

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*,
t. 252, p. 2172-2173, séance du 10 avril 1961.

GAUTHIER-VILLARS & C^{ie},
55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6^e),
Éditeur-Imprimeur-Libraire.
159413

Imprimé en France.

COMUNICĂRILE
ACADEMIEI
REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Nr. 7
TOMUL XI
1961

EXTRAS



EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

O TEOREMĂ ASUPRA ÎNLĂNȚUIRILOR TRIDIMENSIONALE DE CURBE ÎNCHISE

DE

G. CĂLUGĂREANU

MEMBRU CORRESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.

Comunicare prezentată în ședința din 4 martie 1961

Numim *înlănțuire* tridimensională de ordinul m , un sistem $(C_1, \dots, C_m)$ de m curbe închise, fără puncte multiple, orientate, 2 câte 2 disjuncte, din spațiul euclidian tridimensional. Ne referim în cele ce urmează la înlănțuiri de ordinul 2, (C_1, C_2) , unde fiecare din cele două curbe are în fiecare punct o tangentă care variază continuu de-a lungul curbei. Numim *tangentă de sprijin* orice tangentă la una din cele două curbe, care întâlnește cealaltă curbă. Astfel de tangente nu există în mod necesar dacă C_1 și C_2 nu sînt înlănțuite, dacă deci, printr-o deformare continuă a acestora, în timpul căreia curbele rămîn disjuncte, fără puncte multiple, putem aduce C_1 în interiorul unei sfere, C_2 rămînînd în afara acesteia. Însă atunci cînd C_1 și C_2 sînt înlănțuite, existența tangentelor de sprijin pare să fie obligatorie. Stabilim mai jos o teoremă care arată că atunci cînd coeficientul de înlănțuire $G(C_1, C_2)$, dat de integrala dublă a lui Gauss, nu este nul, $G(C_1, C_2) \neq 0$, tangentele de sprijin există, și numărul lor este cel puțin $4G(C_1, C_2)$. Se știe însă că dacă $G(C_1, C_2) = 0$, curbele C_1 și C_2 pot fi totuși înlănțuite, deci în acest caz teorema de mai jos nu stabilește existența tangentelor de sprijin, deși aceasta pare să subsiste cu singura condiție ca C_1 și C_2 să fie înlănțuite.

Notînd cu s_1 , respectiv s_2 , lungimea arcului măsurat pe C_1 , respectiv C_2 , apoi $x_i = x_i(s_i)$, $y_i = y_i(s_i)$, $z_i = z_i(s_i)$ fiind ecuațiile curbei C_i , iar $\alpha_i = \frac{dx_i}{ds_i}$, $\beta_i = \frac{dy_i}{ds_i}$, $\gamma_i = \frac{dz_i}{ds_i}$, tangentele de sprijin vor fi date de sistemul

$$F_1 \equiv x_2 - x_1 - u\alpha_1 = 0, F_2 \equiv y_2 - y_1 - u\beta_1 = 0, F_3 \equiv z_2 - z_1 - u\gamma_1 = 0, \quad (1)$$

în care necunoscutele sînt s_1, s_2, u . Pentru a calcula numărul soluțiilor acestui sistem vom aplica formulele clasice deduse de ajutorul caracteristicii lui Kronecker [1], și anume

$$4\pi N = \iint \frac{1}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} F_1 & \frac{\partial F_1}{\partial s_1} & \frac{\partial F_1}{\partial s_2} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ F_2 & \frac{\partial F_2}{\partial s_1} & \frac{\partial F_2}{\partial s_2} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \\ F_3 & \frac{\partial F_3}{\partial s_1} & \frac{\partial F_3}{\partial s_2} & \frac{\partial F_3}{\partial u} \\ 0, & ds_2 du, & duds_1, & ds_1 ds_2 \end{vmatrix} \quad (2)$$

unde integrala de suprafață se ia pe frontiera prismei indefinite $0 \leq s_1 \leq L_1$, $0 \leq s_2 \leq L_2$, $-\infty < u < +\infty$, notînd cu L_i lungimea curbei C_i . Numărul N dat de această formulă este suma algebrică a indicilor tangentelor de sprijin, dacă numim indice al unei astfel de tangente, corespunzătoare unei soluții (s_1, s_2, u) a sistemului (1), numărul $\text{sign} \frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(s_1, s_2, u)}$

corespunzător. Se obține de altfel $\frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(s_1, s_2, u)} = u \rho_1 S \alpha_2 \alpha_1'$, unde ρ_1 este curbura și $\alpha_1', \beta_1', \gamma_1'$ reprezintă direcția binormalei în punctul s_1 , iar S indică o sumă de trei termeni analogi cu cel scris. Să considerăm suprafața generată de tangentele curbei C_1

$$X = x_1 + u \alpha_1, \quad Y = y_1 + u \beta_1, \quad Z = z_1 + u \gamma_1 \quad (3)$$

unde parametrii sînt s_1 și u . Direcția normalei este dată de $\frac{D(Y, Z)}{D(s_1, u)} = -u \rho_1 \alpha_1'$, și $-u \rho_1 \beta_1', -u \rho_1 \gamma_1'$. Într-un punct unde C_2 taie această suprafață, semnul expresiei $S \alpha_2 \frac{D(Y, Z)}{D(s_1, u)} = -u \rho_1 S \alpha_2 \alpha_1'$ arată dacă C_2

traversează suprafața intrînd prin fața pozitivă, sau invers, ceea ce ne dă o interpretare a indicelui definit mai sus. În același timp se vede că N este un invariant de izotopie al înălțurii, deoarece, curbele C_1 și C_2 nepunîndu-se traversa în timpul unei deformări izotope a înălțurii, punctele de intersecție ale curbei C_2 cu suprafața (3) nu pot să apară sau să dispară decît în perechi, avînd indici de semn contrar. Formula (2) se scrie dezvoltat

$$4\pi N = \iint \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{vmatrix} ds_2 du + u \rho_1 \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1' \end{vmatrix} duds_1 + \left(\begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{vmatrix} + u \rho_1 \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1' \end{vmatrix} + u^2 \rho_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1' \end{vmatrix} \right) ds_1 ds_2}{[r_{12}^2 - 2u(\vec{r}_{12} \vec{t}_1) + u^2]^{3/2}} \quad (4)$$

unde s-a scris numai prima coloană din fiecare determinant. Efectuînd integrarea pe fețele prismei indicate găsim că, datorită periodicității funcțiilor $x_i(s_i), \alpha_i(s_i), \dots$, fețele laterale dau o contribuție nulă, iar bazele prismei, care se obțin pentru $u = \pm \infty$, dau de asemenea o contribuție nulă. Așadar $N = 0$, deci numărul tangentelor de sprijin duse la C_1 , cu indice pozitiv, este egal cu numărul celor cu indice negativ.

Tangentele curbei C_1 fiind orientate coerent cu însăși curba C_1 , să numim *tangentă de sprijin anterior* o tangentă la C_1 pe care punctul de sprijin, aflat pe C_2 , este situat după punctul de tangență, deci $u > 0$; în mod analog, tangenta se va numi de sprijin posterior dacă $u < 0$. Deoarece indicele schimbă semnul o dată cu u , se vede că numărul tangentelor de sprijin anterior N_a este egal cu acel al tangentelor de sprijin posterior N_p . Să calculăm N_a ; este suficient să efectuăm integrala (4) pe suprafața prismei $0 \leq s_1 \leq L_1, 0 \leq s_2 \leq L_2, 0 \leq u < +\infty$. Fețele laterale dau și acum o contribuție nulă, iar baza $u = 0$ conduce la

$$4\pi N_a = \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \frac{1}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{vmatrix} ds_1 ds_2 = 4\pi G(C_1, C_2),$$

care este chiar integrala lui Gauss, reprezentînd coeficientul de înălțuire $G(C_1, C_2)$. Putem da enunțul următor:

Numărul algebric al tangentelor de sprijin anterior a unei curbe C_1 față de altă curbă C_2 este egal cu coeficientul lor de înălțuire, și cu numărul tangentelor de sprijin posterior. Dacă curbele sînt înălțuite, numărul total al tangentelor de sprijin (fără distincție de semn) este cel puțin de patru ori coeficientul lor de înălțuire.

În cazul cînd curbele C_1 și C_2 se confundă într-o curbă unică C , sistemul (1) are soluția streină $s_1 = s_2, u = 0$, care se evită integrînd în raport cu u de la $\varepsilon > 0$ la $+\infty$, apoi făcînd $\varepsilon \rightarrow 0$. Se ajunge astfel la invariantul K definit de noi anterior [2].

О ТРЕХМЕРНОМ ЗАЦЕПЛЕНИИ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ

РЕЗЮМЕ

Зацеплением порядка t называется любая система $(C_1, C_2, \dots, C_m)$ простых направленных замкнутых кривых, попарно без общих точек, в трехмерном евклидовом пространстве. В случае зацепления (C_1, C_2) , где C_1 и C_2 имеют касательную в каждой точке, которая непрерывно изменяется вдоль кривой, называем *опорной касательной* всякую касательную одной кривой, имеющую общие точки с другой кривой. Используя характеристику Кронкера, автор доказывает следующую теорему: число спорных касательных зацепления (C_1, C_2) является по крайней мере равным $4G(C_1, C_2)$ где $G(C_1, C_2)$ — коэффициент зацепления данный интегралом Гаусса.

SUR LES ENLACEMENTS TRIDIMENSIONNELS DES COURBES FERMÉES

RÉSUMÉ

On appelle *enlacement d'ordre m* un système $(C_1, \dots, C_m)$ de m courbes fermées simples, orientées, 2 à 2 disjointes, de l'espace euclidien tridimensionnel. Dans le cas d'un enlacement (C_1, C_2) , où C_1 et C_2 ont en chaque point une tangente qui varie continûment sur la courbe, on appelle *tangente d'appui* toute tangente à l'une des courbes, qui rencontre l'autre courbe. En appliquant la caractéristique de Kronecker, l'auteur démontre le théorème suivant : *Le nombre des tangentes d'appui de l'enlacement (C_1, C_2) est au moins égal au quadruple du coefficient d'enlacement $G(C_1, C_2)$ donné par l'intégrale de Gauss.*

BIBLIOGRAPHIE

1. E. PICARD, *Traité d'Analyse*, I, 3^e éd., 150—156.
2. G. CALUGĂREANU, *L'intégrale de Gauss et l'analyse des nœuds tridimensionnels*, Revue de math. pures et appl., 1959, IV, 5—20.