

13

STUDIA UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES I FASCICULUS 1

1961

MATHEMATICA
P H Y S I C A

S E P A R A T U M

C L U J

CRONICĂ

TEOREME DE EXISTENȚĂ ASUPRA UNEI ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE

*Rezumatul disertației prezentate de DUMITRU RIPIANU pentru obținerea titlului de candidat
în științe fizico-matematice*

În lucrarea care se rezumază se consideră ecuația cu derivate parțiale de ordinul n , lineară, de tip hiperbolic

$$(1) \quad \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f + bu + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)} b_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k} \frac{\partial^k u}{\partial x_{\beta_1} \partial x_{\beta_2} \dots \partial x_{\beta_k}},$$

în care $f, b, b_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}$ sînt funcții continue de variabilele independente $x_1, x_2, \dots, x_n$ în regiunea P_n a spațiului cu n dimensiuni raportat la axele $O x_1, x_2, \dots, x_n$, determinată de relațiile

$$0 \leq x_i \leq a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

unde a_i sînt n numere pozitive. Se mai consideră hiperplanele $Q_{a_1, a_2, \dots, a_k}$ de ecuații

$$(2) \quad Q_{a_1, a_2, \dots, a_k}: x_{a_i} = \sum_{j=1}^{n-k} p_{a'_i, j}^{a_1, a_2, \dots, a_k} x_{a'_j} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, k \\ k = 1, 2, \dots, n-2 \end{matrix} \right),$$

unde coeficienții pozitivi $p_{a'_i, j}^{a_1, a_2, \dots, a_k}$ verifică condițiile

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{n-k} p_{a'_i, j}^{a_1, a_2, \dots, a_k} a_{a'_j} < a_{a_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

(4) Grupele de indici $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ din (1) și $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ din (2) parcurg toate cele C_n^k grupe de k numere care se pot alcătui cu numerele $1, 2, \dots, n$ ceea ce se va semnala prin notația $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ respectiv $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$.

Indicii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-k}$ alcătuiesc șirul de numere $1, 2, \dots, n$.

În lucrare se rezolvă referitor la ecuația (1) două probleme:

Problema A. Se determină o integrală u a ecuației (1) ale cărei derivate parțiale fără argumente repetate de ordinele $n-1, n-2, \dots, 2$ iau valori date respectiv pe hiperplanele $Q_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$, adică pe hiperplanul $Q_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$ se are

$$(5) \quad \frac{\partial^{n-k} u}{\partial x_{\alpha_1} \partial x_{\alpha_2} \dots \partial x_{\alpha_{n-k}}} = \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}(x_{\alpha_1}', x_{\alpha_2}', \dots, x_{\alpha_{n-k}}'),$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)$$

unde $\varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}(x_{\alpha_1}', x_{\alpha_2}', \dots, x_{\alpha_{n-k}}')$ sînt funcții date, continue în P_n . Derivatele parțiale de ordinul 1 ale integralei iau valori date pe n semidrepte (D_{α_i}) așezate în poliedrul pozitiv al axelor, de ecuații

$$(6) \quad (D_{\alpha_i}) : x_{\alpha_i} = f_{\alpha_i, 1}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}} x_{\alpha_1}' \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n-1 \\ \alpha_i = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right),$$

adică pe semi-dreapta (D_{α_i}) se are

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha_i}} = \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}}(x_{\alpha_1}') \quad (\alpha_i = 1, 2, \dots, n),$$

unde $\varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}}(x_{\alpha_1}')$ sînt funcții date, continue în P_n , iar $p_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}}^{\alpha_1}$ sînt coeficienți pozitivi, care verifică condițiile (3) cu $k = n-1$. Integrala u însăși ia în origine o valoare numerică dată. Dacă se notează condiția (5) cu (C_{n-k}) ($k=1, 2, \dots, n-2$), atunci condiția (7) și condiția ca u să ia în origine o valoare dată se pot nota respectiv prin (C_1) și (C_0) .

Se va însemna cu $B, B_{\beta_1}, \dots, B_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}}$ margini superioare ale valorilor absolute ale valorilor luate de funcțiile $b, b_{\beta_1}, \dots, b_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}}$ din (1) în P_n , prin N_k numerele date de relația de recurență $N_k = 1 + C_k^1 N_1 + \dots + C_k^{k-1} N_{k-1}$ ($N_1 = 1$), adică

$$N_k = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ C_2^1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ C_3^1 & C_3^2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{k-1}^1 & C_{k-1}^2 & C_{k-1}^3 & \dots & C_{k-1}^{k-2} & -1 & 1 \\ C_k^1 & C_k^2 & C_k^3 & \dots & C_k^{k-2} & C_k^{k-1} & 1 \end{vmatrix},$$

și cu $\mathcal{H}_n^k$ numărul $1 + N_1 C_n^1 + \dots + N_k C_n^k$.

În cap. I se rezolvă problema A referitor la ecuația de formă simplă

$$(8) \quad \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

iar în cap. II se rezolvă aceeași problemă referitor la ecuația (1). Se demonstrează că dacă P_n este destul de mic încît să se aibă

$$a_1 a_2 \dots a_n \left(\mathcal{H}_n^{n-1} B + \mathcal{H}_{n-1}^{n-1} \sum_{(\beta_1)} \frac{B_{\beta_1}}{a_{\beta_1}} + \dots + \mathcal{H}_1^1 \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})} \frac{B_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}}}{a_{\beta_1} a_{\beta_2} \dots a_{\beta_{n-1}}} \right) < 1,$$

atunci ecuația (1) are în P_n o integrală satisfăcînd condițiile $(C_{n-1}), (C_{n-2}), \dots, (C_0)$, cu derivate parțiale pînă la ordinul $n-1$ inclusiv (fără argumente repetate) continue în raport cu variabilele $x_1, x_2, \dots, x_n$ și că integrala în chestiune este unică. Se dă și expresia ei, construită cu ajutorul metodei aproximațiilor succesive. Expresia în chestiune se construiește cu ajutorul expresiei integralei v a ecuației (8) care verifică condițiile $(C_{n-1}), (C_{n-2}), \dots, (C_{n-k})$. Se dă un procedeu de iterație care conduce la expresia integralei v considerate.

(9) Se va înțelege prin $[H(x_1, x_2, \dots, x_n)]_{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_k}}$ expresia obținută înlocuind în funcția $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pe $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_k}$ prin expresiile lor (2) sau (6) în $x_{\alpha_1}', x_{\alpha_2}', \dots, x_{\alpha_k}'$.

Problema B. Se determină o integrală u a ecuației (1) care satisface condițiile $(C_{n-1}), (C_{n-2}), \dots, (C_2)$ și care ia valori date pe n semi-drepte (D_i) așezate în poliedrul pozitiv al axelor $Ox_1, x_2, \dots, x_n$, de ecuații

$$(D_i) : x_j = m_{j,i} x_i \left(\begin{matrix} j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right),$$

unde $m_{j,i}$ sînt coeficienți nenegativi dați, cu $m_{i,i} = 1$, adică pe semidreapta (D_i) se are

$$u = g_i(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

unde $g_i(x_i)$ sînt funcții date, cu derivate continue în P_n . Această ultimă condiție se va numi condiția U . În cap. III se rezolvă problema B referitor la ecuația (8), iar în cap. IV aceeași problemă referitor la ecuația (1). Se demonstrează că, dacă:

1°. coeficienții $m_{j,i}$ ($j \neq i$) sînt destul de mici, încît

$$a) \quad m_{j,i} < \frac{a_j}{a_i}; \quad b) \quad \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2 < 1,$$

unde α_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) sînt termenii dezvoltării determinantului

$$\begin{vmatrix} 1 & m_{2,1} & \dots & m_{n-1,1} & m_{n,1} \\ m_{1,2} & 1 & \dots & m_{n-1,2} & m_{n,2} \\ m_{1,n-1} & m_{2,n-1} & \dots & 1 & m_{n,n-1} \\ m_{1,n} & m_{2,n} & \dots & m_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix},$$

în afară de termenul 1^n dat de diagonala principală.

2°. în P_n se are $|g_i(x_i)| < G_i x_i^2, |g_i'(x_i)| < G_i' x_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$), unde G_i, G_i' sînt $2n$ constante.

3°. P_n este destul de mic încît să se aibă

$$a_1 a_2 \dots a_n \left(B \mathcal{H}_n^{n-2} + \mathcal{H}_{n-1}^{n-2} \sum_{(\beta_1)} \frac{B_{\beta_1}}{a_{\beta_1}} + \mathcal{H}_{n-2}^{n-2} \sum_{(\beta_1, \beta_2)} \frac{B_{\beta_1, \beta_2}}{a_{\beta_1} a_{\beta_2}} + \dots \right. \\ \left. + \mathcal{H}_1^n \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})} \frac{B_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}}}{a_{\beta_1} a_{\beta_2} \dots a_{\beta_{n-1}}} \right) + \frac{\sum_{i=1}^n \left[a_i \sum_{j=1}^n \delta_{j,i} (B a_i R_j + B_i R'_j) \right]}{1 - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2} < 1,$$

unde $\delta_{j,i}$, R_j , R'_j sînt anumite expresii în a_i și $m_{j,i}$ definite în lucrare, atunci ecuația (1) are în P_n o integrală satisfăcînd condițiile (C_{n-1}) , (C_{n-2}) , ..., (C_2) și U cu derivate parțiale pînă la ordinul $n-1$ inclusiv (fără argumente repetate) continue în raport cu $x_1, x_2, \dots, x_n$. Se dă și aici expresia integralei în chestiune, construită cu ajutorul metodei aproximațiilor succesive. Cu acest prilej se integrează un sistem de ecuații funcționale care generalizează un sistem de două ecuații funcționale întîlnit de Emile Picard.

În cap. V și ultimul al lucrării se extinde problema A la ecuația cu derivate parțiale de tip parabolic, de forma cea mai simplă

$$(10) \quad \frac{\partial^N u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ (N = p_1 + p_2 + \dots + p_n),$$

impunînd integralei u a ecuației (10) condițiile ca pe hiperplanele $Q_{a_1, a_2, \dots, a_k}$ derivatele ei în raport cu $x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_{n-k}}$ de ordinele de multiplicitate existente în (10) să ia valori date, iar pe semidreptele $(D_{a'})$ derivatele ei parțiale în raport cu cîte una din variabile, de ordinele de multiplicitate existente în (10), să ia valori date, integrala însuși luînd în origină o valoare numerică dată.

În notațiile adoptate (4), (9), condițiile impuse se vor scrie deci

$$(C_{n-k}) : \left[\frac{\partial^{N-(p_{a_1}+p_{a_2}+\dots+p_{a_k})} u}{\partial x_{a_1}^{p_{a_1}} \partial x_{a_2}^{p_{a_2}} \dots \partial x_{a_{n-k}}^{p_{a_{n-k}}}} \right]_{x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_k}} = \varphi_{a_1, a_2, \dots, a_k}(x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_{n-k}}), \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k),$$

($k = 1, 2, \dots, n-1$), la care se adaugă condiția (C_0) amintită, ca u să ia o valoare numerică dată în origine. Aici $\varphi_{a_1, a_2, \dots, a_k}(x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_{n-k}})$ sînt C_n^k funcții date.

Integrala căutată depinde de $\mathcal{H} = 2^{n-1}(N-n)$ funcții arbitrare. Se dă un procedeu de iterație care conduce la expresia integralei căutate.