

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1960

ТОМ 134

№1



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

1 сентября

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ВЫХОДЯТ ТРИ РАЗА В МЕСЯЦ

Редакционная коллегия: акад. Л. А. Арцимович, акад. А. Г. Бетехтин, акад. С. А. Векшинский, акад. Б. А. Казанский, акад. А. Н. Колмогоров (зам. главного редактора), акад. С. А. Лебедев, акад. А. И. Опарин (главный редактор), акад. Е. Н. Павловский, акад. Л. И. Седов, акад. Н. М. Страхов, акад. А. Н. Фрумкин (зам. главного редактора)

28-й ГОД ИЗДАНИЯ

1960

ТОМ 134, № 1

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

	Стр.
Н. И. Ахиезер. Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах	9
Г. Бабаев. Распределение целых точек на некоторых норменных поверхностях	13
А. В. Гладкий. О группах с k -сократимым базисом	16
К. К. Головкин. К теоремам вложения	19
Ю. М. Горчаков. Примарно факторизуемые группы	23
М. Д. Дольберг. К вопросу о решении интегрального уравнения с помощью рядов	25
В. С. Журавский. К вопросу о группе абелевых расширений абелевых групп	29
Р. П. Игнатьева. Теорема о существовании и вхождении подгрупп у конечной группы	33
Д. Р. Исбелл. Об индуктивной размерности пространств близости	36
Г. Н. Положий. Об одном численном методе решения краевых задач для уравнений в частных производных	39
Л. П. Постникова. Об одной теореме Н. М. Коробова	42
А. И. Сирота. Центры некомпактных простых групп Ли	44
Д. Д. Станку. О некоторых многочленах двух переменных типа Бернштейна и некоторых их применениях	48
З. Б. Цалюк. Замечание по поводу применения условий разрешимости задачи Чаплыгина к вопросам качественной теории уравнений	52
Л. А. Шор. Об однозначной определенности и об изгибаемости некоторых выпуклых поверхностей с краем.	55

ГИДРАВЛИКА

В. Г. Оганджаниянц и И. И. Егорова. Об устойчивости водо-нефтяного контакта в слоистых пористых средах	59
--	----

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. В. Погорелов. О закритических деформациях сжатых цилиндрических оболочек	62
---	----

ФИЗИКА

В. С. Барашенков и Сянь Дин-чан. Действительная часть амплитуды упругого рассеяния при больших энергиях	65
---	----

CONTENTS

MATHEMATICS

N. I. Akhiezer. Orthogonal polynomials on several intervals	9
G. Babaev. Distribution of integral points on certain norm surfaces	13
A. V. Gladkii. Groups with k -reducible basis	16
K. K. Golovkin. On imbedding theorems	19
Iu. M. Gorchakov. Primarily factorizable groups	23
M. D. Dol'berg. On the solution of integral equations by means of series	25
V. S. Zhuravskii. On the group of Abelian extensions of Abel groups	29
R. P. Ignatieva. Theorems stating the existence and entrance of subgroups in a finite group	33
D. R. Isbell. Inductive dimensionality of proximity spaces	36
G. N. Polozhii. A numerical method of solving boundary value problems for partial differential equations	39
L. P. Postnikova. On a Korobov's theorem	42
A. I. Sirota. Centres of non-compact simple Lie groups	44
D. D. Stanku. Some Bernstein polynomials in two variables and their applications	48
Z. B. Tsaluk. A remark concerning the application of solubility conditions in Chaplygin's problem to problems of the qualitative theory of equations	52
L. A. Shor. Uniqueness and flexibility of some edged convex surfaces	55

HYDRAULICS

V. G. Ogandzaniants, I. I. Egorova. Stability of water oil contact in stratified porous media	59
---	----

THEORY OF ELASTICITY

A. V. Pogorelov. Transcritical deformations of compressed cylindrical shells	62
--	----

PHYSICS

V. S. Barashenkov, Sian Din-Chan. The real part of the elastic scatter amplitude in the case of high energies	65
E. E. Vainstein, E. A. Zhurakovskii, V. S. Neshpor, G. V. Samsonov. The fine structure of x-ray absorption spectra and Hall's effect in vanadium silicides	68
F. I. Vilesov, A. E. Terenin. Photoelectric emission from solid layers of cyanocyanol and cyanocryptal	71
A. A. Galkin, E. A. Kaner, A. P. Koroliuk. A new type of oscillations of the ultrasound absorption coefficient in metals in a magnetic field	74
J. A. Oxman, A. V. Burlakov. Negative photodielectric effect	77

TECHNICAL PHYSICS

K. F. Kosogov, V. I. Lichtman. The effect of adsorption in reducing the strength of steels in melts	81
---	----

FROZEN GROUNDS STUDY

A. M. Pchelintsev. On the anisotropism of bulging in frozen dispersed rocks	85
---	----

CHEMISTRY

G. N. Andreev, E. V. Kukharskaia. Condensation of tetralkylsilanes in a silent high-voltage discharge of sonic frequency	89
B. A. Kazanskii, A. L. Liberman, N. I. Tiunkina. Departure of stereoisomeric 1,4-di-tert-butylcyclohexanes from Auwers-Skitts' rule	93
A. P. Kreshkov, L. N. Bykova, N. Sh. Shemet. Potentiometric method for differentiated titration of organic bases in a methylethylketone medium	96
A. N. Nesmeyanov, A. E. Borisov, N. V. Novikova. Atomic refraction of antimony	100
M. F. Shostakovskii, F. P. Sidel'kovskaia, F. L. Kolodkin. Reaction of lactams with diacetylene	102

PHYSICAL CHEMISTRY

V. V. Andreeva, E. A. Alexeeva. Thin oxide films on titanium, zirconium, molybdenum and on alloys of titanium	106
A. A. Balandin, I. D. Rozhdestvenskaia, A. A. Slinkin. The influence of varied gas treatment on the catalytic and magnetic properties of chromium oxide catalysts	110
O. V. Bogorodskii, J. S. Umanskii, S. Sh. Shilstein. The nature of the mosaic structure of germanium and silicon single crystals	114

Pages

S. E. Bresler, M. I. Mosevitskii, I. J. Poddubnyi, Shi-Guan-I. Some features of the mechanism underlying the restraining effect of complex catalysts on molecular chains in polymerization	117
A. V. Bialobozheskii, V. D. Val'kov. The effects of the semiconductor properties of oxide films on the electrochemical behaviour of metals in electrolytes when under the action of ultraviolet light	121
S. M. Kogarko, A. S. Novikov. An investigation of compression waves formed during the burning of gaseous mixtures	125
J. M. Kolotyrkin, A. N. Chemodanov. On hydrogen overvoltage upon platinum	128
V. B. Lazarev, P. P. Pugachevich. Surface tension of germanium as dependent on temperature	132
V. G. Nikol'skii, N. J. Buben. Radiothermoluminescence of organic compounds	134
B. I. Plukhin. Steady burning of condensed systems	137
L. T. Shanina. Adsorption of iodine ions on platinum and the influence of the adsorbent on the process of hydrogen ionization	141
B. N. Shelimov, N. N. Bubnov, N. V. Fok, V. V. Voevodskii. Detection of hydrogen atoms in reactions involving the phototransfer of an electron.	145

GEOGRAPHY

E. M. Lavrenko. On the Sahara-Gobi arid botanical-geographic region, and its subdivision	149
--	-----

GEOLOGY

E. P. Izokh. A subdivision diagram for the intrusions of North Sikhote'Alin and the adjacent regions on the left-bank of the Amur river	153
S. G. Neruchev. On the conditions of accumulation of coal-bearing Plinsbakh deposits in the central part of the Northern slope of the Caucasus and Ciscaucasia	157

HYDROGEOLOGY

I. G. Kissin. On the hydrodynamic and hydrochemical features of the aquifers in the Mesozoic deposits of East Ciscaucasia	160
---	-----

MINERALOGY

A. G. Zhabin, M. E. Kazakova. On the thorite from the alkali complex of the Vishnevy mountains in the Urals	164
A. A. Markushev, L. N. Khetchikov, M. I. Efimova, Kim Min Seb, Kim Chan Von, Kim Khak Dze. On a find of warwickite and paigeite in Precambrian dolomitic marbles of North Korea	168
A. S. Marfunin, S. V. Rykova. On the irrational twinning of potash feldspars	171

PALEONTOLOGY

O. S. Vialov, B. T. Golev. A contribution to the taxonomy of Paleodictyon	175
---	-----

HISTOLOGY

N. F. Grigorieva. In vivo observations on interneuronic synapses	179
K. S. Lobyntsev. Histochemistry of skeletal muscle glycogen in white mice, and its variation under physical load	183

CYTOLOGY

G. G. Tiniakov, Iu. G. Tiniakov. Spontaneous chromosome mutation in normal condition and pathology	187
I. A. Utkin, L. P. Kosichenko. The effect of keeping mice in the dark on the 24-hour periodicity of mitoses in their cornea epithelium	191

ECOLOGY

V. R. Protasov, Iu. P. Altukhov, N. D. Kovaleva. Some morpho-functional peculiarities of the transition of day-vision into crepuscular vision in certain Black Sea fish	195
---	-----

BIOPHYSICS

T. A. Detlaf, A. A. Detlaf. On dimensionless characteristics of development duration in embryology	199
--	-----

BIOCHEMISTRY

L. A. Nezgovorova. On the complex serving to fix carbonic acid in the process of photosynthesis	203
---	-----

МАТЕМАТИКА

Д. Д. СТАНКУ

О НЕКОТОРЫХ МНОГОЧЛЕНАХ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ
ТИПА БЕРНШТЕЙНА И НЕКОТОРЫХ ИХ ПРИМЕНЕНИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 IV 1960)

За последнее время большой интерес привлекло изучение многочленов

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right),$$

введенных в 1912 г. С. Н. Бернштейном ⁽¹⁾, как ввиду их замечательных свойств, так и ввиду их многочисленных применений к разнообразным проблемам математики.

Недавно были получены результаты в проблеме приближения функций двух переменных многочленами типа Бернштейна

$$B_{m,n}(f; x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{i} \binom{n}{k} x^i (1-x)^{m-i} y^k (1-y)^{n-k} f\left(\frac{i}{m}, \frac{k}{n}\right).$$

(См. ²⁻⁷).

В заметке ⁽⁸⁾ мы привели некоторые результаты относительно приближения функции $f(x, y)$, заданной и непрерывной на треугольнике Δ : $x+y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, воспользовавшись при этом многочленами типа Бернштейна степени n относительно обеих переменных:

$$B_n(f; x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} p_n^{i,j}(x, y) f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right), \quad (1)$$

где

$$p_n^{i,j}(x, y) = \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} x^i y^j (1-x-y)^{n-i-j}.$$

Многочлены (1) получены с помощью интерполяционного многочлена двух переменных Стеффенсена. К этим многочленам можно прийти более простым путем, исходя из некоторых вероятностных соображений. Для этой цели произведем n испытаний в одинаковых условиях, каждое из которых может вести к одному из несовместных событий: E_1, E_2, E_3 . Если обозначить через x, y, z соответствующие вероятности, то $x+y+z=1$. Вероятность того, что в этих n испытаниях событие E_1 произошло i раз, событие E_2 j раз, а событие E_3 $k=n-i-j$ раз, равно

$$\frac{n!}{i!j!k!} x^i y^j z^k = p_n^{i,j}(x, y).$$

Если, например, мы условимся платить некоторому игроку, производившему n испытаний, сумму $f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$, если он из всех испытаний реализует первое событие i раз, второе j раз и третье k раз, то соответствующее математическое ожидание равно $B_n(f; x, y)$.

В работе ⁽⁸⁾ мы указали порядок приближения на треугольнике Δ функции $f(x, y)$ с помощью полинома (1), именно

$$|f(x, y) - B_n(f; x, y)| \leq 2\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x, y)$

$$\omega(\delta) = \max |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|,$$

и $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ — точки из Δ , удовлетворяющие неравенству $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \leq \delta > 0$.

Показано также, что если $f(x, y)$ обладает непрерывной на Δ частной производной $\partial^{r+s} f(x, y) / \partial x^r \partial y^s$, то имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} - \frac{\partial^{r+s} B_n(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right| \leq (1 + \sqrt{1 + 2r + 2s}) \omega_{r,s} \left(\frac{1}{\sqrt{n-r-s}} \right) + \frac{(r+s)(r+s-1)}{2n} M_{r,s},$$

где $0 \leq r+s < n$, $\omega_{r,s}(\delta)$ — модуль непрерывности указанной частной производной

$$M_{r,s} = \max_{\Delta} \left| \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right|.$$

Отсюда следует, что на Δ равномерно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^{r+s} B_n(f; x, y)}{\partial x^r \partial y^s} = \frac{\partial^{r+s} f(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}.$$

Укажем на одно обобщение некоторых важных результатов Е. В. Вороновской ⁽⁹⁾ и С. Н. Бернштейна ⁽¹⁰⁾. Пусть p и q — целые неотрицательные числа. Для частного случая функций $f(t, r) = n^{p+q}(t-x)^p(r-y)^q$ получим

$$B(f(t, r); x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} (i-nx)^p (j-ny)^q p_n^{i,j}(x, y) \equiv S_{p,q}^{(n)}(x, y). \quad (2)$$

Эти многочлены играют важную роль при исследовании ошибки приближения многочленам $B_n(f; x, y)$ функции $f(x, y)$, допускающей непрерывные на Δ производные до некоторого порядка.

Для вычисления многочлена (2) установлены некоторые рекуррентные формулы. Пусть

$$g(t, r; x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} e^{(i/n-x)t + (j/n-y)r} p_n^{i,j}(x, y).$$

Легко показать, что

$$g(t, r; x, y) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=0}^v \frac{1}{n^v} \frac{S_{v-k,k}^{(n)}(x, y)}{(v-k)! k!} t^{v-k} r^k = e^{-xt-yr} [1 + x(e^{t/n} - 1) + y(e^{r/n} - 1)]^n. \quad (3)$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{\partial g}{\partial t} = x(e^{t/n} - 1) \left[(1-x)g - \frac{\partial g}{\partial t} \right] - y(e^{r/n} - 1) \left[xg + \frac{\partial g}{\partial t} \right]$$

и формулой (3), непосредственно устанавливаем рекуррентное соотношение

$$S_{p+1,q}^{(n)}(x, y) = x \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} [n(1-x) S_{p-i,q}^{(n)}(x, y) - S_{p+1-i,q}^{(n)}(x, y)] - \\ - y \sum_{j=1}^q \binom{q}{j} [nx S_{p,q-j}^{(n)}(x, y) + S_{p+1,q-j}^{(n)}(x, y)].$$

Таким же образом можно прийти ко второму рекуррентному соотношению, по форме аналогичному данному. Исходными значениями являются

$$S_{0,0}^{(n)}(x, y) = 1, \quad S_{1,0}^{(n)}(x, y) = S_{0,1}^{(n)}(x, y) = 0.$$

Применяя метод, предложенный И. П. Натансоном⁽¹¹⁾ при установлении некоторого рекуррентного соотношения для многочленов одной переменной, соответствующих многочленам (2), можно установить следующие рекуррентные соотношения:

$$S_{p+1,q}^{(n)}(x, y) = x(1-x) \left[\frac{\partial}{\partial x} S_{p,q}^{(n)}(x, y) + np S_{p-1,2}^{(n)}(x, y) \right] - \\ - xy \left[\frac{\partial}{\partial y} S_{p,q}^{(n)}(x, y) + nq S_{p,q-1}^{(n)}(x, y) \right],$$

$$S_{p,q+1}^{(n)}(x, y) = y(1-y) \left[\frac{\partial}{\partial y} S_{p,q}^{(n)}(x, y) + nq S_{p,q-1}^{(n)}(x, y) \right] - \\ - xy \left[\frac{\partial}{\partial x} S_{p,q}^{(n)}(x, y) + np S_{p-1,q}^{(n)}(x, y) \right].$$

Если $1 < p+q \leq 3$, то получим многочлены

$$S_{2,0}^{(n)}(x, y) = nx(1-x), \quad S_{1,1}^{(n)}(x, y) = -nxy, \quad S_{0,2}^{(n)}(x, y) = ny(1-y),$$

$$S_{3,0}^{(n)}(x, y) = nx(1-x)(1-2x), \quad S_{2,1}^{(n)}(x, y) = -nxy(1-2x),$$

$$S_{1,2}^{(n)}(x, y) = -nxy(1-2y), \quad S_{0,3}^{(n)}(x, y) = ny(1-y)(1-2y).$$

Многочлены (2) можно представить в виде

$$S_{p,q}^{(n)}(x, y) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{p+q}{2}\right]} A_{pq}^{(i)}(x, y) n^i,$$

где $A_{pq}^{(i)}(x, y)$ — многочлены от x и y , не зависящие от n . Тогда на Δ имеем

$$|S_{p,q}^{(n)}(x, y)| \leq C(p, q) n^{\left[\frac{p+q}{2}\right]},$$

где $C(p, q)$ не зависит от n .

На основе приведенных результатов доказывается:

Если функция $f(x, y)$ допускает на Δ ограниченные частные производные порядка $N (\geq 2)$, то имеет место асимптотическое равенство

$$B_n(f; x, y) = f(x, y) + \sum_{v=0}^N \frac{1}{n^v} \frac{S_{v-k,k}^{(n)}(x, y)}{(v-k)! k!} f_{x^v-k, y^k}^{(v)}(x, y) + \frac{\varepsilon_n}{n^s},$$

где $s = \left[\frac{N+1}{2}\right]$, а ε_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

В частном случае $N = 2$ формула сводится к

$$B_n(f; x, y) = f(x, y) + \frac{x(1-x)}{2n} f_{xx}''(x, y) - \frac{xy}{n} f_{xy}''(x, y) + \\ + \frac{y(1-y)}{2n} f_{yy}''(x, y) + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

представляющей обобщение на две переменных формулы Е. В. Вороновской⁽⁹⁾.

В случае функции $f(x, y)$, допускающей на Δ непрерывные производные до некоторого порядка, можно построить, воспользовавшись полученными результатами, многочлены, аналогичные (1), однако сходящиеся к функции $f(x, y)$ быстрее.

Университет им. В. Бабеш — Я. Болъяй
Клуж, Румыния

Поступило
30 I 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. общ., 13, 1 (1912).
- ² Е. Н. Kingsley, Proc. Am. Math. Soc., 2, № 1, 64 (1951).
- ³ И. А. Киприянов, Уч. зап. Казанск. гос. ун-в., 113, 193 (1953).
- ⁴ Р. L. Butzer, Canad. J. Math., 5, 107 (1953).
- ⁵ А. Ф. Ипатов, Уч. зап. Петрозаводск. ун-в., 4, № 4, 31 (1957).
- ⁶ А. Ф. Ипатов, Уч. зап. Петрозаводск. ун-в., 4, № 4, 49 (1957).
- ⁷ Т. P. o v i c i u, Despre cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame, Cluj, 1937.
- ⁸ D. D. Stăncu, Com. Acad. R. P. R., 9, № 8, 773 (1959).
- ⁹ Е. В. Вороновская, ДАН, А, 79 (1932).
- ¹⁰ С. Н. Бернштейн, ДАН, А, 86 (1932).
- ¹¹ И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.