = 0$ внутри области G . В самом деле, пусть $(\varphi^0) = (\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая функция, исчезающая в пограничной полосе области G , но не равная тождественно нулю. Покажем, что элемент $(\varphi_0) = \left(\frac{\partial \varphi_i^0}{\partial x_k} \right)$ ортогонален к пространству $N(G)$. Пусть $(h^0) \in N(G)$, тогда

$$\begin{aligned} & \int_G \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 h_{ik}^0 \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{i,k=1}^3 h_{kk}^0 \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial x_i} \right\} dG = \\ & = - \int_G \sum_{i=1}^3 \varphi_i^0 \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_{ik}^0}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_{kk}^0}{\partial x_k} \right\} dG = 0, \end{aligned}$$

поскольку (h^0) удовлетворяет системе (2.1). При этом заметим, что норму (2.2), которую мы определили первоначально для элементов пространства $N(G)$, очевидно можно распространить на более широкий класс элементов. В частности, будем считать, что норма распространена на элементы вида $(\varphi^0) = \left(\frac{\partial \varphi_i^0}{\partial x_k} \right)$. Далее, для любой

$(u) \in U(G)$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 u_{ik} \varphi_{ik}^0 + (\lambda + \mu) \sum_{i,k=1}^3 u_{ii} \varphi_{kk}^0 \right\} dG = \\ &= \int_G \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_i^0}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k^0}{\partial x_k} \right\} dG = \\ &= - \int_G \sum_{i=1}^3 u_i \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi_i^0}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi_k^0}{\partial x_i \partial x_k} \right\} dG = - \int_G u L(\varphi_0) dG. \end{aligned}$$

Это показывает, что функция u является обобщенным решением. Ссылаясь на теорему С. Г. Михлина [7а], можно утверждать, что $U(G)$ является пространством решений в обыкновенном смысле для уравнений упругости. Тем самым теорема полностью доказана.

Рассмотрим коротко вопрос об удовлетворении краевых условий. Пусть (f) — некоторый элемент пространства $N(G)$. На основе (2.3) (f) можно разбить на сумму двух элементов: $(f) = (u) + (\psi)$, где $(u) \in U(G)$, $(\psi) \in \Psi(G)$. Пусть будет функция $(\varphi) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, непрерывно дифференцируемая в G . Предполагаем также, что $\int_G \varphi dG = 0$.

Очевидно $\varphi \in W_2^{(1)}(G)$ ¹⁾.

Покажем, что соответствующий элемент функции φ будет ортогональным подпространству $\Psi(G)$. Для этого достаточно показать, что (φ) ортогонален линейному множеству $\Psi^0(G)$. В самом деле, пусть (ψ^0) — любой элемент из $\Psi^0(G)$. Тогда

$$\begin{aligned} ((\varphi), (\psi^0)) &= \int_G \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \psi_{ik}^0 + (\lambda + \mu) \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \psi_{kk}^0 \right\} dG = \\ &= \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 \varphi_i \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 \psi_{ik}^0 \cos(\nu, x_k) + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \psi_{kk}^0 \cos(\nu, x_i) \right\} d\Gamma - \\ &\quad - \int_G \sum_{i=1}^3 \varphi_i \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi_{ik}^0}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi_{kk}^0}{\partial x_i} \right\} dG, \end{aligned}$$

что непосредственно следует из свойств элемента (ψ^0) . Так как (φ) ортогонален к $\Psi(G)$, то $((f), (\varphi)) = ((u), (\varphi))$.

Рассмотрим последовательность областей $\{G_i\}$, внутренних относительно G . Предполагаем, что $G_i \rightarrow G$ при $i \rightarrow \infty$, причем монотонно, т. е. $G_i \subseteq G_{i+1} \subseteq G$. Кроме того предполагаем, что они обладают кусочно гладкими границами Γ_i . Очевидно, что $\lim_{i \rightarrow \infty} ((f), (\varphi))_{G_i} = ((f), (\varphi))_G$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} ((u), (\varphi))_{G_i} = ((u), (\varphi))_G$, т. е. $\lim_{i \rightarrow \infty} ((f), (\varphi))_{G_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} ((u), (\varphi))_{G_i}$. Интегрируя по частям, получим

$$((f), (\varphi))_{G_i} = \int_{G_i} \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 f_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{i,k=1}^3 f_{kk} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right\} dG =$$

¹⁾ Согласно обозначениям [8а], $W_2^{(1)}(G)$ означает пространство функций, имеющих все обобщенные первые производные, квадратично суммируемые в G .

$$= \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 \varphi_i \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 f_{ik} \cos(\nu, x_k) + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 f_{kk} \cos(\nu, x_i) \right\} d\Gamma - \\ - \int_G \sum_{i=1}^3 \varphi_i \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_{kk}}{\partial x_i} \right\} dG.$$

Поскольку функция u является решением уравнений упругости, получим

$$((u), (\varphi))_{G_i} = \int_{G_i} \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \right\} dG = \\ = \int_{\Gamma_i} \sum_{i=1}^3 \varphi_i \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cos(\nu, x_k) + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \cos(\nu, x_i) \right\} d\Gamma.$$

Используя обозначения

$$t_i(f) = \mu \sum_{k=1}^3 f_{ik} \cos(\nu, x_k) + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 f_{kk} \cos(\nu, x_i), \\ t_i(u) = \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cos(\nu, x_k) + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \cos(\nu, x_i) \quad (i=1, 2, 3),$$

можно написать

$$((f), (\varphi))_{G_i} = \int_{\Gamma_i} \sum_{i=1}^3 \varphi_i t_i(f) d\Gamma - \int_{G_i} \sum_{i=1}^3 \varphi_i \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_{kk}}{\partial x_i} \right\} dG, \quad (2.7)$$

$$((u), (\varphi))_{G_i} = \int_{\Gamma_i} \sum_{i=1}^3 \varphi_i t_i(u) d\Gamma. \quad (2.7')$$

Из определения элементов пространства $N(G)$ вытекает, что если компоненты элемента (f) непрерывно дифференцируемы, то они должны удовлетворять системе

$$\mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_{kk}}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

Это означает, что в (2.7) интеграл по объему равен нулю. Если же $(f) \in N(G)$ не имеет непрерывно дифференцируемых компонентов, то можно утверждать, что существует такая последовательность элементов $\{(f_n)\}$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами, которая стремится к элементу (f) по норме (2.2). В этом случае очевидно, что в равенстве (2.7) интеграл по объему имеет предел при $(f_n) \rightarrow (f)$. Отсюда ясно, что $\int_{\Gamma_i} \sum_{i=1}^3 \varphi_i t_i(f_n) d\Gamma$ также имеет пре-

дел, который обозначим через $\int_{\Gamma} \sum_{i=1}^3 \varphi_i t_i(f) d\Gamma$. Принимая во внима-

ние вышесказанное, окончательно можно написать, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_l} \sum_{i=1}^3 \varphi_i t_i(f) d\Gamma = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_l} \sum_{i=1}^3 \varphi_i t_i(u) d\Gamma.$$

Это означает, что выражение $t_i(u)$ на любом внутреннем кусочно непрерывно дифференцируемом контуре ведет себя в слабом смысле так же, как и выражение $t_i(f)$. Очевидно, что вектор-функция $t(u) = (t_1(u), t_2(u), t_3(u))$ дает значения вектора напряжения, соответствующего смещению u в каждой точке границы Γ .

Замечание. Обозначаем через $H(G)$ гильбертово пространство, элементами которого являются наборы функций вида

$$(h) = (h_{ik}) \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

причем компоненты h_{ik} предполагаются квадратично суммируемыми над G . Пусть $Z^0(G)$ обозначает линейное множество элементов

$(z^0) = \left(\frac{\partial z_i^0}{\partial x_k} \right)$, для которых z^0 — дважды непрерывно дифференцируемая функция в G и равная нулю в пограничной полосе области G . Замыкание линейного множества $Z^0(G)$ в метрике (2.2) обозначаем через $Z(G)$. Докажем следующую теорему:

Теорема 2.2. *Пространство $H(G)$ есть ортогональная сумма пространств $N(G)$ и $Z(G)$:*

$$H(G) = N(G) \oplus Z(G). \quad (2.8)$$

Доказательство. Пусть (h) — любой элемент из $H(G)$. Обозначим через (z) ортогональную проекцию (h) на $Z(G)$. Докажем, что $(f) = (h) - (z)$ принадлежит к $N(G)$. Для этого достаточно показать, что $C_t(f) \in N^0(G)$, так как $C_t(f) \rightarrow (f)$ в метрике (2.2) при $t \rightarrow 0$. Элемент $C_t(f)$ удовлетворяет системе уравнений (2.1). В самом деле, пусть ζ^0 — функция, определенная в G , непрерывно дифференцируемая в нем и исчезающая в пограничной полосе. Очевидно, $(\zeta^0) = \left(\frac{\partial \zeta_i^0}{\partial x_k} \right) \in Z^0(G)$ и также $C_t(\zeta^0) \in Z^0(G)$. Далее $((f), (\zeta^0)) = 0$. Но поскольку оператор C_t симметричный, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= ((f), C_t(\zeta^0)) = (C_t(f), (\zeta^0)) = \int_G \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial \zeta_i^0}{\partial x_k} C_t f_{ik} + \right. \\ &\quad \left. + (\lambda + \mu) \sum_{i,k=1}^3 C_t f_{kk} \frac{\partial \zeta_i^0}{\partial x_i} \right\} dG = \\ &= - \int_G \sum_{i=1}^3 \varphi_i \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (C_t f_{ik})}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (C_t f_{kk})}{\partial x_i} \right\} dG. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $C_t(f)$ в самом деле удовлетворяет системе уравнений (2.1). Остальные требования относительно принадлежности элемента $C_t(f)$ к $N^0(G)$, очевидно, удовлетворяются. Тем самым теорема 2.2 доказана.

§ 3. Доказательство равномерной сходимости алгоритма Шварца

В этом параграфе предстоит показать, во-первых, что для нашей задачи можно действительно построить последовательность приближений по Шварцу, во-вторых, доказать следующую, основную для этого параграфа, теорему:

Теорема 3.1. Последовательность приближений по Шварцу $\{u^{n,i}\}$, элементы которой определены во всей области Ω , равномерно сходится в любой внутренней части Ω к некоторой функции u . Эта функция является решением нашей задачи, т. е. $L(u) = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0$ в Ω и $t(u)|_S = t(\varphi)|_S$.

Докажем первое утверждение, относящееся к построению приближений по Шварцу. Напомним наше предположение, сделанное в § 1. Мы допустили, что элемент (φ) принадлежит пространству $N(\Omega)$. Из этого очевидно, что (φ) принадлежит также пространству $N(\Omega_1)$. Следовательно, в области Ω_1 можно определить элемент (φ) , являющийся ортогональной проекцией (φ) на подпространство $U(\Omega_1)$, т. е. можно написать $(\varphi) = (u^{0,1}) + (\psi^{0,1})$ в Ω_1 , где $(\psi^{0,1}) \in \Psi(\Omega_1)$. На основе изложенного в § 2, можно утверждать, что элемент $(u^{0,1})$ имеет соответствующую функцию $u^{0,1}$, для которой $L(u^{0,1}) = 0$ в Ω_1 и $t(u^{0,1})|_{S_1} = t(\varphi)|_{S_1}$. Определим элемент $(u^{0,1})$ во всей области Ω следующим образом:

$$(u^{0,1}) = \begin{cases} (u^{0,1}) & \text{в } \Omega_1, \\ (\varphi) & \text{в } \Omega - \Omega_1. \end{cases}$$

Элемент $(u^{0,1})$, рассматриваемый только над областью Ω_2 , вообще не имеет соответствующей функции, но является элементом $N(\Omega_2)$. Действительно, компоненты $(u^{0,1})$ над Ω_2 , очевидно, являются квадратично суммируемыми, поэтому $(u^{0,1}) \in H(\Omega_2)$. Далее, пусть функция $\psi^0 = (\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)$ будет дважды непрерывно дифференцируемой в Ω_2 и равной нулю в пограничной полосе области Ω_2 . Ясно, что

$$(\psi^0) = \left(\frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_k} \right) \in Z^0(\Omega_2).$$

Вычисляем интеграл:

$$\begin{aligned} ((u^{0,1}), (\psi^0))_{\Omega_2} &= \int_{\Omega_2} \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_k} u_{ik}^{0,1} + (\lambda + \mu) \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_i} u_{kk}^{0,1} \right\} d\Omega = \\ &= - \int_{S_2''} \sum_{i=1}^3 \psi_i^0 \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 u_{ik}^{0,1} \cos(\nu, x_k) + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 u_{kk}^{0,1} \cos(\nu, x_i) \right\} dS + \\ &+ \int_{S_2''} \sum_{i=1}^3 \psi_i^0 \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 u_{ik}^{0,1} \cos(\nu, x_k) + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 u_{kk}^{0,1} \cos(\nu, x_i) \right\} dS - \\ &- \int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^3 \psi_i^0 \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_{ik}^{0,1}}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_{kk}^{0,1}}{\partial x_k} \right\} d\Omega = \\ &= \int_{S_2''} \psi^0 [t(\varphi) - t(u^{0,1})] dS - \int_{\Omega_1 - \Omega_2} \psi^0 L(u^{0,1}) d\Omega - \\ &- \int_{\Omega_1 - \Omega_1} \sum_{i=1}^3 \psi_i^0 \left\{ \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi_{ik}}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi_{kk}}{\partial x_i} \right\} d\Omega, \end{aligned}$$

где через S_2'' обозначили общую часть области Ω_1 и границы S_2 . Поскольку $t(u^{0,1})|_{S_2''} = t(\varphi)|_{S_2''}$, то интеграл по S_2'' равен нулю. Интеграл в области $\Omega_1 - \Omega_2$ тоже равняется нулю, так как здесь $L(u^{0,1}) = 0$. Интеграл по $\Omega_2 - \Omega_1$ также исчезает. Действительно, $(\varphi) \in N(\Omega_2)$, по-

этому элемент (φ) можно аппроксимировать в метрике (2.2) последовательностью элементов из $N^0(\Omega_2)$, которые необходимо удовлетворяют уравнениям (2.1). В конечном счете получаем, что $((u^{0,1}), (\varphi^0))_{\Omega_2} = 0$. Это означает, что $(u^{0,1}) \in N(\Omega_2)$.

Обозначаем через $(u^{0,2})$ ортогональную проекцию элемента $(u^{0,1})$ в $U(\Omega_2)$. Тогда $(u^{0,1}) = (u^{0,2}) + (\varphi^{0,2})$ в Ω_2 . Функция $u^{0,2}$, соответствующая элементу $(u^{0,2})$, решает краевую задачу: $L(u^{0,2}) = 0$ в Ω_2 и $t(u^{0,2})|_{S_2} = t(u^{0,1})|_{S_2}$. Здесь $(\varphi^{0,2}) \in \Psi(\Omega_2)$. Определим $(u^{0,2})$ во всей области Ω :

$$(u^{0,2}) = \begin{cases} (u^{0,2}) & \text{в } \Omega_2, \\ (u^{0,1}) & \text{в } \Omega - \Omega_2. \end{cases}$$

Повторяя дословно предыдущее рассуждение, можно показать, что $(u^{0,2}) \in N(\Omega_3)$. Проектируя $(u^{0,2})$ на подпространство $U(\Omega_3)$, получим $(u^{0,2}) = (u^{0,3}) + (\varphi^{0,3})$ в Ω_3 и $L(u^{0,3}) = 0$ в Ω_3 . $t(u^{0,3})|_{S_3} = t(u^{0,2})|_{S_3}$. Элемент $(\varphi^{0,3})$ принадлежит подпространству $\Psi(\Omega_3)$. Повторяя шаг за шагом предыдущее рассуждение, можно построить последовательность элементов $\{(u^{n,i})\}$, определенных во всей области Ω . Из построения сразу видно, что каждый элемент $u^{n,i}$ при $n \geq 1$ определяет некоторую квадратично суммируемую функцию $u^{n,i}$ во всей области Ω .

Переходим к доказательству сходимости последовательности $\{(u^{n,i})\}$ в Ω . Из построения следует, что

$$\begin{aligned} (u^{n,i}) &= (u^{n,i+1}) + (\varphi^{n,i+1}) \text{ в } \Omega_{i+1} \quad (i=1, 2, 3), \\ (u^{n,i}) &= (u^{n,i+1}) + (\varphi^{n,i+1}) \text{ в } \Omega_1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Условимся, что $(\varphi^{n,i}) = 0$ в $\Omega - \Omega_i$ ($i=1, 2, 3, 4$). Из (3.1) следует, что норма последовательности элементов $\{(u^{n,i})\}$ дает убывающую последовательность чисел:

$$((u^{0,1}), (u^{0,1})) \geq ((u^{0,2}), (u^{0,2})) \geq \dots \geq ((u^{n,1}), (u^{n,1})) \geq \dots \quad (3.2)$$

Рассмотрим последовательность функций $\{u^{n,1} - u^{1,1}\}$. Из их построения следует, что на границе S удовлетворяется условие $t(u^{n,1} - u^{1,1}) = 0$. Легко заметить, что норма пространства $N(\Omega)$, заданная интегралом (2.2), эквивалентна интегралу Дирихле. Ниже воспользуемся интегралом Дирихле, хотя это и не является существенным для хода рассуждений. Итак, можно написать $D_{\Omega}(u^{n,1} - u^{1,1}) = \int_{\Omega} [\text{grad}(u^{n,1} - u^{1,1})]^2 d\Omega \leq C((u^{n,1} - u^{1,1}), (u^{n,1} - u^{1,1}))$. Отсюда,

принимая во внимание (3.2), получим, что $\{D_{\Omega}(u^{n,1} - u^{1,1})\} \leq k$ для любой n , где k — положительная постоянная. Тем более будем иметь $\{D_{\Omega_1}(u^{n,1} - u^{1,1})\} \leq k$, т. е. множество $\{u^{n,1} - u^{1,1}\}$ равномерно ограничено в метрике интеграла Дирихле в области Ω_1 . Заметим также, что на основе леммы 2.1 можно считать $\int_{\Omega_1} u^{n,1} d\Omega = 0$.

Итак, из полной непрерывности оператора вложения следует, что рассмотренная последовательность имеет такую подпоследовательность $\{u^{n_i,1} - u^{1,1}\}$, которая сходится в среднем по области Ω_1 . Очевидно, это утверждение верно и для последовательности $\{u^{n_i,1}\}$. Обозначаем предельную функцию этой последовательности через u^1 . Кроме того, из построения функций $u^{n,i}$ следует, что они являются решениями уравнений упругости в области Ω_1 . Но поскольку решения уравнений упругости с квадратично суммируемыми первыми производными образуют подпространство в $L_2(\Omega_1)$, а из сходимости в среднем следует равномерная сходимость самих функций и их производных любого порядка, то можем утверждать, что $\{u^{n_i,1}\} \rightarrow u^1$ равномерно в любой внутренней части Ω_1 и u^1 является решением нашего уравнения.

Далее рассмотрим последовательность $\{u^{n_i, 2} - u^{1, 2}\}$ в области Ω_2 . Повторяя предыдущие рассуждения, можем заключить, что $\{u^{n_i, 2}\}$ имеет такую подпоследовательность (обозначаем ее также через $\{u^{n_i, 2}\}$), которая сходится равномерно к некоторой функции u^{II} в любой внутренней части области Ω_2 . Кроме того, u^{II} является решением уравнений упругости. Используя подобные рассуждения и для областей Ω_3 и Ω_4 , получаем, что существует такая подпоследовательность (обозначаем ее также через $\{u^{n_i, 4}\}$), которая сходится равномерно в частичных областях Ω . Легко показать, что $\{u^{n_i, 4}\}$ сходится равномерно в любой внутренней части всей области Ω к некоторой функции u . В самом деле,

$$\begin{aligned} D_{\Omega}(u^{n_i, 4} - u^{n_i, 3}) &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial u^{n_i, 4}}{\partial x_k} - \frac{\partial u^{n_i, 3}}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega \leq \\ &\leq C((u^{n_i, 4} - u^{n_i, 3}), (u^{n_i, 4} - u^{n_i, 3})) = \\ &= C\{((u^{n_i, 4}), (u^{n_i, 4})) + ((u^{n_i, 3}), (u^{n_i, 3})) - 2((u^{n_i, 4}), (u^{n_i, 3}))\}. \end{aligned}$$

Но поскольку $(u^{n_i, 3}) = (u^{n_i, 4}) + (\varphi^{n_i, 4})$ в Ω_4 и $(u^{n_i, 3}) \equiv (u^{n_i, 4})$ в $\Omega - \Omega_4$, можно написать, что $((u^{n_i, 4}), (u^{n_i, 3})) = ((u^{n_i, 4}), (u^{n_i, 4}))$. Окончательно $D_{\Omega}(u^{n_i, 4} - u^{n_i, 3}) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Отсюда нетрудно вывести, что $u^{III} \equiv u^{IV}$ в $\Omega_3 \cap \Omega_4$. Тем самым можно утверждать, что последовательность $\{u^{n_i, 4}\}$ сходится равномерно в $\Omega_3 \cup \Omega_4$. Повторяя последовательно этот путь, можно утверждать, что $\{u^{n_i, 4}\}$ стремится равномерно к некоторой функции u в любой внутренней части Ω . Помимо этого, u удовлетворяет уравнениям упругости внутри Ω и, как очевидно, $t(u)|_S = t(\varphi)|_S$.

Из единственности решения нашей предельной задачи можно заключить, что вся последовательность $\{u^{n, i}\}$ стремится к u . В самом деле, допустим, что $\{u^{n, i}\}$ не стремится к u . Это означает, что существует такое число $\varepsilon > 0$ и такая последовательность $\{u^{n_k, i}\}$, для которой $|u^{n_k, i} - u| > \varepsilon$ при любых n_k . Но это неравенство означало бы, что никакая подпоследовательность из $\{u^{n, i}\}$ не может стремиться к u . Этим теорема 3.1 доказана.

§ 4. Доказательство равномерной сходимости обобщенного алгоритма Шварца

Здесь рассматриваем вторую задачу, сформулированную в § 1. Сначала покажем, что в самом деле можно построить последовательность функций $\{u_n\}$.

Предполагаем, что заданная функция φ такова, что можно построить решения $u_0 \in W_2^{(1)}(\Omega'_2)$, $u_1 \in W_2^{(1)}(\Omega'_1)$. Кроме того, допустим, что $\varphi \in W_2^{(1)}(\Omega_2)$ и $\varphi \in W_2^{(1)}(\Omega_1)$. При помощи символа $((f), (f))_{\Omega_i}$ обозначаем интеграл (2.2), взятый по области Ω_i . Этот же символ без указания области означает, что интеграл берется по всему пространству.

Определим функцию u_0 и u_1 во всем пространстве:

$$u_0 = \begin{cases} u_0 & \text{в } \Omega'_2, \\ \varphi & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \quad u_1 = \begin{cases} u_1 & \text{в } \Omega'_1, \\ u_0 - \varphi & \text{в } \Omega_1. \end{cases}$$

Очевидно, что таким образом определенные функции вообще терпят разрыв на границе S_2 , соответственно S_1 . Но так же, как и в § 3, можно и здесь показать, что элемент $(u_1) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right)$ принадлежит

пространству $N(\Omega'_2)$. Поэтому u_2 в Ω'_2 будет соответствующей функцией элемента (u_2) , для которого имеем $(u_1) = (u_2) + (\psi_2)$, где $(u_2) \in U(\Omega'_2)$ и $(\psi_2) \in \Psi(\Omega'_2)$. Определим u_2 во всем пространстве так, чтобы $u_2 = u_1$ в Ω_2 . Продолжая этот процесс шаг за шагом, можно построить элементы последовательности $\{u_n\}$.

Для нас будут важны следующие соотношения, полученные из ортогональных проекций:

$$\begin{aligned}(u_{2n-1}) &= (u_{2n}) + (\psi_{2n}), \\ (u_{2n}) &= (u_{2n+1}) + (\psi_{2n+1}).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Здесь мы учитывали, что по предположению $u_{2n} \equiv u_{2n-1}$ в Ω_2 и $u_{2n+1} \equiv u_{2n}$ в Ω_1 . Считаем также, что $(\psi_{2n}) \equiv 0$ в Ω_2 и $(\psi_{2n+1}) \equiv 0$ в Ω_1 . Отметим еще, что каждый элемент u_n нашей последовательности имеет все первые производные, квадратично суммируемые в области Ω'_2 и Ω_2 , если n — четное, и в области Ω'_1 и Ω_1 , если n — нечетное число.

При доказательстве сходимости обобщенного алгоритма Шварца важную роль играет следующая лемма:

Лемма 4.1. *Для элементов последовательности $\{u_n\}$, построенных по обобщенному алгоритму Шварца, верны равенства*

$$((u_n), (u_m)) = ((u_k), (u_k)),\tag{4.2}$$

если только $n + m = 2k$, и

$$((u_n), (u_m)) = ((u_{n+1}), (u_m)),\tag{4.2'}$$

если n — нечетное и m — четное числа.

При доказательстве (4.2) и (4.2') исходим из представимости элементов последовательности $\{u_n\}$ в форме (4.1). Докажем сначала (4.2'). Умножим первое из равенств (4.1) скалярно на u_m , где m — четное число. В этом случае подпространство, к которому принадлежит (u_m) , ортогонально подпространству, к которому принадлежит (ψ_{2n}) . Отсюда $((u_m), (\psi_{2n})) = 0$ и $((u_{2n-1}), (u_m)) = ((u_n), (u_m))$. Аналогично, предполагая m — нечетным, из второго равенства (4.1) найдем, что $((u_{2n}), (u_m)) = ((u_{2n+1}), (u_m))$. Последние два равенства равносильны (4.2'). Докажем теперь (4.2). Так как $(u_{2k}) = (u_{2k+1}) + (\psi_{2k+1})$, получим $((u_{2k}), (u_{2l+1})) = ((u_{2k+1}), (u_{2l+1}))$. Точно так же получим $((u_{2k}), (u_{2l})) = ((u_{2k+1}), (u_{2l}))$ во всем пространстве. Два последних равенства вместе дают $((u_n), (u_m)) = ((u_{n-1}), (u_m))$, если $n + m$ является четным числом. Заменим здесь индексы при помощи следующих равенств: $n = m + 1$; $m = n - 1$. К обоим элементам с новыми индексами n и m можно применить предыдущее равенство скалярных произведений, поскольку сумма новых индексов $n + m = m + 1 + n - 1 = 2k$ по предположению. Таким образом, $((u_{m+1}), (u_{n-1})) = ((u_m), (u_{n-1}))$. Используя (4.2'), получим $((u_n), (u_m)) = ((u_{n-1}), (u_m)) = ((u_{n-1}), (u_{m+1}))$. Это и показывает, что в скалярном произведении можно перебрасывать индексы с одного элемента на другой. Поскольку, по предположению, сумма индексов является четным числом, можно продолжать переброску до тех пор, пока оба индекса не совпадут. Тем самым (4.2) доказано.

Докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n,\tag{4.3}$$

элементами которого являются приближения, построенные по обобщенному алгоритму Шварца, сходится равномерно в любой внутренней части заданной области $\Omega = \Omega'_1 \cap \Omega'_2$, а предельная функция u удовлетворяет уравнениям упругости в Ω и граничным условиям $t(u)|_{S_i} = t(\varphi)|_{S_i}$ ($i = 1, 2$).

Доказательство. Принимая во внимание (4.1), можно утверждать, что последовательность норм элементов ряда (4.3) убывает, т. е.

$$((u_0), (u_0)) \geq ((u_1), (u_1)) \geq \dots \geq ((u_n), (u_n)) \geq \dots \quad (4.4)$$

Обозначаем предел этой последовательности чисел через k . Используя лемму 4.1, получим, что последовательность функций $\{u_n\}$ сходится в себе по норме (2.2), где интеграл распространен на все пространство. Действительно, $((u_n - u_m), (u_n - u_m)) = ((u_n), (u_n)) + ((u_m), (u_m)) - 2((u_n), (u_m))$. Из равенств (4.2) и (4.2') ясно, что $\lim_{n, m \rightarrow \infty} ((u_n), (u_m)) = k$. Поэтому

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} ((u_n - u_m), (u_n - u_m)) = 0. \quad (4.5)$$

Из этого равенства можно заключить, что функции $\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k}$ сходятся в среднем по всему пространству. Здесь $\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k}$ означает компонент

вектор-функции $\frac{\partial u_n}{\partial x_k}$. Рассмотрим последовательность $\left\{ \frac{\partial u_{2n}}{\partial x_k} \right\}$ в Ω'_2 .

Каждая функция $\frac{\partial u_{2n}}{\partial x_k}$ является решением уравнений упругости в Ω'_2 , поэтому из сходимости в среднем следует равномерная сходимость в любой внутренней конечной части Ω'_2 . Предельная же функция также является решением уравнений упругости. То же самое можно сказать о последовательности $\left\{ \frac{\partial u_{2n+1}}{\partial x_k} \right\}$ в области Ω'_1 . Так как пре-

делы последовательности $\left\{ \frac{\partial u_{2n}}{\partial x_k} \right\}$ и $\left\{ \frac{\partial u_{2n+1}}{\partial x_k} \right\}$ совпадают в Ω , то это значит, что $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_k} \right\}$ сходится равномерно во всем пространстве и предельная функция удовлетворяет уравнениям упругости. Из этого следует, что она постоянная.

Заметим, что любое решение уравнений упругости можно представить в виде $u = \varphi + r^2 \text{grad } \psi$, где φ является регулярным гармоническим вектором и ψ — регулярной гармонической функцией. Поэтому можно утверждать, что производные от решения уравнения в бесконечности стремятся к нулю.

Возвращаясь к пределу последовательности $\left\{ \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k} \right\}$, легко заметить, что она равна нулю. В самом деле, каждая функция $\frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k}$ является производной от u_{ni} внутри Ω . Здесь $u_n = (u_{n1}, u_{n2}, u_{n3})$. Из этого следует, что предельная функция последовательности $\left\{ \frac{\partial u_{ni}}{\partial x_k} \right\}$, которая является постоянной, как показано выше, может быть только равной нулю.

Теперь можно показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ стремится к решению нашей задачи внутри области Ω . Обозначим через $N(P, Q)$ определенную функцию Неймана для области Ω . Пусть $s_k = \sum_{n=0}^k (-1)^n u_n$.

Из построения функции u_n ясно, что s_k при любом k является решением уравнения $L(u) = 0$ в Ω . Кроме того, этот отрезок ряда (4.3) удовлетворяет граничным условиям:

$$t(s_{2k})|_{S_1} = t(\varphi + u_{2k})|_{S_1}; \quad t(s_{2k})|_{S_2} = t(\varphi)|_{S_2};$$

$$t(s_{2k+1})|_{S_1} = t(\varphi)|_{S_1}; \quad t(s_{2k+1})|_{S_2} = t(\varphi - u_{2k+1})|_{S_2}.$$

Поэтому s_{2k} и s_{2k+1} можно представить в виде

$$s_{2k} = - \sum_{i=1}^2 \int_{S_i} t(\varphi) N(P, Q) ds_Q - \int_{S_1} t(u_{2k}) N(P, Q) ds_Q,$$

$$s_{2k+1} = - \sum_{i=1}^2 \int_{S_i} t(\varphi) N(P, Q) ds_Q + \int_{S_1} t(u_{2k+1}) N(P, Q) ds_Q.$$

В выражения $t(u_n)$ войдут только функции $\frac{\partial u_n}{\partial x_k}$. Но выше указывалось, что они стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому $t(u_n) \rightarrow 0$ равномерно как на S_1 , так и на S_2 . Окончательно получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = u = - \sum_{i=1}^2 \int_{S_i} t(\varphi) N(P, Q) ds_Q.$$

Тем самым полностью доказали теорему 4.1.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
25 III 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Вишик. Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений. Мат. сб., т. 25 (67), № 2, 1949.
2. Г. Н. Голузин. а) Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Лапласа и многосвязных областей, ограниченных окружностями. Мат. сб., т. 41, № 2, 1934.
б) Решение пространственной задачи Дирихле для уравнения Лапласа и для областей, ограниченных конечным числом сфер. Мат. сб., т. 41, № 2, 1934.
3. А. Я. Горгидзе. Об одном применении метода последовательных приближений. ДАН СССР, т. XXX, №№ 5-6, 1934.
4. Л. В. Канторович и В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.-Л., 1952.
5. С. Я. Коган. О решении задачи Неймана альтернирующим методом Шварца. ДАН СССР, т. 65, № 3.
6. К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Изд. иностр. лит-ры, М., 1957 (перевод с итальянск. яз.).
7. С. Г. Михлин. а) Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, М.-Л., 1952.
б) Интегральные уравнения. Гостехиздат, М.-Л., 1952.
в) Об алгоритме Шварца. ДАН СССР, т. 77, № 4, 1951.
8. С. Л. Соболев. а) Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.
- б) Алгоритм Шварца в теории упругости. ДАН СССР, т. IV (XIII), № 6, 1936.
9. Б. Н. Шибяев. Применение альтернирующего метода к колебательному уравнению. Автореферат диссертации. Л., 1950.