

ANALELE ȘTIINȚIFICE ALE UNIVERSITĂȚII „AL. I. CUZA” — IAȘI

TOMUL VIII, s. I, Fasc. 1

1962

S U M A R

	Pag.
V. NECULCE și M. SĂRMĂȘANU — Realizări și perspective în dezvoltarea economică și culturală a regiunii Iași	I—XII
CORINA HAIMOVICI — Subalgebre atașate elementelor unei algebre	1— 4
SANDA DRUȚĂ — Cîteva observații asupra algebrei grupale a unui grup finit	5— 12
OLGA COSTINESCU — Asupra integralei multiple Riemann-Graves	13— 21
M. HAIMOVICI — Despre descompunerea sistemelor Pfaff	23— 31
ADOLF HAIMOVICI — Asupra unui sistem care generalizează sistemul lui Cauchy-Kowalewski	33— 56
EKKHARD KRÄTZEL — Transformarea seriilor multiple cu aplicații la seriile teta	57— 64
TIBERIU POPOVICI — Asupra conservării, prin polinomul de interpolare al lui L. Fejér, a semnului și monotoniei funcției	65— 84
C. IGNAT și N. CALISTRU — Metoda dreptelor pentru rezolvarea aproximativă a unor probleme cu condiții inițiale	85— 96
GHEORGHE GHEORGHIEV și ILIE POPA — Corespondențe între variații de conuri	97—103
IZU VAISMAN — Caracteristica tensorială a perechilor de rețele diagonale	105—110
U. A. SASTRY — Tensiuni termice provocate de perturbarea unui flux uniform de căldură de către un gol hipotrochoidal	111—117
C. I. BORȘ — Tensiuni termice axial simetrice la corpurile transversal izotrope	119—126,
S. G. RIJANOV — Rotația internă a nucleelor grele	127—130
CLEOPATRA TOMOZEI — Studiul relativist al cimpului gravitic rezultînd dintr-o metrică bazată pe o nouă exprimare a principiului echivalenței	131—138
G. T. JEVERDAN și GH. ILIE RUSU — Contribuții la studiul nivelelor energetice și al funcțiilor de undă proprii ale nucleelor atomice cu distribuție neomogenă	139—144
V. TUTOVAN și P. APOSTOL — Influența torsiunii asupra magnetizării păturilor electrolitice de fier, supuse simultan unui cîmp alternativ circular și unui cîmp continuu longitudinal	145—158
ȘT. PROCOPIU, C. FLORESCU, C. BAIARDI și E. IONESCU — Elementele magnetismului pămîntesc la Iași în anul 1961	159—161
VICTOR MIRON — Contribuții experimentale la studiul trecerii curențului electric prin metale	163—171
MARGARETA ȚIBU, CANDIANO LEONTE și I. VISCRIAN — Noi contribuții la studiul scintilatorilor organici în soluție	173—180
NGUYEN HOANG PHUONG — Despre o mișcare internă a materiei	181—190
M. PAPAFIL și M. FURNICĂ — Dozarea polarografică indirectă a Fe^{3+}	191—196
MG. PONI, M. PAPAFIL, M. BOSTAN și D. FURNICĂ — Săruri complexe cu acidul 5-nitrobarbituric	197—202

SUR LA CONSERVATION, PAR LE POLYNOME D'INTERPOLATION DE L. FEJÉR, DU SIGNE OU DE LA MONOTONIE DE LA FONCTION

PAR

TIBERIU POPOVICIU

à Cluj

§ 1. Conservation du signe de la fonction

1. Soient

$$(1) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

$n (\geq 2)$ points de l'axe réelle, $f = f(x)$ une fonction, réelle, de la variable réelle x , définie sur un ensemble linéaire E contenant les points (1) et considérons le polynome d'interpolation

$$(2) \quad F[f|x] = \sum_{i=1}^n f(x_i) h_i$$

correspondant à la fonction f sur les *noeuds* (d'interpolation) (1).

Le polynome (2) (de L. Fejér) est le premier terme du polynome de Lagrange-Hermite

$$(3) \quad H[f|x] = \sum_{i=1}^n f(x_i) h_i + \sum_{i=1}^n f'(x_i) k_i$$

de degré $2n - 1$ prenant, avec la fonction f et avec sa dérivée f' , les mêmes valeurs sur les noeuds.

Dans (3) les h_i sont les polynomes fondamentaux d'interpolation de la première et les k_i les polynomes fondamentaux d'interpolation de la seconde espèce correspondants aux noeuds (1). Ces polynomes sont donnés par les formules

$$(4) \quad h_i = \left[\frac{l(x)}{(x-x_i)l'(x_i)} \right]^2 \left[1 - \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}(x-x_i) \right], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(5) \quad k_i = \left[\frac{l(x)}{(x-x_i)l'(x_i)} \right]^2 (x-x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où

$$(6) \quad l(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Plusieurs auteurs, surtout d'abord L. Fejér [1], ont étudié des cas, très importants pour la convergence des suites de polynômes d'interpolation, où les polynômes (4) sont non-négatifs sur un certain intervalle I .

Dans ce premier § nous reproduisons, en les complétant un peu, les résultats de L. Fejér [1]. Nous reprenons aussi les cas où les noeuds sont les racines des polynômes orthogonaux classiques de Jacobi, Laguerre et Hermite considérés par L. Fejér [1] et G. Szegő [4].

Ces résultats sont utiles pour mettre mieux en évidence les propriétés que nous étudierons au § 2.

2. Soit I un intervalle quelconque. Nous disons que le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve le signe de la fonction (plus exactement: conserve le signe de la fonction f sur l'intervalle I) s'il est non-négatif sur I pour toute fonction f , non-négative sur les points (1). Il en est toujours ainsi si I se réduit à un noeud. Si l'intervalle I est non nul¹⁾ ou s'il se réduit à un point différent d'un noeud, pour que $F[f|x]$ conserve le signe de la fonction, il faut et il suffit que les fonctions linéaires

$$(7) \quad v_i = 1 - \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}(x-x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

soient non-négatives sur I . Dans le cas contraire nous disons que le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ ne conserve pas le signe de la fonction (plus exactement: ne conserve pas le signe de la fonction f sur l'intervalle I). Dans ce cas il existe au moins un point de I sur lequel l'un au moins des polynômes (7) prend une valeur négative.

La formule bien connue

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n h_i = 1$$

nous montre que les polynômes (4) ne peuvent s'annuler tous à la fois sur un même point. Il en résulte que si $F[f|x]$ conserve le signe de la fonction il est aussi positif sur I pour toute fonction positive sur les points (1). On voit facilement que, sous la même hypothèse, le polynôme $F[f|x]$ est non-positif respectivement négatif sur I pour toute fonc-

¹⁾ Donc a une longueur non nulle. De même nous disons que l'intervalle est nul s'il se réduit à un seul point.

tion f , non-positive respectivement négative sur les points (1). Il s'agit bien entendu, d'un intervalle I non nul. Plus simplement nous pourrions dire que si le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve la non-négativité, alors il conserve aussi la non-positivité, la positivité et la négativité de la fonction.

3. L'importante notion de points conjugués des noeuds, introduite par L. Fejér, permet de discuter complètement le problème de la conservation, par le polynôme $F[f|x]$, du signe de la fonction.

Les points conjugués des noeuds (1) sont les points

$$(9) \quad X_i = x_i + \frac{l'(x_i)}{l''(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

X_i étant le conjugué du point x_i ¹⁾.

Le point X_i existe si $l''(x_i) \neq 0$. Si $l''(x_i) = 0$ on peut prendre $X_i = +\infty$ et alors tous les résultats suivants restent valables en opérant avec le nombre impropre $+\infty$ comme d'habitude en analyse mathématique.

Le point X_i ne coïncide jamais avec x_i .

L'inégalité $v_i \geq 0$ sur I est équivalente à l'inégalité

$$(X_i - x_i)(X_i - x) \geq 0 \text{ sur } I.$$

Nous avons

$$(10) \quad \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} = 2 \sum'_{j=1}^n \frac{1}{x_i - x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où l'accent ' au signe $\sum'$ signifie que la valeur i de l'indice j est exclue.

Des inégalités (1) et de (10) il résulte que

$$(11) \quad \frac{l''(x_1)}{l'(x_1)} < 0, \quad \frac{l''(x_n)}{l'(x_n)} > 0$$

donc aussi $X_1 < x_1$, $X_n > x_n$. Les points X_1 , X_n sont finis et nous avons $I \subseteq [X_1, X_n]$ si le polynôme $F[f|x]$ conserve le signe de la fonction sur l'intervalle I .

En particulier, le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ ne conserve le signe de la fonction sur aucun intervalle infini.

Cette propriété résulte, d'ailleurs, aussi de la formule (8) et du fait qu'aucun des polynômes (4) ne se réduit à une constante²⁾. En effet, l'un au moins de ces polynômes doit tendre vers $+\infty$ et l'un au moins vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

¹⁾ Lorsque (1) sont les racines du polynôme de Tchebycheff $\cos(n \arccos x)$ les points x_i , $X_i (= \frac{1}{x_i})$ sont harmoniquement conjugués par rapport aux points $-1, 1$.

²⁾ Seulement de (8) et du fait qu'un au moins des polynômes (4) ne se réduit pas à une constante.

4. Si $l''(x_i) = 0$, on a $v_i = 1 > 0$ pour tout x . Désignons par $i_1, i_2, \dots, i_k$ les valeurs de l'indice i pour lesquelles $\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} < 0$ et par $j_1, j_2, \dots, j_m$ les valeurs de l'indice i pour lesquelles $\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} > 0$. Nous avons $k + m \leq n$. D'après (11) il existe de tels indices (donc $k \geq 1, m \geq 1$). On le voit aussi en remarquant que $\sum_{i=1}^n \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} = 0$ et que $l''(x_i), i = 1, 2, \dots, n$ ne peuvent être tous nuls¹⁾.

Deux cas peuvent alors se présenter :

4.1. Nous avons

$$X_{i_r} \leq X_{j_s}, \quad r = 1, 2, \dots, k, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

Alors pour que $F[f|x]$ conserve le signe de la fonction sur l'intervalle I il faut et il suffit que l'on ait $I \subseteq [Z^-, Z^+]$ où

$$Z^- = \max_{r=1,2,\dots,k} X_{i_r}, \quad Z^+ = \min_{s=1,2,\dots,m} X_{j_s}.$$

Le plus grand intervalle (supposé non nul) sur lequel le polynôme $F[f|x]$ conserve le signe de la fonction est l'intervalle $[Z^-, Z^+]$.

Dans le cas des noeuds $-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1$ ($n = 4$) nous avons $Z^- = Z^+ = 0$, qui ne coïncide pas avec un noeud et dans le cas des noeuds $-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1$ ($n = 5$) nous avons encore $Z^- = Z^+ = 0$, qui coïncide avec un noeud.

4.2. Il existe un indice r et un indice s tels que

$$(12) \quad X_{i_r} > X_{j_s}.$$

Dans ce cas il n'existe aucun intervalle I , ne se réduisant pas à un noeud, sur lequel le polynôme $F[f|x]$ conserve le signe de la fonction.

5. Si l'intervalle I est fini, qui peut être toujours supposé fermé, mais quelconque, les résultats de L. Fejér nous montrent que la conservation du signe peut effectivement avoir lieu. Il en est ainsi si les noeuds (1) sont *normalement distribués* par rapport à l'intervalle I . Si $I = [a, b]$, $a < b$, on dit que les noeuds (1) sont *normalement distribués* par rapport à I , si tous les points x_i appartiennent à l'intervalle I et tous les points conjugués X_i sont à l'extérieur de l'intervalle (ouvert) (a, b) . Il est facile de voir que, dans ce cas, le polynôme $F[f|x]$ conserve le signe de la fonction sur I .

¹⁾ Car le polynôme l'' est de degré $n-2$ et non identiquement nul.

On peut aussi obtenir un résultat en quelque sorte contraire. Nous avons la propriété

I. Si $n \geq 4$, on peut construire des systèmes de noeuds (1) tels que le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ ne conserve le signe de la fonction sur aucun intervalle I , nul ou non et ne se réduisant pas à un noeud.

Cette propriété est une conséquence du

Lemme 1. Si $n \geq 4$ et si les noeuds (1) vérifient les inégalités

$$(13) \quad x_2 - x_1 \leq \frac{x_3 - x_2}{n-1}, \quad x_n - x_{n-1} \leq \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{n-1}$$

le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ ne conserve le signe de la fonction sur aucun intervalle I , nul ou non et ne se réduisant pas à un noeud.

En vertu des inégalités (1) et (13), nous avons

$$(14) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{l''(x_2)}{l'(x_2)} = \frac{1}{x_2 - x_1} - \sum_{i=3}^n \frac{1}{x_i - x_2} > \frac{1}{x_2 - x_1} - \frac{n-2}{x_3 - x_2} \geq \frac{n-1}{x_3 - x_2} - \frac{n-2}{x_3 - x_2} = \frac{1}{x_3 - x_2} > 0,$$

donc $\frac{l''(x_2)}{l'(x_2)} > \frac{2}{x_3 - x_2} > 0$. On voit, de la même manière, que

$$\frac{l''(x_{n-1})}{l'(x_{n-1})} < \frac{-2}{x_{n-1} - x_{n-2}} < 0.$$

Il en résulte qu'il suffit de démontrer l'inégalité (12) correspondante, donc l'inégalité

$$(15) \quad X_{n-1} > X_2.$$

De (14) on déduit que

$$\frac{2}{x_3 - x_2} - \frac{l''(x_2)}{l'(x_2)} < \frac{2}{x_3 - x_2} - \frac{2}{x_3 - x_2} = 0,$$

donc

$$(16) \quad \frac{x_3 - x_2}{2} - \frac{l'(x_2)}{l''(x_2)} > 0$$

et on démontre de la même manière que

$$(17) \quad \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{2} + \frac{l'(x_{n-1})}{l''(x_{n-1})} > 0.$$

Compte tenant de (1), (16) et (17), nous avons

$$X_{n-1} - X_2 = x_{n-1} - x_2 + \frac{l'(x_{n-1})}{l''(x_{n-1})} - \frac{l'(x_2)}{l''(x_2)} = \frac{x_{n-1} + x_{n-2} - x_3 - x_2}{2} + \left[\frac{x_3 - x_2}{2} - \frac{l'(x_2)}{l''(x_2)} \right] + \left[\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{2} + \frac{l'(x_{n-1})}{l''(x_{n-1})} \right] > 0,$$

ce qui démontre l'inégalité (15), donc le lemme 1.

6. La propriété étudiée plus haut n'est pas vraie pour $n = 2$ et pour $n = 3$. Dans ces cas il existe toujours des intervalles I , non nuls, sur lesquels le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve le signe de la fonction.

6.1. Pour $n = 2$, nous avons

$$X_1 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{2}, \quad X_2 = x_2 + \frac{x_2 - x_1}{2}$$

et le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve le signe de la fonction sur l'intervalle I si et seulement si $I \subseteq [X_1, X_2]$.

6.2. Pour $n = 3$ la discussion est un peu plus compliquée et dépend du paramètre $\varrho = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$, qui reste compris entre 0 et 1 ($0 < \varrho < 1$). Nous avons

$$X_1 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{2(1 + \varrho)}, \quad X_3 = x_3 + \frac{x_3 - x_2}{2(2 - \varrho)},$$

$$X_2 = x_2 + \frac{1 - \varrho}{2(1 - 2\varrho)}(x_2 - x_1) = x_2 - \frac{\varrho}{2(2\varrho - 1)}(x_3 - x_2); \quad \left(\varrho \neq \frac{1}{2} \right),$$

$$X_2 = +\infty \quad \left(\varrho = \frac{1}{2} \right),$$

et nous déduisons que le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve le signe de la fonction sur l'intervalle I si et seulement si:

6.2.1. $I \subseteq [X_1, X_3]$ lorsque $\varrho = \frac{1}{2}$.

6.2.2. $I \subseteq [X_1, \min(X_2, X_3)]$ lorsque $\varrho < \frac{1}{2}$. Dans ce cas on a $X_1 < X_2, X_1 < X_3$ et nous avons $X_2 < , =, \text{ respectivement } > X_3$ suivant que $\varrho < , =, \text{ respectivement } > \frac{7 - 2\sqrt{6}}{5} (= 0,420 \dots)$.

6.2.3. $I \subseteq [\max(X_1, X_2), X_3]$ lorsque $\varrho > \frac{1}{2}$. Dans ce cas on a $X_1 < < X_3, X_2 < X_3$ et nous avons $X_1 < , =, \text{ respectivement } > X_2$ suivant que $\varrho > , =, \text{ respectivement } < \frac{2\sqrt{6} - 2}{5} (= 0,579 \dots)$.

6.3 Considérons aussi le cas $n = 4$, les noeuds étant symétriquement distribués par rapport à un certain point de l'axe réelle, donc en supposant que $x_2 + x_3 = x_1 + x_4$. Sur ce cas on peut déjà apercevoir les diverses circonstances qui peuvent se présenter. La discussion dépend du paramètre $\tau = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_4 - x_3}$, qui reste positif. Si nous posons $x_2 - x_1 = u$, nous avons $x_3 - x_2 = \tau u, x_4 - x_3 = u$ et

$$X_1 = x_1 - \frac{u(\tau + 1)(\tau + 2)}{2(\tau^2 + 5\tau + 5)}, \quad X_2 = x_2 + \frac{u\tau(\tau + 1)}{2(\tau^2 - \tau - 1)},$$

$$X_3 = x_3 - \frac{u\tau(\tau + 1)}{2(\tau^2 - \tau - 1)}, \quad X_4 = x_4 + \frac{u(\tau + 1)(\tau + 2)}{2(\tau^2 + 5\tau + 5)}.$$

Nous en déduisons

$$X_2 - X_1 = u \frac{2\tau^2(\tau + 2)^2 - 5\tau(\tau + 2) - 6}{(\tau^2 - \tau - 1)(\tau^2 + 5\tau + 5)},$$

$$X_4 - X_2 = u(\tau + 1) \frac{\tau^2(\tau + 2)^2 - 7\tau(\tau + 2) - 6}{(\tau^2 - \tau - 1)(\tau^2 + 5\tau + 5)},$$

$$X_3 - X_2 = u\tau \frac{\tau^2 - 2\tau - 2}{\tau^2 - \tau - 1}.$$

Si nous posons

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{9 + \sqrt{73}}}{2} - 1 = 1,094 \dots$$

$$\tau_2 = \frac{\sqrt{9 + \sqrt{73}}}{\sqrt{2}} - 1 = 1,961 \dots$$

$$\tau_3 = 1 + \sqrt{3} = 2,732 \dots$$

les nombres τ_1, τ_2, τ_3 sont les valeurs (uniques) de τ pour lesquelles on a $X_2 = X_1, X_2 = X_4, X_2 = X_3$ respectivement. Il résulte alors que l'intervalle $[Z^-, Z^+]$ se réduit à $[X_2, X_3], [X_1, X_4]$ respectivement $[X_3, X_2]$ suivant que $0 \leq \tau \leq \tau_1, \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ respectivement $\tau_2 \leq \tau \leq \tau_3$. Si $\tau > \tau_3$ l'intervalle $[Z^-, Z^+]$ n'existe pas.

D'autres valeurs remarquables de τ sont

$$\tau_4 = 1, \tau_5 = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} = 2,186\dots, \tau_6 = 2,$$

pour lesquelles on a $X_2 = x_1$ (et $X_3 = x_4$), $X_2 = x_3$ (et $X_3 = x_2$), $X_2 = x_4$ (et $X_3 = x_1$) respectivement.

7. Il y a des cas particuliers importants dans lesquels on peut affirmer l'existence d'un intervalle $[Z^-, Z^+]$, non nul, sur lequel le polynôme d'interpolation (2) conserve le signe de la fonction.

Désignons par i' le plus grand des indices $i_1, i_2, \dots, i_k$ et par i'' le plus petit des indices $j_1, j_2, \dots, j_m$ définis au no. 4. Nous avons $Z^- < x_{i'}$ et $x_{i''} < Z^+$, donc: si $i' < i''$, l'intervalle $[Z^-, Z^+]$ existe et est non nul (on a $[x_{i'}, x_{i''}] \subset [Z^-, Z^+]$).

L'inégalité $i' < i''$ est vérifiée s'il existe une fonction $\Psi(x)$ définie et non-décroissante sur un intervalle contenant les noeuds et telle que l'on ait

$$\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} = \Psi(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dans ce cas, d'ailleurs, $i_r = r$, $r = 1, 2, \dots, k$, $j_s = n - m + s$, $s = 1, 2, \dots, m$, $i' = k$, $i'' = n - m + 1$ et lorsque $\Psi(x)$ est croissant on a même $i'' - i' \leq 2$ ($m + k \geq n - 1$).

La fonction $\Psi(x)$ existe et est même croissante dans les cas suivants:

7.1. Considérons $p (\geq 2)$ points distincts $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ de l'axe réelle et soient $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$, p nombres positifs. Alors, pour chaque $q = 1, 2, \dots, p - 1$, il existe un polynôme et un seul de degré n , de la forme (6), les noeuds (1) étant compris dans l'intervalle (a_q, a_{q+1}) et vérifiant l'équation différentielle

$$(18) \quad l'' + \left(\sum_{j=1}^p \frac{\sigma_j}{x - a_j} \right) l' + \frac{C(x)}{A(x)} l = 0$$

où $A = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_p)$ et C est un polynôme de degré $p - 2$. Dans ce cas on peut prendre

$$\Psi(x) = - \sum_{j=1}^p \frac{\sigma_j}{x - a_j}$$

qui est bien une fonction croissante sur l'intervalle (a_q, a_{q+1}) .

7.2. Si, en particulier, $p = 2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ ¹⁾ et si nous posons $\sigma_1 = \beta + 1$, $\sigma_2 = \alpha + 1$, l'équation différentielle (18) devient

$$(19) \quad (1 - x^2) l'' - [(\alpha + \beta + 2)x - \beta + \alpha] l' + n(n + \alpha + \beta + 1) l = 0,$$

¹⁾ L'hypothèse $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ n'est pas une restriction essentielle. Par une transformation linéaire on peut passer à un intervalle fini $[a_1, a_2]$ quelconque.

les paramètres réels α, β vérifiant les inégalités $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Dans ce cas (1) sont les racines des polynômes de Jacobi de degré n et de paramètres α, β . Nous avons

$$x_k < \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 2} < x_{n-m+1},$$

donc aussi

$$Z^- < \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 2} < Z^+.$$

7.3. Si (1) sont les racines du polynôme de Laguerre de degré n de paramètre $\alpha > -1$, le polynôme (6) vérifie l'équation différentielle

$$(20) \quad x l'' - (x - \alpha - 1) l' + n l = 0.$$

Dans ce cas, les noeuds sont positifs et nous pouvons prendre $\Psi(x) = 1 - \frac{\alpha + 1}{x}$ qui est bien une fonction croissante pour $x > 0$. Nous avons $Z^- < \alpha + 1 < Z^+$.

7.4. Si (1) sont les racines du polynôme de Hermite de degré n , le polynôme (6) vérifie l'équation différentielle

$$l'' - 2x l' + 2n l = 0.$$

On peut donc prendre $\Psi(x) = 2x$ qui est aussi une fonction croissante. Dans ce cas $Z^- < 0 < Z^+$.

7.5. Nous sommes encore dans le cas précédent si les noeuds sont équidistants. Soient $x_i = x_1 + (i - 1)h$ ($h > 0$), $i = 1, 2, \dots, n$ les noeuds.

La formule

$$\frac{l''(x_{i+1})}{l'(x_{i+1})} - \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} = \frac{2n}{i(n-i)h} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

nous montre que la suite $\left(\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} \right)_{i=1}^n$ est croissante. Nous avons, dans ce

cas, $i' = \left[\frac{n}{2} \right]$, $i'' = \left[\frac{n+1}{2} \right] + 1$ et

$$Z^- < x_1 + \left(\left[\frac{n}{2} \right] - 1 \right) h < x_1 + \left[\frac{n+1}{2} \right] h < Z^+.$$

8. L. Fejér a étudié [1] très en détail le cas des polynômes de Jacobi, en précisant les extrémités Z^-, Z^+ de l'intervalle $[Z^-, Z^+]$.

Ainsi, lorsque les inégalités

$$(21) \quad -1 < \alpha \leq 0, \quad -1 < \beta \leq 0$$

sont vérifiées, on peut obtenir un résultat plus précis. En effet, si nous supposons que

$$(a + \beta + 2)x_i - \beta + a \neq 0, \quad (a + \beta + 2)x_{i+1} - \beta + a \neq 0,$$

nous avons

$$(22) \quad \frac{X_{i+1} - X_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{L(x_i, x_{i+1})}{[(a + \beta + 2)x_i - \beta + a][(a + \beta + 2)x_{i+1} - \beta + a]}$$

où

$$L(u, v) = (a + \beta + 1)(a + \beta + 2)uv - (\beta - a)(a + \beta + 1)(u + v) + (\beta - a)^2 - (a + \beta + 2).$$

Remarquons que $L(u, v)$ est une fonction linéaire de u et de v . Il en résulte que si $u, v \in (-1, 1)$, $L(u, v)$ reste compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $L(1, 1)$, $L(-1, -1)$, $L(1, -1) = L(-1, 1)$. Mais, compte tenant de (21), $L(1, 1) = 4a(a + 1) \leq 0$, $L(-1, -1) = 4\beta(\beta + 1) \leq 0$, $L(1, -1) = L(-1, 1) = -4(a + 1)(\beta + 1) < 0$. On en déduit facilement que nous avons $L(u, v) < 0$ pour $-1 < u, v < 1$.

Nous avons donc $L(x_i, x_{i+1}) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ et la formule (22) et les résultats du no. 4 nous montrent que $Z^- = X_1$, $Z^+ = X_n$.

Les résultats précédents peuvent avoir lieu aussi pour d'autres valeurs des paramètres a, β , par exemple pour $a = \beta = -1$. Si $-2 < a$, $-2 < \beta$, l'équation différentielle (19) est encore vérifiée par un polynôme de degré n ayant toutes ses racines réelles et distinctes. Les (1) sont alors les racines d'un polynôme de Jacobi généralisé de degré n [5]. Mais, ces racines sont des fonctions continues de a, β et les résultats précédents restent valables si a, β diffèrent suffisamment peu de -1 . Si $n \geq 4$ et si $a \rightarrow -2$, $\beta \rightarrow -2$, on a $x_1 \rightarrow -1$, $x_2 \rightarrow -1$, $x_{n-1} \rightarrow 1$, $x_n \rightarrow 1$ et on en déduit que si a, β sont suffisamment près de -2 nous sommes dans les conditions du lemme 1 et l'intervalle $[Z^-, Z^+]$ n'existe pas.

9. Dans le cas des racines du polynôme de Laguerre on peut aussi préciser les nombres Z^-, Z^+ . En étudiant la fonction $x + \frac{1}{\psi(x)} = x + \frac{x - a - 1}{x}$, on trouve facilement que

$$Z^- \leq a + 1 - \sqrt{a + 1} < a + 1 + \sqrt{a + 1} \leq Z^+.$$

Mais, ces délimitations sont assez peu précises. En effet, en faisant $a \rightarrow -1$, nous en déduisons seulement $Z^- \leq Z^+$, quoique, comme nous le verrons plus loin, ici c'est l'inégalité stricte qui est valable. L'équation différentielle (20) a comme solution un polynôme de degré n ayant toutes ses racines réelles et distinctes pour $-2 < a$.

Pour $-2 < a \leq -1$ nous sommes dans le cas des polynômes de Laguerre généralisés de paramètre a [5]. Si $a = -1$, on a $x_1 = 0$ et $x_i >$

> 0 , $i = 2, 3, \dots, n$ sont les racines du polynôme de Laguerre de degré $n-1$ et de paramètre 1. Si $-2 < a < -1$, on a $x_1 < 0$ et $x_i > 0$, $i = 2, 3, \dots, n$. Lorsque $a \rightarrow -2$, x_1, x_2 tendent vers 0 tous les deux et les x_i , $i = 3, 4, \dots, n$ vers les racines (positives) du polynôme de Laguerre de degré $n-2$ et de paramètre 2.

Pour $a = -1$, nous avons

$$\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} = -(n-1), \quad \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Nous avons donc $-\frac{1}{n-1} = Z^- < 1 < Z^+ = x_2 + 1$.

Pour $-2 < a < -1$, nous avons

$$\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} = \frac{x_i - a - 1}{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

qui est négatif pour $i = 1$ et positif pour $i = 2, 3, \dots, n$. Pour $i > 1$, nous avons

$$\frac{X_{i+1} - X_i}{x_{i+1} - x_i} = 1 - \frac{a + 1}{(x_i - a - 1)(x_{i+1} - a - 1)} > 0$$

et nous déduisons que

$$\frac{x_1(x_1 - a)}{x_1 - a - 1} = X_1 = Z^- < 0 < Z^+ = X_2 = \frac{x_2(x_2 - a)}{x_2 - a - 1}.$$

L'intervalle $[Z^-, Z^+]$ existe donc et est non nul pour $-2 < a$. On peut facilement voir que la longueur de cet intervalle tend vers 0 pour $a \rightarrow -2$.

Disons aussi un mot sur le cas où (1) sont les racines du polynôme d'Hermite de degré n . Dans ce cas la fonction $x + \frac{1}{\psi(x)} = x + \frac{1}{2x}$ a un maximum égal à $-\sqrt{2}$ pour $x < 0$ et un minimum égal à $\sqrt{2}$ pour $x > 0$. On en déduit que $Z^- \leq -\sqrt{2} < \sqrt{2} \leq Z^+$.

§2. Conservation de la monotonie de la fonction

10. Nous dirons que le polynôme d'interpolation (2) conserve la monotonie de la fonction (plus exactement: conserve la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I) s'il est non-décroissant sur I pour toute fonction f non-décroissante sur les points (1). Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que l'on ait $F'[f|x] \geq 0$ sur I pour toute fonction f non-décroissante sur les points (1). L'intervalle I peut être supposé non nul

De la formule (8) il résulte que

$$(23) \quad \sum_{i=1}^n h'_i = 0$$

identiquement en x . La transformation d'Abel nous donne alors

$$F'[f|x] = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n h'_j \right) (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(- \sum_{j=1}^i h'_j \right) (f(x_{i+1}) - f(x_i)).$$

Nous en déduisons que le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve la monotonie de la fonction si et seulement si

$$(24) \quad \sum_{j=1}^i h'_j \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

sur I , ou bien si et seulement si

$$(24') \quad \sum_{j=i+1}^n h'_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

sur I .

Si les conditions (24) ou (24') ne sont pas vérifiées, on peut dire que le polynôme d'interpolation (2) ne conserve pas la monotonie de la fonction. On peut alors trouver une fonction f non-décroissante sur les points (1) telle que le polynôme (2) soit décroissant sur un sous-intervalle (non nul) de I .

Le polynôme h_1 est de degré effectif $2n-1 \geq 3$, d'où il résulte que si $F[f|x]$ conserve la monotonie de la fonction, il est croissant sur I pour toute fonction f croissante sur les points (1). On démontre facilement que, sous la même hypothèse, $F[f|x]$ est non-croissant respectivement décroissant sur I pour toute fonction f non-croissante respectivement décroissante sur les points (1). On peut donc dire que si $F[f|x]$ conserve la non-décroissance de la fonction, il conserve aussi la non-croissance, la croissance et la décroissance de la fonction.

11. Nous avons la propriété suivante:

II. Le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ ne conserve la monotonie de la fonction sur aucun voisinage¹⁾ d'un noeud.

En effet, le polynôme h_1 a toutes ses racines réelles et plus exactement le point $X_1 (< x_1)$ comme racine simple et les noeuds $x_2, x_3, \dots, x_n$ comme racines doubles. Il en résulte que la dérivée h'_1 du polynôme h_1 s'annule, en changeant de signe, sur les points $x_2, x_3, \dots, x_n$. On voit de même manière que la dérivée du polynôme h_n s'annule, en changeant de signe, sur les points $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. La propriété II résulte alors, en tenant compte de la première condition (24) et de la dernière condition (24').

¹⁾ Par un voisinage d'un point nous entendons un intervalle contenant ce point comme point intérieur.

Nous avons $h'_1(x_1) = 0$ et le polynôme h_1 est croissant sur les intervalles $(-\infty, x_1)$, (x_n, ∞) (et h_n est décroissant sur les mêmes intervalles). Il en résulte que le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ ne peut conserver la monotonie de la fonction sur un intervalle I que si $I \subseteq [x_1, x_n]$, mais cette condition nécessaire n'est pas, en général, suffisante.

12. Nous avons aussi la propriété suivante:

III. Il existe un voisinage droit de x_1 et un voisinage gauche¹⁾ de x_n sur lesquels le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve la monotonie de la fonction.

Il suffit de démontrer que dans les voisinages considérés les polynômes $\sum_{j=1}^i h_j$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ sont décroissants.

Considérons le polynôme $P_i = \sum_{j=1}^i h_j$ ($1 \leq i \leq n-1$). C'est le polynôme de Lagrange-Hermite (3) qui prend la valeur 1 sur les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_i$, la valeur 0 sur les noeuds $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ et dont la dérivée s'annule sur tous les noeuds. P_i est de degré effectif $2n-1$ et sa dérivée a toutes ses racines réelles et simples. Ces racines sont les noeuds et, d'après le théorème de Rolle, une racine simple dans chacun des intervalles

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{i-1}, x_i), (x_{i+1}, x_{i+2}), \dots, (x_{n-1}, x_n).$$

Le polynôme P_i est alternativement croissant et décroissant dans les $2n-1$ intervalles déterminés par les racines de P'_i .

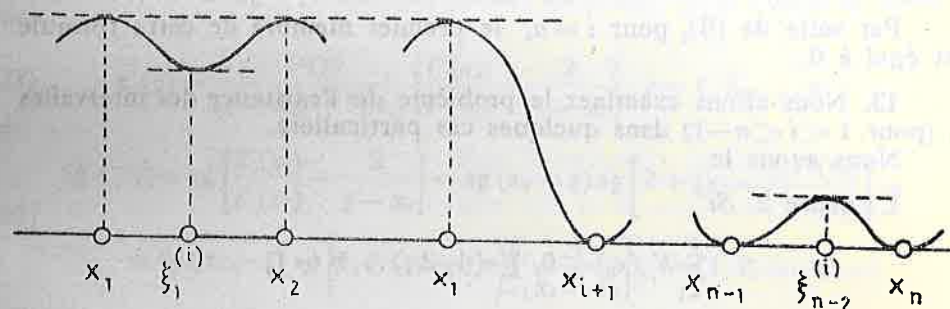


Fig. 1

Sur l'intervalle (x_i, x_{i+1}) P_i est évidemment décroissant, il en résulte donc qu'il est décroissant dans un voisinage droit de x_1 et dans un voisinage gauche de x_n .

La propriété III est donc démontrée. Un examen plus attentif de l'allure des polynômes P_i permet de préciser encore d'avantage la pro-

¹⁾ Un voisinage droit (gauche) de x est un intervalle (non nul) ayant le point x comme extrémité gauche (droite).

priété. Désignons par $\xi_1^{(i)} < \xi_2^{(i)} < \dots < \xi_{n-2}^{(i)}$ les $n-2$ racines différentes des noeuds du polynôme P_i . Posons

$$\eta_i' = \min(\xi_1^{(i+1)}, \xi_2^{(i+2)}, \dots, \xi_{n-1}^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$

$$\eta_i'' = \max(\xi_{i-1}^{(1)}, \xi_{i-1}^{(2)}, \dots, \xi_{i-1}^{(i-1)}), \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Nous avons alors $x_1 < \eta_1' < x_2$, $x_i < \eta_i'$, $\eta_i'' < x_{i+1}$, $i = 2, 3, \dots, n-2$, $x_{n-1} < \eta_{n-1}'' < x_n$.

Désignons par I_i l'intervalle $[\eta_i'', \eta_i']$ lorsque $\eta_i'' < \eta_i'$, $i = 2, 3, \dots, n-2$ et posons aussi $I_1 = [x_1, \eta_1']$, $I_{n-1} = [\eta_{n-1}'', x_n]$. Alors le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve la monotonie de la fonction sur tout intervalle I_i qui existe, en particulier donc sur chacun des intervalles I_1, I_{n-1} .

Remarque. Le polynôme P_i est analogue au polynôme de Lagrange-Hermite Q de degré $2n-2$ qui prend la valeur 1 sur les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_i$, la valeur 0 sur les noeuds $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$ et dont la dérivée s'annule sur les points $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Le polynôme Q intervient dans la démonstration du célèbre théorème de séparation de Tchebycheff-Markoff-Stieltjes (voir, par exemple, G. Szegő [5]).

Le polynôme P_i est croissant pour $x > x_n$, le coefficient de x^{2n-1} dans ce polynôme est donc positif. Cette propriété s'exprime par les inégalités

$$\sum_{j=1}^i \frac{l''(x_j)}{l'^3(x_j)} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Par suite de (8), pour $i = n$, le premier membre de cette formule est égal à 0.

13. Nous allons examiner le problème de l'existence des intervalles I_i (pour $1 < i < n-1$) dans quelques cas particuliers.

Nous avons le

Lemme 2. Si

$$\sum_{j=1}^i h_j'(x_0) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

il existe un voisinage du point x_0 sur lequel le polynôme d'interpolation (2) conserve la monotonie de la fonction.

La propriété résulte immédiatement de la continuité des polynômes $\sum_{j=1}^i h_j'$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ et de la condition (24).

Nous avons aussi le

Lemme 3. Si nous avons

$$(25) \quad h_1'(x_0) < 0, \quad h_n'(x_0) > 0$$

et si la suite

$$(26) \quad h_1'(x_0), h_2'(x_0), \dots, h_n'(x_0)$$

présente une (seule) variation de signe, on peut trouver un voisinage du point x_0 sur lequel le polynôme d'interpolation (2) conserve la monotonie de la fonction.

En effet, soit k le plus grand indice pour lequel $h_k'(x_0) < 0$. Nous avons $1 \leq k \leq n-1$ et

$$h_j'(x_0) \begin{cases} \leq 0, & \text{pour } j = 1, 2, \dots, k, \\ \geq 0, & \text{pour } j = k+1, k+2, \dots, n. \end{cases}$$

Compte tenant de (23) on en déduit

$$\sum_{j=1}^i h_j'(x_0) \leq h_1'(x_0) < 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k,$$

$$\sum_{j=1}^i h_j'(x_0) = - \sum_{j=i+1}^n h_j'(x_0) \leq -h_n'(x_0) < 0, \quad \text{pour } i = k+1, k+2, \dots, n-1$$

et le lemme 3 résulte du lemme 2.

14. En utilisant les résultats précédents, examinons la conservation de la monotonie dans un voisinage d'une racine de la dérivée du polynôme l .

Supposons donc que ξ soit une racine du polynôme l' et formons la suite (26) pour $x_0 = \xi$. Compte tenant de $l'(\xi) = 0$ et $l(\xi) \neq 0$, nous avons

$$(27) \quad h_i'(\xi) = \frac{l^2(\xi)}{(\xi - x_i)^2 l'^2(x_i)} \left[\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} - \frac{2}{\xi - x_i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et

$$(28) \quad \begin{aligned} \operatorname{sg} h_i'(\xi) &= \operatorname{sg} \left[\frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} - \frac{2}{\xi - x_i} \right] = \operatorname{sg}(x_i - \xi) \operatorname{sg} \left[2 + (x_i - \xi) \frac{l'(x_i)}{l''(x_i)} \right] = \\ &= \operatorname{sg}(x_i - \xi) \operatorname{sg} \left[1 + (x_i - \xi) \sum_{j=1}^i \frac{1}{x_i - x_j} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Compte tenant de (11) et $x_1 < \xi < x_n$ on déduit que les conditions (25) sont toujours vérifiées. Mais, la suite

$$x_1 - \xi, x_2 - \xi, \dots, x_n - \xi$$

présente exactement une variation de signe. Il en résulte que

IV. Si ξ est une racine de la dérivée du polynôme (6) et si

$$(29) \quad 2 + (x_i - \xi) \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

il existe un voisinage du point ξ sur lequel le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve la monotonie de la fonction.

15. De l'analyse précédente il résulte que, pour $n = 2$ et pour $n = 3$, la propriété suivante est vraie

V. Le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve la monotonie de la fonction dans un voisinage convenable de chacune des racines de la dérivée l' du polynôme l .

D'ailleurs, si $n = 2$, nous avons

$$h'_1 = -h'_2 = \frac{6(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_1)^2}$$

et le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve la monotonie de la fonction sur l'intervalle I si et seulement si $I \subseteq [x_1, x_2]$.

Pour $n = 3$ la propriété V résulte du fait que, dans ce cas, la suite (26) pour $x_0 = \xi$ présente exactement une variation de signe, quelle que soit la valeur de $h'_2(\xi)$. On peut, d'ailleurs, démontrer par un calcul direct que $h'_1(\xi) + h'_2(\xi) < 0$, dans ce cas.

Considérons encore le cas $n = 4$, les noeuds étant symétriquement distribués, donc $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. Sans restreindre la généralité du problème, on peut prendre $x_1 = -1$, $x_2 = -\varrho$, $x_3 = \varrho$, $x_4 = 1$, où ϱ est un nombre positif < 1 . En effet, par une transformation linéaire, qui conserve toujours la monotonie et la symétrie de la distribution, on ramène le cas des noeuds quelconques au cas $x_1 = -1$, $x_4 = 1$.

Un calcul, qu'il est inutile de reproduire en détail, nous donne

$$h'_1 + h'_2 = \frac{(x^2 - \varrho^2)(x^2 - 1)}{4\varrho^3(1 + \varrho)^3} [7(\varrho^2 + 3\varrho + 1)x^2 - (3\varrho^4 + 9\varrho^3 + 11\varrho^2 + 9\varrho + 3)].$$

Les racines du polynôme l' sont $-\sqrt{\frac{\varrho^2 + 1}{2}}$, 0 et $\sqrt{\frac{\varrho^2 + 1}{2}}$.

Pour $\xi = -\sqrt{\frac{\varrho^2 + 1}{2}}$ et pour $\xi = \sqrt{\frac{\varrho^2 + 1}{2}}$ nous avons

$$h'_1(\xi) + h'_2(\xi) = -\frac{(1 - \varrho)^4(\varrho^2 + 5\varrho + 1)}{32\varrho^3(1 + \varrho)} < 0$$

et pour $\xi = 0$ nous avons

$$h'_1(\xi) + h'_2(\xi) = -\frac{3\varrho^4 + 9\varrho^3 + 11\varrho^2 + 9\varrho + 3}{4\varrho(1 + \varrho)^3} < 0.$$

Dans tous les cas les conditions du lemme 2 sont vérifiées pour $x_0 = \xi$.

Il en résulte que la propriété V est vraie aussi lorsque $n = 4$ et les noeuds sont symétriquement distribués ¹⁾.

16. En vertu de (7) nous avons

$$2 + (x_i - \xi) \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} = 1 + v_i(\xi), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Mais, lorsque les noeuds sont normalement distribués par rapport à un intervalle (no. 5), nous avons $v_i(\xi) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ donc les inégalités (29) sont, à fortiori, vérifiées. Nous avons donc la propriété suivante

VI. Si les noeuds sont normalement distribués par rapport à un intervalle, le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve (le signe et aussi) la monotonie de la fonction dans un voisinage convenable de chacune des racines de la dérivée l' du polynôme l .

Examinons aussi les inégalités (29) dans le cas où les noeuds sont les racines du polynôme de Jacobi de degré n . Puisque $-1 < \xi < 1$, dans ce cas nous avons

$$2 + (x_i - \xi) \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)} = 2 + (x_i - \xi) \frac{(a + \beta + 2)x_i - \beta + a}{1 - x_i^2}$$

qui reste compris entre

$$\frac{2 - \beta + a + (a + \beta)x_i}{1 - x_i} = \frac{(1 - \beta)(1 - x_i) + (1 + a)(1 + x_i)}{1 - x_i}$$

$$\frac{2 + \beta - a - (a + \beta)x_i}{1 + x_i} = \frac{(1 - a)(1 + x_i) + (1 + \beta)(1 - x_i)}{1 + x_i}.$$

On voit que si $-1 < a \leq 1$, $-1 < \beta \leq 1$, les inégalités (29) sont vérifiées. Il est facile de voir que ces inégalités sont vérifiées même si $-1 \leq a \leq 1$, $-1 \leq \beta \leq 1$. Il en résulte que nous avons la propriété suivante :

VII. Si les noeuds sont les racines du polynôme de Jacobi de degré n et dont les paramètres vérifient les inégalités $-1 \leq a \leq 1$, $-1 \leq \beta \leq 1$, le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve la monotonie de la fonction dans un voisinage convenable de chacune des racines du polynôme l' .

§ 3. Sur quelques autres problèmes de conservation de l'allure de la fonction par interpolation

17. On peut chercher à étudier la conservation de la convexité (habituelle, c'est-à-dire d'ordre 1) de la fonction par le polynôme d'interpolation (2).

¹⁾ Le problème si la propriété V est ou non vraie en général reste à résoudre.

La définition de la conservation par $F[f|x]$ de la non-concavité d'ordre 1 est tout à fait analogue à la définition de la conservation de la non-négativité et de la non-décroissance [3].

Si le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ conserve la non-concavité d'ordre 1 il doit conserver aussi la non-convexité d'ordre 1. Mais, la fonction $f=x$ est en même temps non-concave et non-convexe d'ordre 1 sur n'importe quel intervalle. La fonction $F[x|x]$ doit donc se réduire à un polynôme de degré 1. De (3) il résulte alors que le polynôme $F[x|x] = x - \sum_{i=1}^n k_i$ doit être de degré 1. C'est impossible puisque le coefficient de x^{2n-1} dans ce polynôme est égal à

$$(30) \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{l'^2(x_i)} > 0.$$

Nous avons donc la propriété suivante :

VIII. Le polynôme d'interpolation $F[f|x]$ ne peut conserver la non-concavité d'ordre 1 de la fonction sur aucun intervalle (non nul).

18. Lorsque nous étudions la conservation par $F[f|x]$ du signe, de la monotonie ou de la convexité d'ordre 1, le fait que nous supposons la fonction f définie seulement sur les points (1) n'est pas une restriction essentielle. En effet, une telle fonction peut toujours être prolongée sur n'importe quel ensemble linéaire contenant les points x_i . Si donc nous supposons que l'ensemble E est quelconque, nous retrouvons les résultats précédents.

19. Enfin, nous pouvons poser les mêmes problèmes de conservation de l'allure de la fonction pour des polynômes d'interpolation différents du polynôme (2) de L. Fejér. Dans un travail antérieur nous nous sommes occupé, en ce sens, du polynôme de Lagrange [3].

Considérons ici le polynôme d'interpolation de G. Grünwald [2]

$$G[f|x] = \sum_{i=1}^n f(x_i) \left[\frac{l(x)}{(x-x_i)l'(x_i)} \right]^2$$

qui est étroitement lié au polynôme (2) de Fejér.

Le polynôme d'interpolation $G[f|x]$ conserve (évidemment) le signe de la fonction sur tout intervalle. Pour qu'il conserve aussi la monotonie il faut qu'il se réduise à une constante pour la fonction $f=1$. Mais, $G[1|x]$ est un polynôme de degré effectif $2n-2 \geq 2$ puisque le coefficient de x^{2n-2} est encore égal à (30). Nous avons donc la propriété suivante :

IX. Le polynôme d'interpolation $G[f|x]$ ne peut conserver la monotonie de la fonction sur aucun intervalle (non nul).

Cluj, le 20 novembre 1961

BIBLIOGRAPHIE

1. Fejér Leopold — *Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte*. Math. Annalen, 106, 1932, 1—55.
2. Grünwald G. — *On the theory of interpolation*, Acta Math. 75, 1943, 219—245.
3. Popoviciu T. — *Sur la conservation de l'allure de convexité d'une fonction par ses polynômes d'interpolation*, Mathematica, 3 (26) (sous presse).
4. Szegő G. — *Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören*, Math. Zeitschrift, 35, 1932, 579—602.
5. — *Orthogonal Polynomials*, 1959.

ASUPRA CONSERVĂRII, PRIN POLINOMUL DE INTERPOLARE AL LUI L. FEJÉR, A SEMNULUI ȘI A MONOTONIEI FUNCȚIEI

Rezumat

Fie $f=f(x)$ o funcție reală, de variabila reală x , definită pe o mulțime liniară care conține punctele, sau nodurile, (1). Se consideră polinomul $F[f|x]$ al lui L. Fejér (2) care este primul termen în expresia polinomului de interpolare (3) al lui Lagrange-Hermite de gradul $2n-1$ relativ la funcția f și la nodurile (1). Polinomul $F[f|x]$ conservă semnul funcției pe intervalul I , dacă este nenegativ pe I pentru orice f nenegativ pe punctele (1). În prima parte a lucrării se reiau și se completează unele rezultate ale lui L. Fejér (1). Se arată că se pot construi nodurile (1) astfel că $F[f|x]$ să nu conserve semnul funcției pe nici un interval I (diferit de un nod).

Polinomul $F[f|x]$ conservă monotonia funcției pe I dacă el este nedescrescător pe I pentru orice f nedescrescător pe punctele (1). Se arată că $F[f|x]$ nu conservă monotonia funcției pe o vecinătate a unui nod, dar că există o vecinătate dreaptă a lui x_1 și o vecinătate stângă a lui x_n pe care monotonia este conservată. Dacă ξ este o rădăcină a derivatei polinomului (6) și dacă condițiile (29) sînt verificate, există o vecinătate a lui ξ pe care monotonia este conservată de către $F[f|x]$. În particular condiția (29) este verificată dacă nodurile (1) sînt normal distribuite, sau dacă ele sînt rădăcinile polinomului lui Jacobi de gradul n de parametri α, β cu $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

În ultima parte a lucrării se examinează cîteva alte probleme de conservare a alurii funcției prin interpolare. Polinomul $F[f|x]$ nu poate conserva neconcavitatea de ordinul 1 pe nici un interval. Polinomul de interpolare al lui G. Grünwald [2] nu poate conserva monotonia pe nici un interval.

О СОХРАНЕНИИ ЗНАКА И МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИИ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПОЛИНОМОМ L. FEJÉR-a

Краткое содержание

Пусть $f=f(x)$ действительная функция действительного переменного x , определенная на линейном множестве, содержащем точки или узлы (1). Рассматривается полином $F[f(x)]$ L. Fejér-a (2), являющийся первым членом для выражения интерполяционного полинома (3) Ла-

гранжа-Эрмита, $(2n-1)$ -й степени относительно функции f и узлов (1). Полином $F[f|x]$ сохраняет знак функции на интервале I , если он является неотрицательным на I , для любого неотрицательного на f точках (1). В первой части работы вновь рассматриваются и дополняются некоторые результаты Л. Fejér-а. Указывается возможность построения узлов (1) так, чтобы $F[f|x]$ не сохраняла знак функции ни на одном интервале I (отличного от узла).

Полином $F[f|x]$ сохраняет монотонность функции на I , если он является неубывающим на I для любой неубывающей f на точках (1). Показывается, что $F[f|x]$ не сохраняет монотонность функции в окрестности некоторого узла, но существует правая окрестность x_1 и левая окрестность x_n , где монотонность сохраняется. Если ξ — корень производного полинома (6) и если условия (29) удовлетворяются, то существует окрестность ξ , где $F[f|x]$ сохраняет монотонность. В частности, условие (29) удовлетворяется, если узлы (1) нормально расположены или если они являются корнями полинома Якоби n -ой степени от параметров α, β , где $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

В последней части работы рассматриваются некоторые другие задачи сохранения вида функции при интерполяции. Полином $F[f|x]$ не может сохранить невогнутость первого порядка ни на одном интервале. Интерполяционный полином Г. Грюнвальда [2] не может сохранить монотонность ни на одном интервале.