

EXPRESIA RESTULUI ÎN UNELE FORMULE DE DERIVARE PARȚIALĂ NUMERICĂ

DE

D. D. STANCU

(Cluj)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică, organizat de Institutul de calcul al Academiei R.P.R. și de Soc. științelor matematice și fizice din R.P.R., între 8-13 dec. 1960, Cluj.

1. Să considerăm o funcție de două variabile, $f(x, y)$, care are pe dreptunghiul $D[a \leq x \leq b; c \leq y \leq d]$ derivatele parțiale de toate ordinele care intervin în această lucrare, cel puțin pe punctele pe care ele vor interveni în mod efectiv.

Fie $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$, $m+1$ puncte distincte din $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$, $n+1$ puncte distincte din $[\gamma, \delta] \subset [c, d]$.

Să notăm cu $P_{m,n}(f; x, y)$ polinomul de gradul m în raport cu x și de gradul n în raport cu y care coincide cu funcția $f(x, y)$ pe nodurile $M_{i,k}(x_i, y_k)$ ($i = \overline{1, m+1}$; $k = \overline{1, n+1}$). Se știe că formula de interpolare (cu rest), corespunzătoare, are următoarea formă

$$f(x, y) = P_{m,n}(f; x, y) + R_{m,n}(f; x, y), \quad (1)$$

restul avînd expresia

$$\begin{aligned} R_{m,n}(f; x, y) = & u(x) [x, x_1, x_2, \dots, x_{m+1}; f(t, y)] + \\ & + v(y) [y, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; f(x, \tau)] - \\ & - u(x) v(y) \left[\begin{matrix} x, x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \\ y, y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \end{matrix}; f(t, \tau) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

unde

$$u(x) = \prod_{i=1}^{m+1} (x - x_i), \quad v(y) = \prod_{k=1}^{n+1} (y - y_k), \quad (3)$$

iar

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v+1}; \varphi(t)] = \sum_{i=1}^{v+1} \frac{\varphi(\alpha_i)}{\omega'_1(\alpha_i)},$$

$$\left[\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v+1} \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\mu+1} \end{matrix}; \Phi(t, \tau) \right] = \sum_{i=1}^{v+1} \sum_{k=1}^{\mu+1} \frac{\Phi(\alpha_i, \beta_k)}{\omega'_1(\alpha_i) \omega'_2(\beta_k)},$$

$$\left(\omega_1(x) = \prod_{i=1}^{v+1} (x - \alpha_i), \omega_2(y) = \prod_{k=1}^{\mu+1} (y - \beta_k) \right)$$

sînt diferențele divizate, respectiv de ordinele v și (v, μ) ale funcțiilor $\varphi(t)$ și $\Phi(t, \tau)$. Menționăm că în cazul diferențelor divizate, de la (2), relațiile la o singură variabilă, valorile x, x_i se referă la variabila t din $f(t, y)$, iar valorile y, y_k la variabila τ din $f(x, \tau)$.

După cum se știe, polinomul de interpolare $P_{m,n}(f; x, y)$ poate fi pus, de exemplu, fie sub forma lui Lagrange

$$L_{m,n}(f; x, y) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{u(x)}{(x-x_i)u'(x_i)} \frac{v(y)}{(y-y_k)v'(y_k)} f(x_i, y_k), \quad (4)$$

fie sub forma lui Newton

$$N_{m,n}(f; x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n u_i(x) v_k(y) \left[\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{i+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{k+1} \end{matrix}; f(t, \tau) \right], \quad (5)$$

unde

$$u_i(x) = \prod_{v=1}^i (x - x_v), \quad v_k(y) = \prod_{\mu=1}^k (y - y_\mu). \quad (6)$$

2. În vederea stabilirii unor formule de derivare parțială numerică, adică ale unor formule care permit să se calculeze în mod aproximativ valorile, pe anumite puncte, ale unor derivate parțiale ale funcției $f(x, y)$, printr-o combinație lineară a valorilor funcției pe nodurile $M_{i,k}(x_i, y_k)$, vom putea pleca de la formula de interpolare (1).

Astfel, dacă $0 \leq p \leq m$, $0 \leq q \leq n$ și derivăm formula (1) de p ori în raport cu x și de q ori în raport cu y , obținem

$$\frac{\partial^{p+q} f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} = P_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y) + R_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y), \quad (7)$$

unde

$$P_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y) = \frac{\partial^{p+q} P_{m,n}(f; x, y)}{\partial x^p \partial y^q}, \quad R_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y) = \frac{\partial^{p+q} R_{m,n}(f; x, y)}{\partial x^p \partial y^q}. \quad (8)$$

Presupunînd acum, de exemplu, că polinomul de interpolare considerat are expresia (5), se găsește că

$$P_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n u_i^{(p)}(x) v_k^{(q)}(y) \left[\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{i+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{k+1} \end{matrix}; f(t, \tau) \right]. \quad (9)$$

3. O problemă principală care se ridică relativ la formula de derivare parțială numerică (7) este problema unei evaluări avantajoase — din punct de vedere practic — a restului $R_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y)$.

În paragraful al doilea din lucrarea [1] am încercat să evaluez în acest sens restul unor formule de tipul (7). Formulele care au fost date necesită însă o precizare a domeniilor lor de valabilitate, căci acolo am avut unele scăpări, deoarece m-am bazat pe unele rezultate eronate din cazul funcțiilor de o variabilă.

Să ne propunem a evalua mai întâi $R_{m,n}^{(p,0)}(f; x, y)$. Dacă ținem seama că

$$u(x)v(y) \left[\begin{matrix} x, x_1, \dots, x_{m+1} \\ y, y_1, \dots, y_{n+1} \end{matrix}; f(t, \tau) \right] = \\ = v(y) \left[y, y_1, \dots, y_{n+1}; v(x) \left[x, x_1, \dots, x_{m+1}; f(t, \tau) \right] \right],$$

folosim notația

$$u(x) \left[x, x_1, x_2, \dots, x_{m+1}; f(t, \tau) \right] = \Phi(x, \tau) \quad (10)$$

și avem în vedere formulele (2) și (8), găsim că

$$R_{m,n}^{(p,0)}(f; x, y) = \frac{\partial^p \Phi(x, y)}{\partial x^p} + v(y) \left[y, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^p} \right] - \\ - v(y) \left[y, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^p \Phi(x, \tau)}{\partial x^p} \right]. \quad (11)$$

Să presupunem că lui y i-am dat o valoare fixă $\bar{y} \in D$. În cele ce urmează ne vom folosi de funcția auxiliară

$$\varphi(x) = \varphi(x; \bar{y}) = u(x) \left\{ \left[x, x_1, \dots, x_{m+1}; f(t, \bar{y}) \right] - \right. \\ \left. - v(\bar{y}) \left[\begin{matrix} x, x_1, \dots, x_{m+1} \\ y, y_1, \dots, y_{n+1} \end{matrix}; f(t, \tau) \right] \right\} - \alpha u(x) = \\ = \Phi(x, \bar{y}) - v(\bar{y}) \left[\bar{y}, y_1, \dots, y_{n+1}; \Phi(x, \tau) \right] - \alpha u(x), \quad (12)$$

unde α este o constantă. Deoarece $\varphi(x_i) = 0$ ($i = \overline{1, m+1}$), prin aplicarea succesivă a teoremei lui Rolle se constată că derivata parțială de ordinul p a lui $\varphi(x)$

$$\varphi^{(p)}(x) = \frac{\partial^p \Phi(x, \bar{y})}{\partial x^p} - v(\bar{y}) \left[\bar{y}, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^p \Phi(x, \tau)}{\partial x^p} \right] - \alpha u^{(p)}(x) \quad (13)$$

are cel puțin $m - p + 1$ rădăcini reale, distincte și cuprinse în cel mai mic interval deschis, I_1 , care conține punctele $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$. Dacă $x = t$ se află în afara lui I_1 atunci se poate determina α astfel încît $\varphi^{(p)}(t) = 0$, căci atunci $u^{(p)}(t) \neq 0$; α fiind determinat în acest fel, $\varphi^{(p)}(x)$ va avea $m + 2 - p$ rădăcini reale și distincte, ceea ce ne permite să tragem con-

cluzia că în acest caz derivata de ordinul $m+1-p$ a lui $\varphi^{(p)}(x)$ se va anula într-un punct ξ care se află în cel mai mic interval deschis J_1 care conține punctele $t, x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$:

$$[\varphi^{(p)}(x)]_{x=\xi}^{(m+1-p)} = \varphi^{(m+1)}(\xi) = 0. \quad (14)$$

Ținând seama că

$$\varphi^{(m+1)}(x) = \frac{\partial^{m+1}\Phi(x, \bar{y})}{\partial x^{m+1}} - v(\bar{y}) \left[\bar{y}, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1}\Phi(x, \tau)}{\partial x^{m+1}} \right] - \alpha u^{(m+1)}(x)$$

și că derivata de ordinul $m+1$ pe punctul $(x, \bar{y})$ a formulei de interpolare (1), care poate fi scrisă sub forma

$$f(x, y) = P_{m,n}(f; x, y) + \Phi(x, y) + v(y)[y, y_1, \dots, y_{n+1}; f(x, y) - \Phi(x, y)],$$

este

$$\frac{\partial^{m+1}f(x, y)}{\partial x^{m+1}} = \frac{\partial^{m+1}\Phi(x, y)}{\partial x^{m+1}} + v(\bar{y}) \left[\bar{y}, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1}f(x, \tau)}{\partial x^{m+1}} - \frac{\partial^{m+1}\Phi(x, \tau)}{\partial x^{m+1}} \right]$$

prin efectuarea diferenței acestor două derivate obținem

$$\frac{\partial^{m+1}f(x, \bar{y})}{\partial x^{m+1}} - \varphi^{(m+1)}(x) = v(\bar{y}) \left[\bar{y}, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1}f(x, \tau)}{\partial x^{m+1}} \right] + \alpha(m+1)!$$

Punând aici $x = \xi$ și ținând seama de (14), putem deduce de aici valoarea lui α :

$$\alpha = \frac{1}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}f(\xi, \bar{y})}{\partial \xi^{m+1}} - \frac{v(\bar{y})}{(m+1)!} \left[\bar{y}, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1}f(\xi, \tau)}{\partial \xi^{m+1}} \right].$$

Dacă înlocuim această valoare a lui α în $\varphi^{(p)}(t) = 0$, primim

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^p \Phi(t, \bar{y})}{\partial t^p} - v(\bar{y}) \left[\bar{y}, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^p \Phi(t, \tau)}{\partial t^p} \right] - \\ & - \frac{u^{(p)}(t)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}f(\xi, \bar{y})}{\partial \xi^{m+1}} + \frac{u^{(p)}(t)v(\bar{y})}{(m+1)!} \left[\bar{y}, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1}f(\xi, \bar{y})}{\partial \xi^{m+1}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Făcând în (11) $y = \bar{y}$ și ținând seama de această egalitate, restul (11) devine

$$\begin{aligned} R_{m,n}^{(p,0)}(f; x, \bar{y}) &= \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}f(\xi, \bar{y})}{\partial \xi^{m+1}} + v(\bar{y}) \left[\bar{y}, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^p f(x, \tau)}{\partial x^p} \right] - \\ & - \frac{u^{(p)}(x)v(\bar{y})}{(m+1)!} \left[\bar{y}, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1}f(\xi, \tau)}{\partial \xi^{m+1}} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

sau

$$\begin{aligned} R_{m,n}^{(p,0)}(f; x, y) &= \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}f(\xi, \bar{y})}{\partial \xi^{m+1}} + \\ & + v(\bar{y}) \left[\bar{y}, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^p f(x, \tau)}{\partial x^p} - \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}f(\xi, \tau)}{\partial \xi^{m+1}} \right]. \end{aligned}$$

Aplicând formula de medie a diferențelor divizate și punând y în loc $\bar{y}$, obținem în definitiv

$$\begin{aligned} R_{m,n}^{(p,0)}(f; x, y) &= \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}f(\xi, y)}{\partial \xi^{m+1}} + \frac{v(y)}{(n+1)!} \frac{\partial^{p+n+1}f(x, \eta)}{\partial x^p \partial \eta^{n+1}} - \\ & - \frac{u^{(p)}(x)v(y)}{(m+1)!(n+1)!} \frac{\partial^{m+n+2}f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{m+1} \partial \eta^{n+1}}. \end{aligned} \quad (16)$$

unde $\xi \in J_1$ și $\eta \in J_2$ — acesta din urmă fiind cel mai mic interval care conține punctele $y, y_1, \dots, y_{n+1}$.

După cum s-a putut vedea, formula aceasta e valabilă în cazul când x nu aparține intervalului deschis I_1 , iar y e un număr real oarecare din $[c, d]$.

În mod analog se stabilește formule

$$\begin{aligned} R_{m,n}^{(0,q)}(f; x, y) &= \frac{u(x)}{(m+1)!} \frac{\partial^{q+m+1}f(\xi, y)}{\partial \xi^{m+1} \partial y^q} + \frac{v(y)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}f(x, \eta)}{\partial \eta^{n+1}} - \\ & - \frac{u(x)v(y)}{(m+1)!(n+1)!} \frac{\partial^{m+n+2}f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{m+1} \partial \eta^{n+1}}, \end{aligned} \quad (17)$$

unde $\xi \in J_1$ și $\eta \in J_2$. Această formulă e valabilă în cazul când x e oarecare din $[a, b]$, iar y nu aparține celui mai mic interval deschis, I_2 , care conține nodurile $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$.

4. Pentru a da o evaluare analoagă cu cele precedente pentru restul formulei de derivare parțială numerică (7), să plecăm de la formula pe care am stabilit-o mai sus

$$\frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^p} = P_{m,n}^{(p,0)}(f; x, y) + R_{m,n}^{(p,0)}(f; x, y). \quad (18)$$

Derivând-o de q ($0 \leq q \leq n$) ori, în raport cu y , se obține o formulă de forma (7), unde pe baza formulei (15) putem scrie

$$\begin{aligned} R_{m,n}^{(p,0)}(f; x, y) &= \frac{\partial^q}{\partial y^q} R_{m,n}^{(p,0)}(f; x, y) = \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{m+q+1}f(\xi, y)}{\partial \xi^{m+1} \partial y^q} + \\ & + \frac{\partial^q}{\partial y^q} \left(v(y) \left[y, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^p} \right] \right) - \\ & - \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!} \frac{\partial^q}{\partial y^q} \left(v(y) \left[y, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1}f(\xi, y)}{\partial \xi^{m+1}} \right] \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Să-i dăm lui x o valoare fixă $\bar{x} \in I_1$; atunci pentru ξ va corespunde o valoare $\bar{\xi}$.

Pentru a găsi o evaluare convenabilă pentru restul (18), să introducem următoarea funcție auxiliară

$$\psi(y) = \psi(\bar{x}; y) = v(y) \left[y, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^p f(\bar{x}, y)}{\partial x^p} \right] - \frac{u^{(p)}(\bar{x})v(y)}{(m+1)!} \left[y, y_1, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1} f(\bar{\xi}, y)}{\partial \xi^{m+1}} \right] - \beta v(y), \quad (20)$$

unde β e o constantă.

Deoarece $\psi(y_k) = 0$ ($k = 1, n+1$), rezultă că derivata $\psi^{(q)}(y)$ va avea $n+1-q$ rădăcini reale, distincte și cuprinse în intervalul deschis cel mai mic I_2 care conține punctele $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$.

Dacă τ este un punct din afara intervalului I_2 , atunci vom putea determina pe β astfel încît $\psi^{(q)}(\tau) = 0$; β fiind determinat în acest mod, rezultă că $\psi^{(q)}(y)$ va avea $n+2-q$ rădăcini reale și distincte. În acest caz derivata de ordinul $n+1-q$ a lui $\psi^{(q)}(y)$ se va anula într-un punct η situat în cel mai mic interval deschis J_2 care conține punctele $y, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$

$$[\psi^{(q)}(y)]_{y=\eta}^{(n+1-q)} = \psi^{(n+1)}(\eta) = 0. \quad (21)$$

Dacă introducem notațiile

$$g(y) = v(y) \left[y, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^p f(\bar{x}, y)}{\partial x^p} \right], \quad (22)$$

$$h(y) = v(y) \left[y, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1} f(\bar{\xi}, y)}{\partial \xi^{m+1}} \right] \quad (23)$$

și calculăm derivata de ordinul $n+1$ a funcției (20), obținem

$$\psi^{(n+1)}(y) = g^{(n+1)}(y) - \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)!} h^{(n+1)}(y) - \beta(n+1)!. \quad (24)$$

Să derivăm acum de $n+1$ ori, în raport cu y , formula de la (18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{p+n+1} f(x, y)}{\partial x^p \partial y^{n+1}} &= \frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} R_{m,n}^{(p,0)}(f; x, y) = \\ &= \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+n+2} f(\bar{\xi}, y)}{\partial \xi^{m+1} \partial y^{n+1}} + g^{(n+1)}(y) - \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!} h^{(n+1)}(y). \end{aligned} \quad (25)$$

Punînd aici $x = \bar{x}$, $\xi = \bar{\xi}$ și scăzînd membru cu membru formulele (24) și (25), obținem

$$\frac{\partial^{p+n+1} f(\bar{x}, y)}{\partial x^p \partial y^{n+1}} - \psi^{(n+1)}(y) = \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+n+2} f(\bar{\xi}, y)}{\partial \xi^{m+1} \partial y^{n+1}} + \beta(n+1)!.$$

Făcînd în această $y = \eta$ și ținînd seama de (21), deducem că

$$\beta = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{p+n+1} f(\bar{x}, \eta)}{\partial x^p \partial y^{n+1}} - \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+n+2} f(\bar{\xi}, \eta)}{\partial \xi^{m+1} \partial \eta^{n+1}}.$$

Înlocuind această valoare a lui β în $\psi^{(q)}(\tau) = 0$, adică în

$$\psi^{(q)}(\tau) = g^{(q)}(\tau) - \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)!} h^{(q)}(\tau) - \beta v^{(q)}(\tau) = 0,$$

obținem

$$\begin{aligned} \psi^{(q)}(\tau) &= g^{(q)}(\tau) - \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)!} h^{(q)}(\tau) - \frac{v^{(q)}(\eta)}{(n+1)!} \frac{\partial^{p+n+1} f(\bar{x}, \eta)}{\partial x^p \partial \eta^{n+1}} + \\ &+ \frac{u^{(p)}(\bar{x})v^{(q)}(\tau)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+n+2} f(\bar{\xi}, \eta)}{\partial \xi^{m+1} \partial \eta^{n+1}} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Să ținem seama că atunci cînd $x = \bar{x}$ avem $\xi = \bar{\xi}$ și cînd folosim notațiile (22) și (23) restul (19) se scrie

$$\begin{aligned} R_{m,n}^{(p,q)}(f; \bar{x}, y) &= \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+q+1} f(\bar{\xi}, y)}{\partial \xi^{m+1} \partial y^q} + \\ &+ g^{(q)}(y) - \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)!} h^{(q)}(y). \end{aligned} \quad (27)$$

Dacă se scad membru cu membru egalitățile (26) și (27) și se înlocuiesc apoi $\bar{x}$ cu x și $\bar{\xi}$ cu ξ , obținem tocmai formula pe care voiam s-o stabilim

$$\begin{aligned} R_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y) &= \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+q+1} f(\xi, y)}{\partial \xi^{m+1} \partial y^q} + \\ &+ \frac{v^{(q)}(y)}{(n+1)!} \frac{\partial^{p+n+1} f(x, \eta)}{\partial x^p \partial \eta^{n+1}} - \frac{u^{(p)}(x)v^{(q)}(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+n+2} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{m+1} \partial \eta^{n+1}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Aici ξ și η aparțin respectiv intervalelor J_1 și J_2 adică celor mai mici intervale deschise care conțin punctele $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$, respectiv $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$. După cum s-a putut vedea din demonstrație, ξ și η sînt aceiași în toți trei termenii de mai sus.

Din cele ce preced s-a putut de asemenea constata că restul formulei de derivare parțială numerică (7) poate fi pus sub forma remarcabilă de la (28), în cazul cînd x și y sînt respectiv în afara intervalelor I_1 și I_2 , adică a celor mai mici intervale deschise care conțin punctele $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$, respectiv $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$.

Formula (28) reprezintă extinderea la două variabile a unei formule necunoscute a lui J. F. Steffensen [2].

Observații. Se poate constata că formula (28) poate să aibă loc și în anumite cazuri când $x \in I_1$ și $y \in I_2$; și anume: ea ar putea să subziste dacă am putea garanta¹⁾ că x nu coincide cu niciuna din cele $m - p + 1$ rădăcini reale și distincte ale funcției $\varphi^{(p)}(x)$ de la (13), iar y nu ar coincide cu nici una din cele $n - q + 1$ rădăcini reale și distincte ale funcției $\psi^{(q)}(y)$ de la (26). Ne putem convinge fără greutate că această situație are loc:

1°. dacă $x \in I_1$ și $y \in I_2$, căci chiar în aceste ipoteze am stabilit formula (28),

2°. dacă numerele p și q iau valorile 0 sau 1, iar x coincide cu unul din punctele x_i , când $p = 1$ și y coincide cu unul din punctele y_k , când $q = 1$.

Într-adevăr, să presupunem de exemplu că $p = 1$ și $q = 1$. Rădăcinile lui $\varphi'(x)$ aflându-se între punctele vecine din șirul $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$, iar rădăcinile lui $\psi'(y)$ aflându-se între punctele vecine din șirul $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$, atunci când x coincide cu un x_i , sau y coincide cu un y_k , e înlăturat inconvenientul ca x să cadă peste o rădăcină a lui $\varphi'(x)$ și ca y să cadă peste o rădăcină a lui $\psi'(y)$.

3°. Se mai poate constata că restul formulei (7) mai poate fi pus sub forma simplă a unei sume de trei termeni dacă facem următoarele ipoteze:

- a) p și q sînt numere impare,
- b) $m = 2m' + 1$, $n = 2n' + 1$ și în loc de $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ avem $0, \pm b_1, \pm b_2, \dots, \pm b_{m'}$, iar în loc de $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ avem $0, \pm c_1, \pm c_2, \dots, \pm c_{n'}$,
- c) derivata $\frac{\partial^{2m'+2n'+2} f(x, y)}{\partial x^{2m'+1} \partial y^{2n'+1}}$ e continuă când $x \in I_1$ și $y \in I_2$.

Să presupunem, pentru simplificare, că $x = y = 0$.

Pentru demonstrația afirmației noastre se folosește funcția auxiliară

$$h(t, \tau) = \frac{1}{4} [f(t, \tau) - f(-t, \tau) - f(t, -\tau) + f(-t, -\tau)]$$

și se ține seama de faptul că

$$R_{2m', 2n'}^{(p, q)}(f; 0, 0) = R_{2m', 2n'}^{(p, q)}(h; 0, 0).$$

4°. Încăzul când p și q sînt pari și în loc de $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ avem $0, 0, \pm b_1, \pm b_2, \dots, \pm b_m$, iar în loc de $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ avem $0, 0, \pm c_1, \pm c_2, \dots, \pm c_n$, se folosește funcția auxiliară

$$h_1(t, \tau) = \frac{1}{4} [f(t, \tau) + f(t, -\tau) + f(-t, \tau) + f(-t, -\tau)],$$

și se constată că formula (28) iarăși rămîne în vigoare.

5°. Dacă de exemplu p e impar și q par și în loc de $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ avem $0, \pm b_1, \pm b_2, \dots, \pm b_m$, iar în loc de $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ avem $0, 0, \pm c_1, \pm c_2, \dots, \pm c_n$, pentru a demonstra că restul formulei de

¹⁾ Așa după cum a atras atenția, în cazul unei singure variabile, M. L. Brodski [3].

derivare parțială numerică poate fi pus sub forma unei sume de trei termeni se poate folosi funcția ajutătoare

$$h_2(t, \tau) = \frac{1}{4} [f(t, \tau) - f(-t, \tau) + f(t, -\tau) - f(-t, -\tau)].$$

Într-o lucrare viitoare, care este în curs de elaborare, vom prezenta un studiu amănunțit al formulelor de derivare parțială numerică care folosesc și noduri multiple. De asemenea vom prezenta o evaluare a restului acestor formule și în cazurile când nu se fac ipoteze de felul acelor din lucrarea de față.

ВЫРАЖЕНИЕ ОСТАТКА В НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ЧИСЛЕННОГО ЧАСТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Для остатка формулы численного частного дифференцирования (7) дается оценка (28), верная в том случае, когда x и y находятся вне наименьших открытых интервалов I_1 и I_2 , содержащих точки $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$, соответственно $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$. Этот результат представляет собой распространение на две переменных одного хорошо известного результата Стеффенсена [2].

В статье даются и некоторые частные случаи, в которых формула (28) верна также если $x \in I_1$, и $y \in I_2$. Результаты представленные в настоящей статье уточняют области достоверности некоторых оценок, данных в труде [1].

L'EXPRESSION DU RESTE DANS QUELQUES FORMULES DE DÉRIVATION PARTIELLE NUMÉRIQUE

RÉSUMÉ

Pour le reste de la formule de dérivation partielle numérique (7) on donne l'évaluation (28), valable au cas où x et y sont en dehors des plus petits intervalles ouverts I_1 et I_2 qui contiennent les points $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$, respectivement $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$. Ce résultat représente l'extension à deux variables d'un résultat bien connu de J. Steffensen [2].

On indique aussi quelques cas particuliers où la formule (28) est valable également si $x \in I_1$ et $y \in I_2$. Les résultats de ce travail précisent les domaines de valabilité de certaines évaluations données dans le travail [1].

BIBLIOGRAFIE

1. D. D. Stancu, *Contribuții la derivarea parțială numerică a funcțiilor de două și mai multe variabile*. Bul. științ., Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, VIII, 4 (1956).
2. J. F. Steffensen, *Interpolation*. Baltimore, 1950.
3. М. Л. Бродский, *Об оценке остаточного члена формул численного дифференцирования*. Усп. Матем. Нук, 13, 6(84), 73—77 (1958).

Primit la 30 aprilie 1960.