

8-3717/40 16
ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

EXTRAS

1

ANUL XII

1961

156
EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

STUDII
METODE DE CALCUL

INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIEI INTEGRALE
DE TIP VOLTERRA

DE
D. V. IONESCU ¹⁾

În această lucrare vom considera ecuația integrală de tip Volterra, neomogenă

$$\varphi(x) + \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (1)$$

și vom trata următoarea problemă: să se determine o rețea de noduri în progresie aritmetică Γ , pe intervalul $[a, b]$ corespunzătoare unui număr pozitiv ε dat, și un algoritm pentru calculul unor numere $\varphi_i^{(p)}$, unde $p = 0, 1, \dots, v$, astfel ca să avem

$$|\varphi(x_i) - \varphi_i^{(v)}| < 2\varepsilon,$$

pe toate nodurile x_i ale rețelei Γ .

Aceeași problemă va fi reluată într-o altă lucrare pentru alte ecuații funcționale.

Metoda de lucru în această problemă este analoagă cu metoda de lucru expusă în comunicările pe care le-am făcut despre integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale și a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip hiperbolic, la Colocviul de Mecanică ținut în București 25–29 octombrie 1959 și la Colocviul de teoria ecuațiilor cu derivate parțiale ținut în București 21–26 septembrie 1959.

1. În ecuația integrală (1) să presupunem că funcția $f(x)$ este continuă în intervalul $[a, b]$ și că simburile $K(x, t)$ este o funcție continuă de x și t în triunghiul T definit de inegalitățile

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq t \leq x. \quad (2)$$

¹⁾ Institutul de calcul — Filiala Academiei R.P.R. — Cluj.

Se știe că în aceste condiții ecuația integrală (1) are o soluție unică $\varphi(x)$, continuă în intervalul $[a, b]$ și care poate fi obținută prin metoda aproximațiilor succesive, punând

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)}(x) &= f(x), \\ \varphi^{(p)}(x) &= f(x) - \int_a^x K(x, t) \varphi^{(p-1)}(t) dt,\end{aligned}\quad (3)$$

unde $p = 1, 2, \dots$, Integrala $\varphi(x)$ este suma seriei

$$\varphi^{(0)}(x) + [\varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(0)}(x)] + \dots + [\varphi^{(p)}(x) - \varphi^{(p-1)}(x)] + \dots \quad (4)$$

care este absolut și uniform convergentă în intervalul $[a, b]$; avem

$$\varphi(x) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \varphi^{(p)}(x). \quad (5)$$

Putem scrie

$$\varphi(x) - \varphi^{(p)}(x) = [\varphi^{(p+1)}(x) - \varphi^{(p)}(x)] + [\varphi^{(p+2)}(x) - \varphi^{(p+1)}(x)] + \dots,$$

de unde rezultă că

$$|\varphi(x) - \varphi^{(p)}(x)| \leq F_0 e^{K_0(b-a)} \frac{K_0^{p+1} (b-a)^{p+1}}{(p+1)!},$$

unde F_0 și K_0 sînt margini superioare ale lui $|f(x)|$ și $|K(x, t)|$ în intervalul $[a, b]$ și în triunghiul T .

Din inegalitatea precedentă rezultă că ε fiind un număr pozitiv dat, se poate alege numărul natural ν , astfel ca să avem

$$|\varphi(x) - \varphi^{(\nu)}(x)| < \varepsilon, \quad (6)$$

pentru orice x din intervalul $[a, b]$. Numărul ν astfel ales, rămîne fix în toată această lucrare.

2. Pentru integrarea numerică a ecuației integrale (1), vom face următoarele ipoteze suplimentare asupra funcției $f(x)$ și asupra sîmburelui $K(x, t)$. Aceste ipoteze sînt legate de procedeul de integrare numerică pe care-l vom aplica. Vom presupune

1°. funcția $f(x)$ are derivatele $f'(x), f''(x)$ continue în intervalul $[a, b]$

2°. sîmburele $K(x, t)$ are derivatele parțiale $\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}$

continue în triunghiul T .

Din aceste ipoteze se deduce că funcțiile $\varphi^{(p)}(x)$ unde $p = 0, 1, \dots, \nu$ au derivate de ordinul întâi și al doilea continue în intervalul $[a, b]$.

Aceasta este evident pentru funcția $\varphi^{(0)}(x)$ și presupunînd că $\varphi^{(p-1)}(x)$ are derivatele $\varphi^{(p-1)'}(x), \varphi^{(p-1)''}(x)$ continue în intervalul $[a, b]$, ceea ce are loc pentru $p = 1$, din formulele (3) se deduce că $\varphi^{(p)}(x)$ are derivate $\varphi^{(p)'}(x), \varphi^{(p)''}(x)$ continue în intervalul $[a, b]$ și avem

$$\varphi^{(p)'}(x) = f'(x) - K(x, x) \varphi^{(p-1)}(x) - \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \varphi^{(p-1)}(t) dt, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\varphi^{(p)''}(x) &= f''(x) - \left[2 \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} \right]_{t=x} \varphi^{(p-1)}(x) - K(x, x) \varphi^{(p-1)'}(x) - \\ &\quad - \int_a^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} \varphi^{(p-1)}(t) dt.\end{aligned}$$

Funcțiile $|\varphi^{(p)}(x)|, |\varphi^{(p)'}(x)|, |\varphi^{(p)''}(x)|$ au margini superioare în intervalul $[a, b]$, care pot fi calculate fără să se fi calculat funcțiile $\varphi^{(p)}(x), \varphi^{(p)'}(x), \varphi^{(p)''}(x)$.

Aceasta este evident pentru $\varphi^{(0)}(x), \varphi^{(0)'}(x), \varphi^{(0)''}(x)$ căci dacă notăm cu F_0, F_1, F_2 marginile superioare ale lui $|f(x)|, |f'(x)|, |f''(x)|$ pe intervalul $[a, b]$, avem

$$|\varphi^{(0)}(x)| \leq F_0, |\varphi^{(0)'}(x)| \leq F_1, |\varphi^{(0)''}(x)| \leq F_2 \quad (8)$$

Dacă notăm cu $K_0, K_{10}, K_{01}, K_{20}, K_{02}$ marginile superioare ale lui

$$|K(x, t)|, \left| \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) \right|, \left| \frac{\partial K}{\partial t}(x, t) \right|, \left| \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x, t) \right|, \left| \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x, t) \right|,$$

în triunghiul T , atunci din formulele (3) și (7), deducem că

$$|\varphi^{(p)}(x)| \leq F_0 + K_0 \int_a^x |\varphi^{(p-1)}(t)| dt,$$

$$|\varphi^{(p)'}(x)| \leq F_1 + K_{10} |\varphi^{(p-1)}(x)| + K_{01} \int_a^x |\varphi^{(p-1)}(t)| dt, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}|\varphi^{(p)''}(x)| &\leq F_2 + (2K_{10} + K_{01}) |\varphi^{(p-1)}(x)| + K_0 |\varphi^{(p-1)'}(x)| + \\ &\quad + K_{20} \int_a^x |\varphi^{(p-1)}(t)| dt.\end{aligned}$$

Formulele (8) și (9) dau marginile superioare ale funcțiilor $|\varphi^{(p)}(x)|, |\varphi^{(p)'}(x)|, |\varphi^{(p)''}(x)|$ în intervalul $[a, b]$. Mai departe, vom nota cu Φ_0, Φ_1, Φ_2 marginile superioare ale lui $|\varphi^{(p)}(x)|, |\varphi^{(p)'}(x)|, |\varphi^{(p)''}(x)|$ în intervalul $[a, b]$ pentru toate valorile indicelui $p, p = 0, 1, \dots, \nu$.

Din considerațiile precedente, rezultă că funcțiile

$$\psi^{(p)}(t) = K(x, t) \varphi^{(p)}(t) \quad (10)$$

unde x este un număr din intervalul $[a, b]$, au derivate $\psi^{(p)'}(t), \psi^{(p)''}(t)$ continue pentru $a \leq t \leq x \leq b$ și avem

$$\psi^{(p)'}(t) = \frac{\partial K}{\partial t} \varphi^{(p)}(t) + K(x, t) \varphi^{(p)'}(t),$$

$$\psi^{(p)''}(t) = \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \varphi^{(p)}(t) + 2 \frac{\partial K}{\partial t} \varphi^{(p)'}(t) + K(x, t) \varphi^{(p)''}(t).$$

Marginea superioară a lui $|\psi^{(p)''}(t)|$ în intervalul $[a, x] \subset [a, b]$ poate fi calculată folosind marginile superioare ale lui $|\varphi^{(p)}(t)|, |\varphi^{(p)'}(t)|, |\varphi^{(p)''}(t)|$ în intervalul $[a, b]$ vom avea

$$|\psi^{(p)''}(t)| \leq K_{02} \Phi_0 + 2K_{01} \Phi_1 + K_0 \Phi_2.$$

Notînd

$$N = K_{02} \Phi_0 + 2K_{01} \Phi_1 + K_0 \Phi_2,$$

vom avea deci

$$|\psi^{(p)''}(t)| \leq N, \quad (11)$$

pentru toate valorile indicelui p adică pentru $p = 0, 1, \dots, \nu$.

3. Să determinăm acum o rețea Γ pe intervalul $[a, b]$, formată din nodurile $a, x_1, \dots, x_{n-1}, b$ și un algoritm pentru calculul numerelor $\varphi_i^{(p)}$ pentru $p = 0, 1, \dots, \nu$ astfel ca pe nodurile rețelei Γ , să avem

$$|\varphi^{(\nu)}(x_i) - \varphi_i^{(\nu)}| < \varepsilon, \quad (x_0 = a, x_n = b).$$

Deoarece $\varphi^{(0)}(x) = f(x)$, vom lua

$$\varphi_i^{(0)} = f(x_i). \quad (12)$$

Fie ε_1 un număr pozitiv, pe care-l vom preciza mai departe și n un număr natural atașat lui ε_1 , într-un mod pe care-l vom explica mai departe. Împărțim intervalul $[a, b]$ în n părți egale prin punctele $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ și astfel s-a format rețeaua Γ din nodurile $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$. Vom calcula pe $\varphi^{(1)}(x)$ pe nodurile rețelei Γ , aplicînd la integrala din formula

$$\varphi^{(1)}(x_i) = f(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, t) \varphi^{(0)}(t) dt,$$

formula de calcul dedusă din formula de cuadratură a trapezului care folosește nodurile $x_0, x_1, \dots, x_i$. Vom avea

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x_i) = f(x_i) - \frac{b-a}{2n} & \left[K(x_i, x_0) \varphi^{(0)}(x_0) + K(x_i, x_i) \varphi^{(0)}(x_i) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) \varphi^{(0)}(x_j) \right] - R_i^{(1)}, \end{aligned} \quad (13)$$

unde, ținînd seama de formulele (10) și (11) avem

$$|R_i^{(1)}| < N \frac{(b-a)^3}{12n^2}. \quad (14)$$

Să alegem numărul n egal cu cel mai mic număr natural care îndeplinește condiția

$$N \frac{(b-a)^3}{12n^2} < \varepsilon_1. \quad (15)$$

Atunci, dacă ținem seama că $\varphi^{(0)}(x_j) = \varphi_j^{(0)} = f(x_j)$ și notăm

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(1)} = f(x_i) - \frac{b-a}{2n} & \left[K(x_i, x_0) \varphi_0^{(0)} + K(x_i, x_i) \varphi_i^{(0)} + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) \varphi_j^{(0)} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

formula (13) se scrie

$$\varphi^{(1)}(x_i) = \varphi_i^{(1)} - R_i^{(1)}, \quad (17)$$

și avem $|R_i^{(1)}| < \varepsilon_1$.

Să trecem la calculul lui $\varphi^{(2)}(x_i)$. Vom avea

$$\varphi^{(2)}(x_i) = f(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, t) \varphi^{(1)}(t) dt.$$

Procedînd ca mai sus, și aplicînd formula de calcul dedusă din formula de cuadratură a trapezului, vom avea

$$\varphi^{(2)}(x_i) = [\varphi_i^{(2)}] - r_i^{(2)}, \quad (18)$$

unde

$$\begin{aligned} [\varphi_i^{(2)}] = f(x_i) - \frac{b-a}{2n} & \left[K(x_i, x_0) \varphi^{(1)}(x_0) + K(x_i, x_i) \varphi^{(1)}(x_i) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) \varphi^{(1)}(x_j) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

iar

$$|r_i^{(2)}| < \varepsilon_1. \quad (20)$$

Să notăm

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(2)} = f(x_i) - \frac{b-a}{2n} & \left[K(x_i, x_0) \varphi_0^{(1)} + K(x_i, x_i) \varphi_i^{(1)} + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) \varphi_j^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Din formulele (19) și (20) deducem că

$$[\varphi_i^{(2)}] = \varphi_i^{(2)} + \rho_i^{(2)}, \quad (22)$$

unde

$$\begin{aligned} \rho_i^{(2)} = -\frac{b-a}{2n} & \left\{ K(x_i, x_0) [\varphi^{(1)}(x_0) - \varphi_0^{(1)}] + K(x_i, x_i) [\varphi^{(1)}(x_i) - \varphi_i^{(1)}] + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) [\varphi^{(1)}(x_j) - \varphi_j^{(1)}] \right\}. \end{aligned}$$

Ținînd seama de formulele (17), în care $|R_i^{(1)}| < \varepsilon_1$, deducem că

$$|\rho_i^{(2)}| \leq 2i \frac{b-a}{2n} K_0 \varepsilon_1 < Q \varepsilon_1,$$

unde s-a notat

$$Q = (b-a) K_0. \quad (23)$$

Din formulele (18) și (22) deducem că

$$\varphi^{(2)}(x_i) = \varphi_i^{(2)} + R_i^{(2)}, \quad (24)$$

unde

$$R_i^{(2)} = \varphi_i^{(2)} - r_i^{(2)},$$

și ținând seama de inegalitățile precedente, avem

$$|R_i^{(2)}| \leq (1+Q) \varepsilon_1. \quad (25)$$

4. Să trecem la cazul general. Să presupunem că pentru indicele $p-1$, avem

$$\varphi^{(p-1)}(x_i) = \varphi_i^{(p-1)} + R_i^{(p-1)}, \quad (26)$$

unde

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(p-1)} = f(x_i) - \frac{b-a}{2n} & \left[K(x_i, x_0) \varphi_0^{(p-2)} + K(x_i, x_i) \varphi_i^{(p-2)} + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) \varphi_j^{(p-2)} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

iar

$$|R_i^{(p-1)}| \leq (1+Q+\dots+Q^{p-2}) \varepsilon_1, \quad (28)$$

ceea ce este exact pentru $p=3$, deoarece în acest caz formulele (26), (27), (28) coincid cu formulele (24), (21), (25).

Să demonstrăm că formulele (26), (27), (28) sînt valabile în general. Într-adevăr, din formula (3) deducem că pe nodurile rețelei Γ , avem

$$\varphi^{(p)}(x_i) = f(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, t) \varphi^{(p-1)}(t) dt.$$

La integrala din membrul al doilea să aplicăm formula de calcul dedusă din formula de cuadratură a trapezului pe nodurile $x_0, x_1, \dots, x_i$. Vom avea

$$\varphi^{(p)}(x_i) = [\varphi_i^{(p)}] - r_i^{(p)}, \quad (29)$$

unde

$$\begin{aligned} [\varphi_i^{(p)}] = f(x_i) - \frac{b-a}{2n} & \left[K(x_i, x_0) \varphi^{(p-1)}(x_0) + K(x_i, x_i) \varphi^{(p-1)}(x_i) + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) \varphi^{(p-1)}(x_j) \right], \end{aligned}$$

iar

$$|r_i^{(p)}| < \varepsilon_1. \quad (30)$$

Să introducem

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(p)} = f(x_i) - \frac{b-a}{2n} & \left[K(x_i, x_0) \varphi_0^{(p-1)} + K(x_i, x_i) \varphi_i^{(p-1)} + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) \varphi_j^{(p-1)} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Avem

$$[\varphi_i^{(p)}] = \varphi_i^{(p)} + \varrho_i^{(p)}, \quad (32)$$

unde

$$\begin{aligned} \varrho_i^{(p)} = - \frac{b-a}{2n} & \left\{ K(x_i, x_0) [\varphi^{(p-1)}(x_0) - \varphi_0^{(p-1)}] + K(x_i, x_i) [\varphi^{(p-1)}(x_i) - \right. \\ & \left. - \varphi_i^{(p-1)}] + 2 \sum_{j=1}^{i-1} K(x_i, x_j) [\varphi^{(p-1)}(x_j) - \varphi_j^{(p-1)}] \right\}, \end{aligned}$$

avem

$$|\varrho_i^{(p)}| \leq 2i \frac{b-a}{2n} K_0 |R_i^{(p-1)}| \leq Q |R_i^{(p-1)}|. \quad (33)$$

Din formulele (29) și (32) deducem că

$$\varphi^{(p)}(x_i) = \varphi_i^{(p)} + R_i^{(p)}, \quad (34)$$

unde $\varphi_i^{(p)}$ este dat de formula (31), iar

$$R_i^{(p)} = \varphi_i^{(p)} - r_i^{(p)}$$

Ținînd seama de inegalitățile (30), (33), (28) deducem că

$$|R_i^{(p)}| \leq (1+Q+\dots+Q^{p-1}) \varepsilon_1 \quad (35)$$

și deoarece formulele (31), (34), (35) coincid cu formulele (27), (26), (28) cînd se schimbă p în $p-1$, aceste formule sînt generale.

5. În rezumat, am elaborat un algoritm pentru calculul numerelor $\varphi_i^{(p)}$ relative la nodurile rețelei Γ cu ajutorul formulelor (12) și (31). Pe nodurile rețelei Γ avem formulele (34) unde restul $R_i^{(p)}$ verifică inegalitatea (35). Pentru $p=v$, avem

$$\varphi^{(v)}(x_i) = \varphi_i^{(v)} + R_i^{(v)}, \quad (36)$$

unde

$$|R_i^{(v)}| \leq (1+Q+\dots+Q^{v-1}) \varepsilon_1. \quad (37)$$

Dacă alegem pe ε_1 astfel ca

$$(1+Q+\dots+Q^{v-1}) \varepsilon_1 < \varepsilon, \quad (38)$$

în formula (36), vom avea

$$|R_i^{(v)}| < \varepsilon \quad (39)$$

Revenind la integrala $\varphi(x)$ a ecuației integrale (1) putem scrie următoarea identitate, pe nodurile rețelei Γ

$$\varphi(x_i) - \varphi_i^{(v)} = [\varphi(x_i) - \varphi^{(v)}(x_i)] + [\varphi^{(v)}(x_i) - \varphi_i^{(v)}],$$

și inegalitățile (6), (36) arată că vom avea

$$|\varphi(x_i) - \varphi_i^{(v)}| < 2\varepsilon. \quad (40)$$

Prin urmare la numărul pozitiv dat ε , s-a putut determina o rețea Γ pe intervalul $[a, b]$, prin inegalitățile (15) și (38) și algoritmul de calcul pentru numerele $\varphi_i^{(p)}$, unde $p = 0, 1, \dots, v$, astfel ca $\varphi_i^{(v)}$ să reprezinte aproximativ valorile integralei $\varphi(x)$, pe nodurile rețelei Γ și să avem inegalitatea (40).

Primită la redacție la 11 ianuarie 1960

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматривается следующая задача, относящаяся к численному интегрированию неоднородного интегрального уравнения Вольтерра (1): определить решетку Γ узлов в арифметической прогрессии на интервале $[a, b]$, соответствующую заданному положительному ε , и алгоритм для вычисления чисел $\varphi_i^{(p)}$, где $p = 0, 1, \dots, v$, так, чтобы в узлах решетки Γ иметь неравенство $|\varphi(x_i) - \varphi_i^{(v)}| < 2\varepsilon$.

Предполагается, что функция $f(x)$ имеет производные $f'(x), f''(x)$, непрерывные на интервале $[a, b]$ и что ядро $K(x, t)$ имеет частные производные $\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}$, непрерывные в треугольнике T , определяющемся неравенствами (2).

Решетка Γ получается путем деления интервала $[a, b]$ на n равных частей, причем n определяется неравенством (15), а число ε удовлетворяет неравенству (38). Числа $\varphi_i^{(p)}$ даны формулами (12) и (31).

В другой работе займемся этой же задачей в связи с другими функциональными уравнениями.

INTÉGRATION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DU TYPE VOLTERRA

RÉSUMÉ

Dans ce travail on considère le problème suivant relatif à l'intégration numérique de l'équation intégrale de Volterra (1), non homogène : déterminer un réseau Γ de nœuds en progression arithmétique sur l'intervalle $[a, b]$, correspondant à un nombre positif donné ε , et un algorithme pour le calcul des nombres $\varphi_i^{(p)}$, où $p = 0, 1, \dots, v$ tel que l'on ait sur les nœuds du réseau Γ , l'inégalité $|\varphi(x_i) - \varphi_i^{(v)}| < 2\varepsilon$.

On suppose que la fonction $f(x)$ ait des dérivées $f'(x), f''(x)$ continues sur l'intervalle $[a, b]$ et que le noyau $K(x, t)$ ait des dérivées partielles $\frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}$ continues dans le triangle T défini par les inégalités (2).

Le réseau Γ s'obtient en partageant l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales, le nombre n étant déterminé par l'inégalité (15), le nombre ε satisfaisant à l'inégalité (38).

Les nombres $\varphi_i^{(p)}$ sont donnés par les formules (12) et (31).

Dans un autre travail, nous nous occuperons du même problème relatif à d'autres équations fonctionnelles.