

## ASUPRA UNOR POLINOAME DE TIP BERNSTEIN

DE

D. D. STANCU

Comunicare prezentată la 30 septembrie 1960 în ședința Filialei Iași,  
a Academiei R. P. R.

1. Plecînd de la legea multinomială, vom arăta o cale simplă care ne conduce la o clasă de polinoame de tip Bernstein de două sau mai multe variabile.

Într-adevăr, să considerăm o lege multinomială cu trei evenimente independente  $E_1, E_2, E_3$ , avînd respectiv probabilitățile  $x, y, z$ , ( $x + y + z = 1$ ).

Se știe (vezi de exemplu [2]) că probabilitatea ca în  $m$  experiențe evenimentul  $E_1$  să se producă de  $i$  ori, evenimentul  $E_2$  să se producă de  $j$  ori, iar evenimentul  $E_3$  să se producă de  $k = m - i - j$  ori, este egală cu

$$P_{m,i,j} = \frac{m!}{i!j!k} x^i y^j z^k = p_m^{i,j}(x, y)$$

unde

$$(1) \quad p_m^{i,j}(x, y) = \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} x^i y^j (1-x-y)^{m-i-j}.$$

Dacă, de exemplu, convenim să asociem celor  $m$  probe considerate numărul  $f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right)$ , adică o variabilă aleatoare, atunci valoarea medie corespunzătoare are următoarea expresie

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) P_{m,i,j} = B_m(f; x, y),$$

unde

$$(2) \quad B_m(f; x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} p_m^{i,j}(x, y) f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right).$$

În acest fel se ajunge la polinoamele de tip Bernstein pe care le-am considerat și în lucrarea [1].



Să notăm cu  $S_B$ , respectiv  $S_C$ , ceea ce devine suma dublă de mai sus cînd o extindem la mulțimile  $B$  și  $C$ . Deoarece în  $S_B$  avem

$$\left| f(x, y) - f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

rezultă că

$$S_B \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} p_m^{i,j}(x, y) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

În  $S_C$  avem

$$\left| x - \frac{i}{m} \right| + \left| y - \frac{j}{m} \right| \geq \delta, \left| f(x, y) - f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) \right| < 2M,$$

din care pricină putem scrie

$$S_C \leq \frac{2M}{\delta} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \left[ \left| x - \frac{i}{m} \right| + \left| y - \frac{j}{m} \right| \right] p_m^{i,j}(x, y).$$

Dar se observă că avem

$$(7) \quad \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} p_m^{i,j}(x, y) \left| x - \frac{i}{m} \right| \leq \left[ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} p_m^{i,j}(x, y) \left( x - \frac{i}{m} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[ \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i (1-x)^{m-i} \left( x - \frac{i}{m} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{x(1-x)}{m} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{m}},$$

$$(8) \quad \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} p_m^{i,j}(x, y) \left| y - \frac{j}{m} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

Cu acestea obținem delimitarea

$$S_C \leq \frac{2M}{\delta} \left( \frac{1}{2\sqrt{m}} + \frac{1}{2\sqrt{m}} \right) = \frac{2M}{\delta\sqrt{m}}.$$

În acest fel se ajunge la inegalitatea următoare

$$|f(x, y) - B_m(f; x, y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta\sqrt{m}}.$$

Dacă se alege  $m$  suficient de mare  $\left(m > \frac{16M^2}{\varepsilon^2\delta^2}\right)$ , vom avea

$$|f(x, y) - B_m(f; x, y)| < \varepsilon,$$

oricare ar fi punctul  $(x, y) \in \Delta$ . Cu aceasta teorema enunțată este complet demonstrată.

**Consecința 1.** Avînd în vedere că prin transformările liniare

$$t = a + (b-a)x, \quad \tau = c + (d-c)y \quad (a < b, \quad c < d),$$

triunghiul  $\Delta$  se transformă în triunghiul  $T$  de vîrfuri

$$(9) \quad A_1(a, c), \quad A_2(b, c), \quad A_3(a, d),$$

iar polinomul (2) devine

$$\bar{B}_m(f; x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} \left( \frac{x-a}{b-a} \right)^i \left( \frac{y-c}{d-c} \right)^j (ax + \beta)^{m-i-j} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j),$$

unde

$$\bar{x}_i = a + i \frac{b-a}{m}, \quad \bar{y}_j = c + j \frac{d-c}{m},$$

$$ax + \beta = \frac{bd - ac - (d-c)x - (b-a)y}{(b-a)(d-c)},$$

prin aplicarea teoremei 1 se poate arăta că orice funcție  $f(x, y)$  continuă pe triunghiul  $T$  admite pe acest domeniu o aproximație uniformă printr-un șir de polinoame  $\{Q_m(x, y)\}$ .

Într-adevăr, să considerăm funcția

$$\varphi(t, \tau) = f[a + (b-a)t, c + (d-c)\tau];$$

aceasta este, bineînțeles, continuă pe triunghiul  $\Delta$ . În virtutea teoremei 1 rezultă că există un polinom  $B_m(x, y)$  cu proprietatea că pe  $\Delta$  avem

$$|\varphi(t, \tau) - B_m(t, \tau)| < \varepsilon,$$

oricît de mic ar fi  $\varepsilon > 0$ . Dacă  $(x, y) \in T$ , atunci  $(t, \tau) \in \Delta$  și avem

$$\left| f(x, y) - B_m\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-c}{d-c}\right) \right| < \varepsilon,$$

ceea ce ne spune că

$$Q_m(x, y) = B_m\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-c}{d-c}\right)$$

este polinomul care aproximează funcția  $f(x, y)$  pe triunghiul  $T$  cu precizia dorită.

**Observația 1°.** O demonstrație analogă cu demonstrația teoremei 1 se poate da și teoremei corespunzătoare acestuia în cazul unui număr oarecare  $s$  de variabile.

**Observația 2°.** Dacă ținem seama că oricare ar fi domeniul închis și mărginit  $D$  el poate fi acoperit cu un triunghi  $T$  de felul celui de mai sus și că funcția  $f(x, y)$  poate fi prelungită (vezi de exemplu [9]) pe domeniul  $T - D$ , se poate trage concluzia că are loc proprietatea: *Oricare ar fi funcția  $f(x, y)$  definită și continuă pe un domeniu închis și mărginit  $D$  din planul  $x, y$ , ea admite pe acesta o aproximație uniformă printr-un șir de polinoame  $\{R_m(x, y)\}$ .*

Aici avem extinderea teoremei lui Weierstrass la două variabile în cazul polinoamelor de două variabile  $R_m(x, y)$  de gradul  $m$  în raport cu ambele variabile  $x$  și  $y$ .

4. Să ne ocupăm acum de evaluarea ordinului de aproximație al funcției  $f(x, y)$  prin polinomul de tip Bernstein (2).

În acest scop ne vom folosi de noțiunea de modul de continuitate. Prin modul de continuitate, sau modul de oscilație, al funcției  $f(x, y)$  vom înțelege

$$\omega(\delta_1, \delta_2) = \sup |f(x'', y'') - f(x', y')|,$$

unde  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  sînt numere reale, iar  $(x', y')$  și  $(x'', y'')$  sînt două puncte din  $\Delta$  pentru care avem

$$|x'' - x'| \leq \delta_1, |y'' - y'| \leq \delta_2.$$

Vom demonstra acum

**Teorema 2.** Dacă  $f(x, y)$  este o funcție continuă pe triunghiul  $\Delta$ , atunci pe acest domeniu are loc următoarea inegalitate

$$(10) \quad |f(x, y) - B_m(f; x, y)| \leq 2\omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

**Demonstrație.** Ținînd seama de identitatea (5) se poate scrie, după cum am văzut, inegalitatea de la (6). Să folosim acum următoarea proprietate a modului de continuitate

$$\omega(\lambda_1 \delta_1, \lambda_2 \delta_2) \leq (\lambda_1 + \lambda_2 + 1) \omega(\delta_1, \delta_2) \quad (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0),$$

care a fost demonstrată de A. F. Ipatov [5].

Avem

$$\begin{aligned} & \left| f(x, y) - f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) \right| \leq \omega\left(\left|x - \frac{i}{m}\right|, \left|y - \frac{j}{m}\right|\right) = \\ & = \omega\left(\frac{1}{\delta_1} \left|x - \frac{i}{m}\right| \delta_1, \frac{1}{\delta_2} \left|y - \frac{j}{m}\right| \delta_2\right) \leq \left(\frac{1}{\delta_1} \left|x - \frac{i}{m}\right| + \frac{1}{\delta_2} \left|y - \frac{j}{m}\right| + 1\right) \omega(\delta_1, \delta_2). \end{aligned}$$

Dacă ținem seama de aceasta, precum și de inegalitățile (7) și (8), putem scrie

$$\begin{aligned} |f(x, y) - B_m(f; x, y)| & \leq \left[ \frac{1}{\delta_1} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} p_m^{i,j}(x, y) \left|x - \frac{i}{m}\right| + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\delta_2} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} p_m^{i,j}(x, y) \left|y - \frac{j}{m}\right| + 1 \right] \omega(\delta_1, \delta_2) \leq \left[ \frac{1}{2\sqrt{m}} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}\right) + 1 \right] \omega(\delta_1, \delta_2). \end{aligned}$$

Alegînd  $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{m}}$  ajungem tocmai la inegalitatea (10) pe care ne-am propus s-o stabilim.

5. O inegalitate analogă cu cea de la (10) se poate stabili și în cazul corespunzător polinoamelor (4).

Să presupunem că funcția  $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$  este continuă pe simplexul  $\Delta_s: x_1 + x_2 + \dots + x_s \leq 1, x_i \geq 0 (i = 1, s)$ .

Se observă că putem scrie succesiv

$$\begin{aligned} & |f(x_1, x_2, \dots, x_s) - B_m(f; x_1, x_2, \dots, x_s)| \leq \\ & \leq \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^{m-i_1} \dots \sum_{i_s=0}^{m-i_1-\dots-i_{s-1}} p_m^{i_1, \dots, i_s}(x_1, \dots, x_s) \left| f(x_1, \dots, x_s) - f\left(\frac{i_1}{m}, \dots, \frac{i_s}{m}\right) \right| \leq \\ & \leq \left[ \frac{1}{\delta_1} \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^{m-i_1} \dots \sum_{i_s=0}^{m-i_1-\dots-i_{s-1}} p_m^{i_1, \dots, i_s}(x_1, \dots, x_s) \left|x_1 - \frac{i_1}{m}\right| + \dots + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\delta_s} \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^{m-i_1} \dots \sum_{i_s=0}^{m-i_1-\dots-i_{s-1}} p_m^{i_1, \dots, i_s}(x_1, \dots, x_s) \left|x_s - \frac{i_s}{m}\right| \right] \omega(\delta_1, \dots, \delta_s) \leq \\ & \leq \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{m}} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} + \dots + \frac{1}{\delta_s}\right) \right] \omega(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s). \end{aligned}$$

Alegînd  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_s = \frac{1}{\sqrt{m}}$  putem enunța

**Teorema 3.** Dacă funcția  $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$  este continuă pe simplexul  $\Delta_s$ , atunci pe acest domeniu are loc următoarea inegalitate

$$(11) \quad |f(x_1, x_2, \dots, x_s) - B_m(f; x_1, x_2, \dots, x_s)| \leq \left(1 + \frac{s}{2}\right) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{m}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

**Consecința 2.** Inegalitatea binecunoscută a prof. T. Popoviciu [6] se obține de aici luînd  $s = 1$ , iar inegalitatea noastră (10) o regăsim luînd  $s = 2$ .

**Consecința 3.** Dacă în (11) se trece la limită, avem uniform pe simplexul  $\Delta_s$

$$(12) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} B_m(f; x_1, x_2, \dots, x_s) = f(x_1, x_2, \dots, x_s).$$

Acest rezultat a fost indicat și de către G. G. Lorentz [3].

**Consecința 4.** Dacă funcția considerată mai sus satisface pe simplexul  $\Delta_s$  următoarea condiție de tip Lipschitz-Hölder

$$\begin{aligned} (13) \quad & |f(x_1'', x_2'', \dots, x_s'') - f(x_1', x_2', \dots, x_s')| < \\ & < A_1 |x_1'' - x_1'|^{\alpha_1} + A_2 |x_2'' - x_2'|^{\alpha_2} + \dots + A_s |x_s'' - x_s'|^{\alpha_s}, \\ & (0 < \alpha_i \leq 1, A_i > 0, i = 1, 2, \dots, s) \end{aligned}$$

inegalitatea (11) se reduce la următoarea

$$\begin{aligned} & |f(x_1, x_2, \dots, x_s) - B_m(f; x_1, x_2, \dots, x_s)| \leq \\ & \leq \left(1 + \frac{s}{2}\right) \left(\frac{A_1}{\sqrt{m^{\alpha_1}}} + \frac{A_2}{\sqrt{m^{\alpha_2}}} + \dots + \frac{A_s}{\sqrt{m^{\alpha_s}}}\right), \end{aligned}$$

conform unei proprietăți simple a modulului de continuitate aplicat funcțiilor ce verifică condiții de forma (13).

6. Să ne ocupăm acum de extinderea unei teoreme binecunoscute a lui E. V. Voronovskaja [7] la polinoamele (2). Mai întâi vom demonstra următoarea

Lemă. Pe triunghiul  $\Delta$  are loc identitatea

$$(14) \quad \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{i}{m} \binom{j}{m} p_m^{i,j}(x, y) = -\frac{xy}{m}.$$

Demonstrație. Urmîndu-l pe I. P. Natanson [8], să derivăm în raport cu  $t$  și apoi să înmulțim cu  $t$  identitatea

$$\sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} t^j = (1+t)^{m-i};$$

se obține

$$\sum_{j=0}^{m-i} j \binom{m-i}{j} t^j = (m-i) t (1+t)^{m-i-1}.$$

Înlocuind aici

$$t = \frac{y}{1-x-y},$$

obținem identitatea

$$\sum_{j=0}^{m-i} j \binom{m-i}{j} y^j (1-x-y)^{m-i-j} = (m-i) y (1-x)^{m-i-1}.$$

Ținînd seama de aceasta avem

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{j}{m} \binom{m-i}{j} y^j (1-x-y)^{m-i-1} &= \frac{1}{m} (m-i) y (1-x)^{m-i-1} - \\ - y \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m-i}{j} y^j (1-x-y)^{m-i-j} &= \frac{1}{m} (m-i) y (1-x)^{m-i-1} - y (1-x)^{m-i} = \\ &= y \left( x - \frac{i}{m} \right) (1-x)^{m-i-1}. \end{aligned}$$

Rezultă că putem scrie

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{i}{m} \binom{j}{m} p_m^{i,j}(x, y) &= \\ = \sum_{i=0}^m \binom{i}{m} x^i \sum_{j=0}^{m-i} \binom{j}{m} \binom{m-i}{j} y^j (1-x-y)^{m-i-j} &= \\ = -y \sum_{i=0}^m \binom{i}{m} \binom{m-i}{i} x^i (1-x)^{m-i-1} &= \\ = -\frac{y}{1-x} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \left( \frac{i}{m} - x \right)^2 x^i (1-x)^{m-i} &= -\frac{xy}{m}, \end{aligned}$$

deoarece

$$(15) \quad \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (i-mx)^2 x^i (1-x)^{m-i} = mx(1-x).$$

Vom demonstra acum următoarea teoremă, analogă cu o teoremă binecunoscută a lui E. V. Voronovskaja [7].

Teorema 4. Dacă funcția  $f(x, y)$  e mărginită pe triunghiul  $\Delta$  și pe punctul  $(x_0, y_0) \in \Delta$  are diferențiala  $d^2 f(x_0, y_0)$ , atunci avem

$$\begin{aligned} B_m(f; x_0, y_0) &= f(x_0, y_0) + \frac{x_0(1-x_0)}{2m} f''_{xx}(x_0, y_0) - \frac{x_0 y_0}{m} f''_{xy}(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{y_0(1-y_0)}{2m} f''_{yy}(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon_m}{m}, \end{aligned} \quad (16)$$

unde  $\varepsilon_m$  tinde la zero dacă  $m$  tinde la infinit.

Demonstrație. Fie  $(x_0, y_0)$  și  $(x, y)$  două puncte din  $\Delta$ . Pe baza formulei lui Taylor avem

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x-x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y-y_0) f'_y(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{(x-x_0)^2}{2} f''_{xx}(\xi, \eta) + (x-x_0)(y-y_0) f''_{xy}(\xi, \eta) + \frac{(y-y_0)^2}{2} f''_{yy}(\xi, \eta), \end{aligned}$$

unde

$$\xi \in (x_0, x), \eta \in (y_0, y).$$

Punînd  $x = \frac{i}{m}$ ,  $y = \frac{j}{m}$ , formula aceasta se mai poate scrie și sub forma

$$\begin{aligned} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) - f(x_0, y_0) &= \left(\frac{i}{m} - x_0\right) f'_x(x_0, y_0) + \left(\frac{j}{m} - y_0\right) f'_y(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{i}{m} - x_0\right)^2 f''_{xx}(x_0, y_0) + \left(\frac{i}{m} - x_0\right) \left(\frac{j}{m} - y_0\right) f''_{xy}(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{j}{m} - y_0\right)^2 f''_{yy}(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (17)$$

unde

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \left(\frac{i}{m} - x_0\right)^2 \left[ f''_{xx}(\xi_i, \eta_j) - f''_{xx}(x_0, y_0) \right] + \left(\frac{i}{m} - x_0\right) \left(\frac{j}{m} - y_0\right) \left[ f''_{xy}(\xi_i, \eta_j) - \right. \\ &\quad \left. - f''_{xy}(x_0, y_0) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{j}{m} - y_0\right)^2 \left[ f''_{yy}(\xi_i, \eta_j) - f''_{yy}(x_0, y_0) \right]. \end{aligned}$$

Dacă înmulțim ambii membri ai formulei (17) cu polinomul  $p_m^{i,j}(x_0, y_0)$  facem însumarea și apoi ținem seama de identitățile următoare

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{i}{m} \binom{j}{m} p_m^{i,j}(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \binom{j}{m} \binom{m-i}{j} p_m^{i,j}(x, y) \equiv 0,$$

găsim că

$$\begin{aligned}
B_m(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0) &= \frac{1}{2} f''_{x^2}(x_0, y_0) \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \left(\frac{i}{m} - x_0\right)^2 p_m^{i,j}(x_0, y_0) + \\
&+ f''_{xy}(x_0, y_0) \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \left(\frac{i}{m} - x_0\right) \left(\frac{j}{m} - y_0\right) p_m^{i,j}(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{1}{2} f''_{y^2}(x_0, y_0) \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \left(\frac{j}{m} - y_0\right)^2 p_m^{i,j}(x_0, y_0) + r_m = \\
&= \frac{1}{2} f''_{x^2}(x_0, y_0) \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \left(\frac{i}{m} - x_0\right)^2 x_0^i (1-x_0)^{m-i} + \\
&+ f''_{xy}(x_0, y_0) \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \left(\frac{i}{m} - x_0\right) \left(\frac{j}{m} - y_0\right) p_m^{i,j}(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{1}{2} f''_{y^2}(x_0, y_0) \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{j}{m} - y_0\right)^2 y_0^j (1-y_0)^{m-j} + r_m,
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
r_m &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \left(\frac{i}{m} - x_0\right)^2 \delta_1\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) p_m^{i,j}(x_0, y_0) + \\
&+ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \left(\frac{i}{m} - x_0\right) \left(\frac{j}{m} - y_0\right) \delta_2\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) p_m^{i,j}(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \left(\frac{j}{m} - y_0\right)^2 \delta_3\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) p_m^{i,j}(x_0, y_0) = r_m^{(1)} + r_m^{(2)} + r_m^{(3)},
\end{aligned}$$

iar  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  tind la zero o dată cu  $\frac{i}{m} - x_0$  și  $\frac{j}{m} - y_0$ ; am notat aici cu  $r_m^{(1)}, r_m^{(2)}$  și  $r_m^{(3)}$  respectiv cele trei sume duble din care este compus  $r_m$ .

Aplicînd acum lema precedentă, identitatea (15) și analoga ei, obținem

$$\begin{aligned}
B_m(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0) &= \frac{x_0(1-x_0)}{2m} f''_{x^2}(x_0, y_0) - \frac{x_0 y_0}{m} f''_{xy}(x_0, y_0) + \\
&+ \frac{y_0(1-y_0)}{2m} f''_{y^2}(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon_m}{m},
\end{aligned}$$

unde  $\varepsilon_m = m r_m$ .

Pentru ca teorema 4 să fie complet demonstrată mai trebuie arătat că  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  cînd  $m \rightarrow \infty$ .

Fie  $\varepsilon > 0$  un număr oricît de mic; să îl alegem pe  $m$  așa de mare încît să avem

$$\left| \delta_1\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right) \right| < \varepsilon \quad \text{cînd} \quad \left| \frac{i}{m} - x_0 \right| < \frac{1}{\sqrt[4]{m}} \quad \text{și} \quad \left| \frac{j}{m} - y_0 \right| < \frac{1}{\sqrt[4]{m}}.$$

Vom descompune acum pe  $r_m^{(1)}$  în două sume  $S_1^{(1)}$  și  $S_2^{(1)}$ , prima conținînd termenii pentru care

$$\left| \frac{i}{m} - x_0 \right| < \frac{1}{\sqrt[4]{m}} \quad \text{și} \quad \left| \frac{j}{m} - y_0 \right| < \frac{1}{\sqrt[4]{m}}$$

în același timp, iar a doua conținînd ceilalți termeni. Avînd în vedere că

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} \left(x_0 - \frac{i}{m}\right)^2 p_m^{i,j}(x_0, y_0) \leq \frac{1}{4m},$$

rezultă că avem

$$|S_1^{(1)}| < \frac{\varepsilon}{4m}.$$

Funcția  $\delta_1\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right)\left(\frac{i}{m} - x_0\right)^2$  fiind mărginită, să notăm cu  $M_1$  o margine superioară a valorii absolute a acestei funcții. Avem

$$|S_2^{(1)}| \leq M_1 \sum p_m^{i,j}(x_0, y_0) \leq \frac{AM_1}{\sqrt{m^3}},$$

unde  $A$  este o constantă; suma de mai sus se referă la toți termenii puși în evidență, pentru care avem

$$\left| \frac{i}{m} - x_0 \right| \geq \frac{1}{\sqrt[4]{m}} \quad \text{sau} \quad \left| \frac{j}{m} - y_0 \right| \geq \frac{1}{\sqrt[4]{m}}.$$

Rezultă în definitiv că

$$|mr_m^{(1)}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{AM_1}{\sqrt{m}}.$$

Dacă se ia  $m$  suficient de mare, avem  $|mr_m^{(1)}| < \varepsilon$ .

În mod analog se dovedește că avem de asemenea  $|mr_m^{(2)}| < \varepsilon$  și  $|mr_m^{(3)}| < \varepsilon$ , din care cauză pentru  $m$  destul de mare avem  $|\varepsilon_m| < 3\varepsilon$ , oricare este  $\varepsilon > 0$ . Aceasta înseamnă că  $\varepsilon_m \rightarrow 0$  cînd  $m \rightarrow \infty$ .

*Observație.* În cazul polinoamelor de tip Bernstein corespunzătoare unui dreptunghi, o formulă analogă cu cea de la (16) a fost stabilită de A. F. Ipatov [5].

7. Teorema 4 se poate extinde cu ușurință și la cazul unui număr oarecare  $s$  de variabile, cînd polinoamele care intervin vor fi polinoamele de tip Bernstein (4).

În acest caz are loc

**Teorema 5.** Dacă funcția  $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$  este mărginită pe simplexul  $\Delta_s$  și pe punctul  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_s^{(0)}) \in \Delta_s$  are diferențiala  $d^2 f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_s^{(0)})$ , avem formula

$$B_m(f; x_1^{(0)}, \dots, x_s^{(0)}) = f(x_1^{(0)}, \dots, x_s^{(0)}) + \frac{1}{2m} [x_1^{(0)}(1 - x_1^{(0)}) f_{x_1^2}''(x_1^{(0)}, \dots, x_s^{(0)}) + \\ + \dots + x_s^{(0)}(1 - x_s^{(0)}) f_{x_s^2}''(x_1^{(0)}, \dots, x_s^{(0)})] - \frac{1}{m} [x_1^{(0)} x_2^{(0)} f_{x_1 x_2}''(x_1^{(0)}, \dots, x_s^{(0)}) + \\ + x_1^{(0)} x_3^{(0)} f_{x_1 x_3}''(x_1^{(0)}, \dots, x_s^{(0)}) + \dots + x_{s-1}^{(0)} x_s^{(0)} f_{x_{s-1} x_s}''(x_1^{(0)}, \dots, x_s^{(0)})] + \frac{\varepsilon_m}{m}, \\ \text{unde } \varepsilon_m \rightarrow 0 \text{ cînd } m \rightarrow \infty.$$

Din această teoremă rezultă că ordinul de aproximație al funcției  $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$  prin polinomul de la (4) nu poate fi în general (excep-tînd funcția liniară) făcut mai mic decît  $\frac{1}{m}$ . Inegalitatea (11) ne permite însă să obținem într-un caz mai general o margine superioară a erorii care se comite cînd  $f(P)$  se înlocuiește, pe  $\Delta_s$ , cu  $B_m(f; P)$ .

## О НЕКОТОРЫХ ПОЛИНОМАХ ТИПА БЕРНШТЕИНА

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Приводится вероятностный метод вывода полиномов типа Бернштейна полной степени  $m$  из (2) или из (4), смотря по тому имеет ли мы случай двух переменных или произвольного числа  $s$  переменных. В № 2 указывается как можно получить полином (2) при помощи интерполяционного полинома от двух переменных О. Бирмана [4]. В № 3 доказывается, что если функция  $f(x, y)$  непрерывна в треугольнике  $\Delta: x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ , то имеем  $B_m(f; x, y) \rightarrow f(x, y)$ . Далее установлено неравенство (10), дающее порядок приближения непрерывной функции  $f(x, y)$  при помощи полинома (2). В случае  $s$  переменных имеет место неравенство (11), из которого при  $s = 1$  получается неравенство Т. Поповича [6].

Для приближения ограниченной на  $\Delta$  функции  $f(x, y)$ , обладающей в рассматриваемой точке  $(x_0, y_0)$  дифференциалом  $d^2 f(x_0, y_0)$  автор устанавливает оценку (16). В случае  $s$  переменных приводится оценка (17), из которой при  $s = 1$  получается важная оценка установленная Е. В. Вороновской [7].

## SUR QUELQUES POLYNÔMES DE TYPE BERNSTEIN

### RÉSUMÉ

L'auteur présente une méthode probabilistique de déduction des polynômes de type Bernstein de degré global  $m$  de la formule (2) ou (4), suivant qu'il s'agit de deux ou d'un nombre quelconque  $s$  de vari-

ables. Au § 2 nous indique comment on peut arriver au polynôme (2) en utilisant un polynôme d'interpolation de deux variables de O. Biermann [4]. Au § 3 on démontre que si la fonction  $f(x, y)$  est continue dans le triangle  $\Delta: x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ , on a  $B_m(f; x, y) \rightarrow f(x, y)$ . L'auteur établit ensuite l'inégalité (10), qui donne l'ordre d'approximation de la fonction continue  $f(x, y)$  par le polynôme (2). Dans le cas de  $s$  variables a lieu l'inégalité (11), d'où pour  $s = 1$  on obtient l'inégalité de T. Popoviciu [6].

Pour l'approximation d'une fonction  $f(x, y)$ , bornée dans  $\Delta$  et qui, dans le point considéré  $(x_0, y_0)$  a la différentielle  $d^2 f(x_0, y_0)$ , l'auteur établit l'évaluation (16). Pour  $s$  variables on donne la formule (17), d'où l'on obtient, pour  $s = 1$ , l'importante évaluation donnée par E. V. Voronovskaja [7].

### BIBLIOGRAFIE

1. Stancu D. D., *Asupra aproximării prin polinoame de tip Bernstein a funcțiilor de două variabile*, Comunic. Acad. R.P.R., 1959, t. 9, nr. 8, pp. 773—777.
2. Mihoc G., *Elemente de calculul probabilităților*. Edit. tehnică, 1954, p. 34.
3. Lorentz G. G., *Bernstein polynomials*. Toronto, 1953, p. 51.
4. Biermann O., *Über näherungsweise Kubaturen*. Monatshefte f. Math. u. Physik, 1903, t. 14, pp. 211—225.
5. Ипатова А. Ф. Оценка погрешности и порядок приближения функций двух переменных полиномами С. Н. Бернштейна. Уч. Зап. Петрозаводского, Ун-та, 1955, т. 4, p. 33.
6. Popoviciu T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*. Mathematica, 1934, t. 10, pp. 49—54.
7. Voronovskaja E. V., *Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein*. C. R. Acad. Sci. U.R.S.S., 1932, pp. 79—85.
8. Натансон И. П., *Конструктивная теория функций*. Москва-Ленинград, 1949, стр. 20.
9. Smirnov V. I., *Curs de matematici superioare*, t. IV, p. 502. Ed. tehnică, 1956.

Univ. Babeș-Bolyai-Cluj