

54

COMUNICĂRILE

ACADEMIEI

REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Nr. 8

TOMUL XIII

1963

EXTRAS



EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

O PROBLEMĂ DE MINIMUM ÎN TEORIA INTERPOLĂRII

DE
DUMITRU RIPIANU

Comunicare prezentată de academician T. POPOVICIU în ședința din 18 mai 1963

Se tratează următoarea problemă:
Se consideră ecuația diferențială liniară cu coeficienți reali constanți

$$y'' + C_1 y' + C_2 y = 0. \quad (1)$$

Se înseamnă cu $\varphi(x)$ integrala ecuației (1) care satisface condițiile $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ și cu h cea mai mică rădăcină pozitivă a lui $\varphi'(x)$, în cazul când $\varphi'(x)$ are asemenea rădăcini.

Se mai înseamnă cu $\mathcal{H}$ mulțimea tuturor ecuațiilor de forma (1) pentru care numărul h există — bine înțeles că în general h diferă de la o ecuație la alta — cu $m_i = |c_i|$ ($i = 1, 2$) și în sfârșit cu $\mathcal{A}$ mulțimea perechilor (a_1, a_2) de numere pozitive a_1, a_2 care au proprietatea că relația de tip de la Vallée Poussin

$$1 \leq a_1 m_1 h + a_2 m_2 h^2 \quad (2)$$

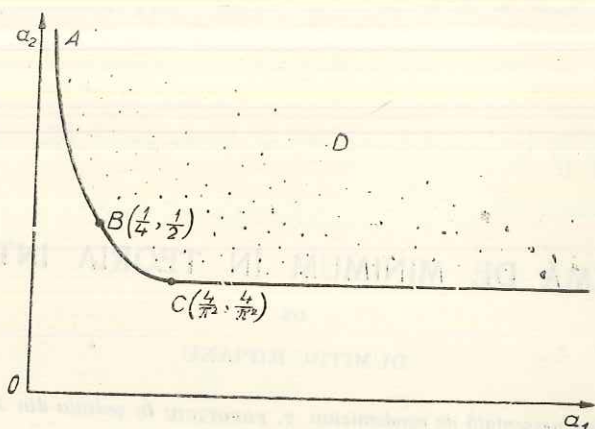
are loc pentru orice ecuație din $\mathcal{H}$.

O pereche (a_1, a_2) din $\mathcal{A}$ este reprezentată printr-un punct de coordonate (a_1, a_2) dintr-un plan P raportat la două axe perpendiculare Oa_1, a_2 . În acest caz, mulțimea $\mathcal{A}$ este reprezentată de un anumit domeniu D din planul P , mai precis din cadrantul I al axelor.

Evident că domeniul D este nemărginit, deoarece, după relația (2) dacă perechea $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}$, atunci orice pereche $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ cu $\bar{a}_1 \geq a_1, \bar{a}_2 \geq a_2$ aparține și ea mulțimii $\mathcal{A}$.

În această notă se determină frontiera C a domeniului D și perechile minime în raport cu câteva funcții $f(a_1, a_2)$ de forma cea mai simplă. O pereche $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ din $\mathcal{A}$ se numește minimă în raport cu funcția $f(a_1, a_2)$, definită pe tot domeniul D , dacă $f(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \min_{(a_1, a_2) \in \mathcal{A}} f(a_1, a_2)$.

TEOREMA 1. Frontiera C a domeniului D este definită (figura) în felul următor:



1. pentru $0 < a_1 \leq \frac{1}{4}$, C constă din arcul de curbă $\widehat{AB}$ (înfinit în direcția BA) de ecuații parametrice

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1-s}{\ln s} \cdot \frac{2(1-s) + (1+s) \ln s}{1-s^2 + (1+s^2) \ln s}, \\ a_2 &= -\frac{(1-s)^2}{s \ln^2 s} \cdot \frac{1-s^2 + 2s \ln s}{1-s^2 + (1+s^2) \ln s}, \end{aligned} \quad (3)$$

în care parametrul s parcurge intervalul $[0, 1]$. Arcul are ca asimptotă axa Oa_2 ;

2. pentru $\frac{1}{4} \leq a_1 \leq \frac{4}{\pi^2}$, C constă din arcul de curbă $\widehat{BC}$ de ecuații parametrice

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2(1 - \cos s) - s \sin s}{s(\sin s - s \cos s)}, \\ a_2 &= \frac{2(1 - \cos s)(s - \sin s)}{s^2(\sin s - s \cos s)}, \end{aligned} \quad (4)$$

în care s parcurge intervalul $[0, \pi]$;

3. pentru $a_1 \geq \frac{4}{\pi^2}$, C constă din paralela de ecuație $a_2 = \frac{4}{\pi^2}$. Domeniul D este marcat prin puncte în figură.

Ecuația carteziană a arcului $\widehat{AB}$ este

$$\begin{aligned} F(a_1, a_2) &= \frac{1}{a_1 a_2 \sqrt{2}} \left\{ -4a_1^4 - 4a_1^2 a_2 + (1-a_1)^2 a_2^2 + \right. \\ &+ [2a_1^2 + (1+a_1)a_2] \sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2} \left. \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \ln \frac{1}{4a_1^3} (2a_1^2(1-a_1) + a_2(1-4a_1-a_1^2) + \\ &+ (1-a_1) \sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2} - \sqrt{2} \{4a_1^4(1- \\ &- 2a_1-a_1^2) + 4a_1^2(1-a_1)(1-3a_1)a_2 + (1-8a_1+14a_1^2+a_1^4)a_2^2 + (1-a_1)[2a_1^2(1- \\ &- a_1) + a_2(1-4a_1-a_1^2)] \sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2} \}^{\frac{1}{2}}) = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

iar ecuația arcului $\widehat{BC}$

$$\begin{aligned} G(a_1, a_2) &= -\frac{1}{2\sqrt{2}a_1 a_2} \left\{ 4a_1^4 + 4a_1^2 a_2 - (1-a_1)^2 a_2^2 + \right. \\ &+ [2a_1^2 + (1+a_1)a_2] \sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2} \left. \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \arctg \frac{1}{\sqrt{2}(a_2-a_1)} \left\{ 2a_1^3 + (1-a_1^2)a_2 - 2a_2^2 + \right. \\ &+ (1-a_1) \sqrt{4a_1^4 + 4a_1^2(1-a_1)a_2 + (1-6a_1+a_1^2)a_2^2} \left. \right\}^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Dacă se fixează valoarea lui $a_1 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ în (5) sau $a_1 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{\pi^2}\right)$ în (6), se poate obține prin rezolvarea ecuațiilor $F(a_1, a_2) = 0$, respectiv $G(a_1, a_2) = 0$, valoarea minimă a lui a_2 corespunzătoare valorii considerate a lui a_1 , adică valoarea minimă a lui a_2 pentru care — pentru valoarea lui a_1 considerată — perechea (a_1, a_2) aparține mulțimii $\mathcal{A}$.

Se poate face o observație analogă în cazul când se fixează valoarea lui $a_2 \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ în (5) sau $a_2 \in \left(\frac{4}{\pi^2}, \frac{1}{2}\right)$ în (6).

TEOREMA 2. 1) Perechea minimă în raport cu funcția $f(a_1, a_2) = a_1 a_2$ este perechea $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

2) Perechea minimă în raport cu funcția $f(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ este perechea $\left(\frac{1}{\cos \sigma}, \frac{1}{2(1+\cos \sigma)(1-2\cos \sigma)}\right)$, unde σ este rădăcina din intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ a ecuației $s = 2 \sin s$.

3) Perechea minimă în raport cu funcția $f(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2$ este perechea (4) în care $s = \varphi$ este rădăcina din intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ a ecuației

$$s^3 - 2 \frac{1 - \cos s}{\sin s} s^2 + 4(1 - \cos s)s - 4 \sin s(1 - \cos s) = 0.$$

Punctul reprezentativ al acestei perechi este punctul de pe frontiera C cel mai apropiat de originea O a axelor.

Cu ajutorul teoremei 1 se pot determina perechi minime în raport cu diferite funcții $f(a_1, a_2)$ crescătoare în raport cu cel puțin una din variabile. Se va observa în încheiere că datorită unui rezultat obținut de O. A r a m ă în lucrarea [2], concluziile din această notă se aplică în studiul aceleiași probleme de interpolare referitoare la ecuații diferențiale de ordinul 2 cu coeficienți variabili, liniare și neliniare.

Academia R.P.R. Filiala Cluj,
Institutul de Calcul

О ЗАДАЧЕ МИНИМУМА ИЗ ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

РЕЗЮМЕ

В этой заметке определяются минимальные элементы множества $\mathcal{A}$ пар положительных чисел (a_1, a_2) с тем свойством, что если $\mathcal{H}$ является множеством уравнений типа (1), имеющих интеграл $\varphi(x)$, проверяющий условия $\varphi = 0$, $\varphi'(0) = 1$ и для которых $\varphi'(x)$ имеет положительные корни, тогда имеет место соотношение (2), где $m_i = |c_i|$ ($i = 1, 2$) а h является самым маленьким положительным корнем $\varphi'(x)$ для любого уравнения (1) из $\mathcal{H}$.

UN PROBLÈME DE MINIMUM DE LA THÉORIE DE L'INTERPOLATION

RÉSUMÉ

L'auteur détermine les éléments minima de l'ensemble $\mathcal{A}$ de paires de nombres positifs (a_1, a_2) , muni de la propriété que si $\mathcal{H}$ est l'ensemble des équations de la forme (1) dont l'intégrale est $\varphi(x)$, qui satisfait aux

conditions $\varphi_0(0)=0$, $\varphi'(0)=1$, pour lesquelles $\varphi'(x)$ a des racines positives, on aura la relation (2), où $m_i = |c_i|$ ($i = 1, 2$) et h est la plus petite racine positive de $\varphi'(x)$, quelle que soit l'équation (1) dans $\mathcal{H}$.

BIBLIOGRAFIE

1. D. RIPIANU, Asupra inegalității lui Ch. de la Vallée Poussin în cazul ecuațiilor diferențiale de ordinul al doilea, St. cerc. mat. Cluj, 1963, XIV, 1.
2. O. ARAMĂ, O problemă de interpolare lacunară cu soluții ale ecuațiilor diferențiale, St. cerc. mat. Cluj, 1963, XIX, 1.