

In cel de al V-lea an de apariție (1960) *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* cuprinde aceleași serii:

- I. matematică, fizică, chimie;
- II. geologie, geografie, biologie;
- III. filozofie, economie politică, psihologie, pedagogie, științe juridice;
- IV. istorie, lingvistică, literatură.

Fiecare serie apare anual în 2 fascicule.

V. (1960-as) évfolyamában a *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* változatlanul az alábbi sorozatokat öleli fel:

- I. matematika, fizika, kémia;
- II. geológia, földrajz, biológia;
- III. filozófia, politikai gazdaságtan, lélektan, pedagógia, jogtudomány;
- IV. történet-, nyelv- és irodalomtudomány.

Minden sorozatban évente két füzet jelenik meg.

На V году издания (1960), *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* выходит теми сериями:

- I. математика, физика, химия;
- II. геология, география, биология;
- III. философия, политэкономия, психология, педагогика, юридические науки;
- IV. история, языкознание, литературоведение.

В каждой серии ежегодно выходят два выпуска.

Dans leur V-me année de la publication (1960) les *Studia Universitatis Babeș-Bolyai* comportent les mêmes séries:

- I-e mathématiques, physique, chimie;
- II-e géologie, géographie, biologie;
- III-e philosophie, économie politique, psychologie, pédagogie, sciences juridiques;
- IV-e histoire, linguistique, littérature.

Chaque série comprend deux fascicules par année.

P. 577

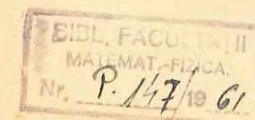
STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES I FASCICULUS 1

1960

MATHEMATICA
PHYSICA

C L U J



BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00338

COMITETUL DE REDACȚIE — SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ — COMITÉ DE RÉDACTION

Acad. Prof. C. DAICOVICIU (redactor responsabil), Conf. I. CETERCHI, Conf. V. I. CIMPIANU, Prof. J. DEMETER, Conf. Ö. FELSZEGHY, Conf. M. KALLÓS, Prof. N. LASCU, Prof. T. LÁSZLÓ, Prof. D. MACREA, Prof. GY. MARTON, Prof. T. MORARIU, membru coresp. Acad., Conf. L. NAGY, Prof. I. PÉTERFI, membru coresp. Acad. (redactor responsabil adjunct), Acad. Prof. E. PETROVICI, Prof. Gh. PIC, Prof. T. POPOVICIU, membru coresp. Acad., Prof. E. A. PORA, membru coresp. Acad., Acad. Prof. R. RIPAN, Prof. Al. ROȘCA, Conf. I. URSU

Redacția:
CLUJ, str. Kogălniceanu 1
Telefon 34—50

S U M A R

T. POPOVICIU, Opera științifică a lui J. Bolyai	9
E. KISS, Rezolvarea în numere naturale a ecuației diofantiene $x^2+y^3=z^4$	15
Gh. PIC, Despre o teoremă a lui B. H. Neumann	21
G. CALUGAREANU, Asupra izotopiei curbelor închise	27
G. CALUGAREANU, Asupra unui sistem de invarianți de izotopie	35
F. RADÓ, Generalizarea ȧesuturilor spațiale pentru structuri algebrice	41
M. FRODA-SCHECHTER, Studiul unei proprietăți a translațiilor de mulțimi	57
I. MARUSCIAC, Asupra polinoamelor lui Cebîșev k-restrinse pe o mulțime mărgi- nită și închisă din planul complex	73
P. T. MOCĂNU, O teoremă asupra funcțiilor univalente	91
D. V. IONESCU, O teoremă asupra sistemelor de ecuații liniare	97
F. MUNTEANU, Extinderea unei teoreme referitoare la sisteme de ecuații liniare	107
M. FERTIG, Despre comportarea integralelor ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți, care depind de un parametru	121
G. KALIK și P. SZILAGYI, Despre rezolvarea problemei la limită a lui Neumann	131
L. NEMETI, Tensiuni termice în prisme lungi	143
A. NEY, Despre cazul de nehotărîre al criteriului de convergență al lui D'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Observații asupra problemei celei mai bune aproximații într-un spațiu abstract	163
F. CONSTANTINESCU, Asupra distanței a două mulțimi într-un spațiu vectorial normat	167
T. MIHAILESCU, Rețele izoterm-conjugate situate pe suprafețele riglate	169
E. GERGELY, Despre ovale pe baza ecuațiilor lor intrinseci	175
L. BAL, Asupra unor suprafețe ce intervin în nomografie	181
D. D. STANCU, Asupra calculului coeficienților unei formule generale de cuadratură Kutta de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale	187
F. COȚIU și A. COȚIU, Delimitarea erorii procedurii de ordinul al cincilea a lui Kutta de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale	193
E. TATARU, Studiu asupra proprietăților de radiație ale antenelor lentile excitate de pîlnii electromagnetice piramidale sau sectoriale	199
F. KELEMEN, Influența temperaturii asupra potențialului de mișcare al metalelor în apă distilată	205
V. MERCEA, Viscosimetrul cu capilară inelară	217
V. MERCEA, Rezistențe la scurgere în scurgeri capilare de gaze și măsurarea lor cu viscosimetrul cu capilară	239
I. MAXIM, IULIU POP și A. NICULA, O metodă sensibilă pentru determinarea relativă a susceptibilității magnetice, cu compensare în câmpul gravitațional	254
I. MAXIM, A. NICULA și IULIU POP, O metodă magnetometrică pentru măsurarea remanenței magnetice	265
KOCH F., Unele probleme legate de variația cu temperatura a efectului Procopiu	269

Cronică

Ecuații funcționale în legătură cu nomografia (F. RADÓ)	277
Mulțimi de funcții interpolatoare și noțiunea de funcție convexă (E. MOLDOVAN)	279
Cursuri speciale: Curs special predat de prof. G. CALUGAREANU Curs special predat de prof. T. POPOVICIU Curs special predat de prof. E. MOLDOVAN	285

СОДЕРЖАНИЕ

Т. ПОПОВИЧУ, Научная деятельность И. Бойан	9
Э. КИШШ, Решение в натуральных числах диофантового уравнения $x^2 + y^2 = z^4$	15
Г. ПИК, Об одной теореме Б. Х. Неймана	21
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об изотопии замкнутых кривых	27
Дж. КЭЛУГЭРЯНУ, Об одной системе инвариантов изотопии	35
Ф. РАДО, Обобщение пространственных тканей для алгебраических структур	41
М. ФРОДА-ШЕХТЕР, Исследование одного свойства переносов множеств	57
И. МАРУЩАК, О полиномах Чебышева k -условных на замкнутом и ограниченном множестве комплексной плоскости	73
П. Т. МОКАНУ, Одна теорема об однолистных функциях	91
Д. В. ИОНЕСКУ, Одна теорема о системах линейных уравнений	97
Ф. МУНТЯНУ, Расширение одной теоремы, относящейся к системе уравнений	107
М. ФЕРТИГ, О поведении интегралов дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от одного параметра	121
К. КАЛИК, П. СИЛАДИ, О решении проблемы Неймана	131
Л. НЕМЕТИ, Тепловые напряжения в длинных призмах	143
А. НЕЙ, О случае сомнения признака сходимости Даламбера	153
Е. МОЛДОВАН, Замечания относительно наилучшего приближения в абстрактных пространствах	163
Ф. КОНСТАНТИНЕСКУ, О расстоянии двух множеств в нормированном векторном пространстве	167
Т. МИХЭИЛЕСКУ, Изотермо-сопряженные сети на линейчатых поверхностях	169
Е. ГЕРГЕЙ, Об овалах на основании их внутренних уравнений	175
Л. БАЛ, О некоторых поверхностях, возникающих в номографии	181
Д. Д. СТАНКУ, О вычислении коэффициентов одной общей формулы квадратуры	187
Ф. КОЦИЮ, А. КОЦИЮ, Оценка ошибки способа пятой степени Кутта числового интегрирования дифференциальных уравнений	193
Э. ТЭТАРУ, Изучение излучительных свойств линзовых антенн, раздраженных электромагнитными пирамидальными или секторными рупорами	199
Ф. КЕЛЕМЕН, Влияние температуры на потенциал движения металлов в дистиллированной воде	205
В. МЕРЧА, Вискозиметр с кольцевым капилляром	217
В. МЕРЧА, Сопротивление истечения при капиллярных истечениях газов и измерение их при помощи вискозиметра с кольцевыми капиллярами	239
И. МАКСИМ, Ю. ПОП, А. НИКУЛА, Чувствительный метод для относительного определения магнитной восприимчивости с компенсацией в гравитационном поле	259
И. МАКСИМ, А. НИКУЛА, Ю. ПОП, Магнитометрический метод для измерения остаточного магнетизма	265
Ф. КОХ, Некоторые проблемы в связи с температурной вариацией эффекта Прокопну	269
Хроника	279

SOMMAIRE

T. POPOVICIU, L'oeuvre scientifique de J. Bolyai	9
E. KISS, Résolution en nombres naturels de l'équation diophantienne $x^2 + y^3 = z^4$	15
GH. PIC, Sur un théorème de B. H. Neumann	21
G. CALUGAREANU, Sur l'isotopie des courbes fermées	27
G. CALUGAREANU, Sur un système d'invariants d'isotopie	35
F. RADO, Généralisation des tissus spatiaux, pour certaines structures algébriques	41
M. FRODA-SCHECHTER, Étude d'une propriété des translations d'ensembles	57
I. MARUȘCIAC, Sur les polynômes de Tchebychev k-restreints à un ensemble limité et fermé du plan complexe	73
P. T. MOCANU, Un théorème sur les fonctions univalentes	91
D. V. IONESCU, Un théorème sur les systèmes d'équations linéaires	97
F. MUNTEANU, Extension d'un théorème relatif à des systèmes d'équations	107
M. FERTIG, Sur le comportement des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients constants qui dépendent d'un paramètre	121
C. KALIK, P. SZILAGYI, Sur la solution du problème de la limite de Neumann	131
L. NEMETI, Tensions thermiques dans des prises longs	143
A. NEY, Sur le cas d'indétermination du critérium de convergence de d'Alembert	153
E. MOLDOVAN, Sur la meilleure approximation dans espaces abstraits	163
F. CONSTANTINESCU, Sur la distance de deux ensembles dans un espace vectoriel normé	167
T. MIHAILESCU, Les réseaux isothermes-conjugués situés sur des surfaces réglés	169
E. GERGELY, Problèmes des ovales fondés sur leurs équations itrisèques	175
L. BAL, Sur certaines surfaces intervenant en nomographie	181
D. D. STANCU, Sur le calcul des coefficients d'une formule générale de quadrature	187
F. COTIU et A. COTIU, Délimitation de l'erreur du procédé de cinquième ordre de Kutta pour l'intégration numérique des équations différentielles	193
E. TATARU, Étude sur les propriétés de radiation des antennes lentilles excitées par des pavillons électromagnétiques, pyramidaux ou sectoriaux	199
F. KELEMEN, L'influence de la température sur le potentiel de mouvement des métaux dans l'eau distillée	205
V. MERCEA, Le viscosimètre à capillaire annulaire	217
V. MERCEA, Les résistances à l'écoulement dans les écoulements capillaires de gaz et leur mesure avec le viscosimètre à capillaires annulaires	238
I. MAXIM, I. POP, A. NICULA, Sur une méthode sensible pour la détermination relative de la susceptibilité magnétique, avec compensation dans le champ gravitationnel	259
I. MAXIM, A. NICULA, I. POP, Méthode magnétométrique pour la mesure de la rémanence magnétique	265
F. KOCH, Problèmes liés à la variation de l'effet Procopiu en fonction de la température	269
Chronique	297

ASUPRA CALCULULUI COEFICIENTILOR UNEI FORMULE GENERALE DE CUADRATURĂ

de
D. D. STANCU

În anumite aplicații practice adesea este necesar să se cunoască formule de integrare numerică care folosesc noduri date dinainte, care sînt indicate de problemele ce se tratează, precum și alte noduri pe care le putem alege noi conform scopului pe care îl urmărim; astfel, e foarte important cazul cînd aceste ultime noduri se aleg în așa fel încît formula de integrare numerică respectivă să aibă gradul maxim de exactitate. Ideea construirii unor astfel de formule de integrare numerică (de cuadratură) se datorește lui E. B. Christoffel [1]. A. A. Markov [2] a studiat și perfecționat formula de cuadratură a lui Christoffel, care de fapt constituie o interesantă generalizare a formulei de cuadratură a lui Gauss.

În cîteva lucrări recente [3], [4], [5] noi am generalizat rezultatele lui E. B. Christoffel și A. A. Markov, construind formule de cuadratură noi care credem că vor fi utile pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale, cu derivate parțiale sau a ecuațiilor integrale. Formulele construite de noi au nodurile date dinainte (cele fixe) multiple, iar celelalte au fost alese astfel încît formulele să aibă gradele de exactitate maxime.

În lucrarea [6] prof. T. Popoviciu a studiat o generalizare foarte importantă a formulei de cuadratură a lui Gauss, considerînd cazul nodurilor multiple. În lucrarea [5] am generalizat formula amintită — în același sens în care E. B. Christoffel și A. A. Markov au generalizat formula de cuadratură a lui Gauss.

În lucrarea de față vom face pe scurt o privire de sinteză asupra problemelor amintite mai sus.

1. Să considerăm integrala

$$I = \int_a^b p(x)f(x)dx, \quad (1)$$

unde $p(x)$ este o funcție dată, nenegativă și integrabilă pe intervalul (a, b) — finit sau infinit, iar $f(x)$ e o funcție oarecare integrabilă pe intervalul considerat.

Să presupunem că sînt date nodurile $a_1, a_2, \dots, a_s$, multiple respectiv de ordinele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, plasate oriunde pe axa reală — însă astfel încît polinomul

$$\omega(x) = A \prod_{v=1}^s (x - a_v)^{\alpha_v} (A \neq 0) \quad (2)$$

să fie pozitiv pe intervalul (a, b) .

$x_1, x_2, \dots, x_m$ fiind noduri oarecare, de ordinele de multiplicitate date $r_1, r_2, \dots, r_m$, să formăm polinomul

$$l(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i)^{r_i}. \quad (3)$$

Vom considera acum o formulă de cuadratură de forma

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{r_i-1} A_{i,k} f^{(k)}(x_i) + \sum_{v=1}^s \sum_{\mu=0}^{\alpha_v-1} B_{v,\mu} f^{(\mu)}(a_v) + R(f), \quad (4)$$

$A_{i,k}$ și $B_{v,\mu}$ fiind coeficienții formulei de cuadratură, iar $R(f)$ restul acestei formule.

Pentru calculul coeficienților acestei formule de cuadratură pot fi stabilite cu ușurință formule relativ simple, dacă se folosesc rezultatele obținute de noi în lucrările [7], [8].

În acest scop să introducem funcțiile auxiliare

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{u_i(x)} \int_a^b p(t) \frac{u(x) - u(t)}{x - t} dt, \quad \psi_v(x) = \frac{1}{v_v(x)} \int_a^b p(t) \frac{u(x) - u(t)}{x - t} dt, \quad (5)$$

$(i = 1, 2, \dots, m; v = 1, 2, \dots, s)$

unde

$$u(x) = \omega(x) l(x), \quad u_i(x) = \frac{u(x)}{(x - x_i)^{r_i}}, \quad v(x) = \frac{u(x)}{(x - a_v)^{\alpha_v}}.$$

Ținînd seama de calculele pe care le-am făcut în lucrarea [8], în cazul că formula (4) are gradul de exactitate cel puțin $n = n_1 + n_2 - 1$, unde $n_1 = r_1 + r_2 + \dots + r_m$, $n_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$, pentru coeficienții formulei de cuadratură (4) se găsesc expresiile

$$A_{i,k} = \frac{1}{k! (r_i - k - 1)!} \varphi_i^{(r_i - k - 1)}(x_i) \quad (7)$$

$$B_{v,\mu} = \frac{1}{\mu! (\alpha_v - \mu - 1)!} \psi_v^{(\alpha_v - \mu - 1)}(a_v). \quad (8)$$

Coeficienții formulei de cuadratură (4) mai pot fi aflați dacă în integrala (1) se înlocuiește funcția $f(x)$ prin polinomul de interpolare al lui Lagrange—Hermite relativ la această funcție și nodurile x_i și a_v care intervin în formulă. Pentru aceasta credem că este utilă expresia dată pentru acest polinom în lucrarea [7].

Restul $R(f)$ al formulei (4) poate fi exprimat cu ajutorul unei diferențe divizate astfel

$$R(f) = \frac{1}{A} \int_a^b p(x) l(x) \omega(x) \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_s, x_1, x_2, \dots, x_m, x; f \\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, r_1, r_2, \dots, r_m, 1 \end{matrix} \right] dx.$$

2. Ne punem acum problema alegerii nodurilor x_i astfel încît formula de cuadratură (4) să aibă gradul de exactitate maxim. După cum am arătat în lucrarea [5], pentru aceasta e necesar și suficient ca polinomul $l(x)$ să fie ortogonal în (a, b) cu orice polinom de gradul $p - 1$, unde p este numărul numerelor impare din șirul $r_1, r_2, \dots, r_m$.

Tot în lucrare [5] am demonstrat că dacă r_i sînt numere impare date, atunci sistemul următor

$$\int_a^b p(x) \omega(x) l(x) x^i dx = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m - 1),$$

care exprimă proprietatea de ortogonalitate de mai sus, are totdeauna cel puțin o soluție reală în $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$.

În cazul acesta, presupunînd că $f(x)$ admite pe (a, b) derivată de ordinul $n + m - 1$, restul formulei de cuadratură (4) poate fi exprimat astfel

$$R(f) = \frac{f^{(n+m-1)}(\xi)}{(n+m-1)!} \int_a^b \frac{1}{A} \omega(x) l(x) h(x) dx,$$

unde

$$h(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m), \quad a < \xi < b.$$

3. În cazul $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 1$ polinomul $u(x)$ de gradul m , care are ca rădăcini pe $x_1, x_2, \dots, x_m$ se poate găsi cu ajutorul unei binecunoscute formule a lui Christoffel.

Formula de cuadratură corespunzătoare acestui caz are forma

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^m A_i f(x_i) + \sum_{j=1}^s \sum_{k=0}^{\alpha_j-1} B_{j,k} f^{(k)}(a_j) + \rho(f). \quad (9)$$

Să ne ocupăm acum de calculul coeficienților acestei formule. Dacă în ea înlocuim

$$f(x) = \frac{h_i(x) \omega(x)}{h_i(x_i) \omega(x_i)},$$

unde

$$h_i(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_m),$$

pentru coeficienții A_i se obțin formulele

$$A = \int_a^b p(x) \frac{h_i(x) \omega(x)}{h_i(x_i) \omega(x_i)} dx = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x) h(x) dx}{(x - x_i) h'(x_i) \omega(x_i)}. \quad (10)$$

Ceilalți coeficienți $B_{i,k}$ se calculează cu ajutorul formulelor amintite la nr. 1.

Coeficienții A_i se mai pot exprima prin formulele

$$A_i = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{\omega(x_i)} \left(\frac{h_i(x)}{h_i(x_i)} \right)^2 dx,$$

de unde rezultă că ei sînt pozitivi. Ceilalți coeficienți $B_{i,k}$ pot fi și negativi, după cum se poate constata pe unele exemple simple.

Să notăm cu $\{\hat{h}_m(x)\}$ șirul de polinoame orto-normat relativ la intervalul (a, b) și funcția pondere $q(x) = \omega(x)p(x)$.

Dacă se aplică acestui șir formula lui Christoffel—Darboux, se găsește

$$K_{m-1}(t, x) = \sqrt{\lambda_m} \frac{\hat{h}_m(t) \hat{h}_{m-1}(x) - \hat{h}_m(x) \hat{h}_{m-1}(t)}{t - x}, \quad (12)$$

unde

$$K_{m-1}(t, x) = \sum_{i=0}^{m-1} \hat{h}_i(t) \hat{h}_i(x),$$

iar

$$\lambda_m = \left(\int_a^b p(x) h_m^2(x) dx \right) : \left(\int_a^b p(x) h_{m-1}^2(x) dx \right).$$

Înmulțind cu $\omega(t)p(t)$ ambii membri ai formulei (12) și integrînd de la a la b se obține

$$\int_a^b p(t) \omega(t) K_{m-1}(t, x) dx = \sum_{i=0}^{m-1} \hat{h}_i(x) \int_a^b p(t) \omega(t) \hat{h}_i(t) dt = 1.$$

Rezultă că avem

$$\int_a^b p(t) \omega(t) \frac{\hat{h}_m(t) \hat{h}_{m-1}(x) - \hat{h}_m(x) \hat{h}_{m-1}(t)}{t - x} dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}.$$

Rădăcinile polinomului $h_m(x)$ fiind $x_1, x_2, \dots, x_m$, prin înlocuirea de mai sus a lui x cu x_i se obține

$$\int_a^b \frac{p(t) \omega(t) \hat{h}_m(t)}{t - x_i} dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m} \hat{h}_{m-1}(x_i)}.$$

Ținînd seama de acest rezultat, formulele (10) ne conduc la următoarele evaluări pentru coeficienții A_i

$$A_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m} \hat{h}_m(x_i) \hat{h}_{m-1}(x_i)}.$$

Aceste formule explicite credem că sînt utile pentru calculul practic al coeficienților A_i din formula de cuadratură (9).

În cazul $n_2 = 0$ formula (9) se reduce la formula clasică a lui Gauss

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^m A_i f(x_i) + r(f),$$

unde, pe baza formulelor date de noi mai sus, avem

$$A_i = \frac{2}{n P'_m(x_i) P_{m-1}(x_i)}, \quad r(f) = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \frac{[n!]^4}{[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi)$$

$P_n(x)$ fiind polinomul lui Legendre de gradul n

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \left[(x^2 - 1)^n \right]^{(n)}.$$

Catedra de analiză

BIBLIOGRAFIE

1. Christoffel, E. B., *Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben*. „Journ. f. reine u. angew. Math.“, vol. 55, 1858, pp. 61—82.
2. Markov, A. A., *Iscislenie konec noi raznostei*, 1911.
3. Stancu, D. D., *Generalizarea formulei de cuadratură a lui Gauss—Christoffel*, „Studii și cercet. șt. Iași“, vol. 8, 1957, pp. 1—18.
4. Stancu, D. D., *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate*. „Comunicările Acad. R.P.R.“, vol. 8, 1958, nr. 4, pp. 349—358.
5. Stancu, D. D., *Sur quelques formules générées de quadrature du type Gauss—Christoffel*. „Mathematica“, 1 (24), 1959, pp. 167—182.
6. Popoviciu, T., *Asupra unei generalizări a formulei de cuadratură a lui Gauss*. „Studii și cercet. șt. Iași“, 1955, vol. 6, pp. 29—57.
7. Stancu, D. D., *Asupra formulei de interpolare a lui Hermite și a unor aplicații ale acesteia*. „Studii și cercet. Cluj“, 1957, pp. 339—355.
8. Stancu, D. D., *Asupra unor formule generale de integrare numerică*, „Studii și cercet. Acad. R.P.R.“, vol. 9, nr. 1, 1958, pp. 209—216.

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОЙ ОБЩЕЙ
ФОРМУЛЫ КВАДРАТУРЫ
(Краткое содержание)

Рассматривается одна общая формула квадратуры, содержащая некоторые неподвижные узлы, а также приводятся некоторые формулы, пригодные для вычисления её коэффициентов.

SUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS D'UNE FORMULE GÉNÉRALE
DE QUADRATURE
(Résumé)

On considère une formule générale de quadrature qui contient des noeuds fixes et l'on indique des formules pouvant servir au calcul de ses coefficients.

DELIMITAREA ERORII PROCEDEULUI DE ORDINUL
AL CINCILEA A LUI KUTTA DE INTEGRARE NUMERICĂ
A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

de

F. COȚIU și A. COȚIU

În această lucrare vom da o delimitare a erorii, pentru primul pas al rețelei de integrare, a procedului de ordinul al cincilea de exactitate [4] a lui K u t t a. Pentru aceasta, folosim un procedeu de lucru datorit lui B i e r b a c h [3]. Vom face de asemenea o comparație între delimitarea erorii procedului lui K u t t a și aceea a procedului lui N y s t r ö m, de același ordin de exactitate, stabilită cu altă ocazie [5], din care va rezulta că procedul lui N y s t r ö m este preferabil, în aplicații, procedului lui K u t t a.

1. Să considerăm ecuația diferențială de ordinul întâi

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

cu condiția inițială $y(x_0) = y_0$.

Asupra funcției $f(x, y)$ care figurează în membrul al doilea al ecuației diferențiale (1), se fac ipoteze care să asigure existența și unicitatea soluției $y(x)$, a ecuației diferențiale pe intervalul închis și finit $[x_0, x]$.

2. În 1901, K u t t a [11], folosind metoda lui R u n g e [12] a stabilit pe lângă procedee de ordin mai mic, și un procedeu de ordinul al cincilea de exactitate de integrare numerică a ecuației diferențiale (1), care folosește valorile funcției $f(x, y)$ pe șase noduri ale rețelei de integrare.

3. Procedul lui K u t t a, de ordinul al cincilea de exactitate de integrare numerică a ecuației diferențiale (1), are forma

$$y_1(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{144} (17k_1 + 100k_3 + 2k_4 - 50k_5 + 75k_6), \quad (2)$$

cu notațiile

$$k_1 = f(x_0, y_0),$$

$$k_2 = f\left[x_0 + \frac{1}{5}(x - x_0), y_0 + \frac{1}{5}k_1(x - x_0)\right],$$