

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
FILIALA IAȘI

STUDII ȘI CERCETĂRI
ȘTIINȚIFICE

MATEMATICĂ

ANUL XIV

FASC. 2

1963

EXTRAS

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ASUPRA UNOR POLINOAME DE INTERPOLAȚIE

DE

D. RIPIANU

(Cluj)

1. În lucrarea [1] prof. Tiberiu Popoviciu dă un procedeu de a construi polinoamele $P_i(x)$ de grad $m \geq 1$ ($i = 0, 1, \dots, m$) care au proprietatea că dacă funcția $f(x)$ definită pe mulțimea de puncte $E = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ este convexă de ordinul n pentru toate valorile lui $n = -1, 0, \dots, m-1$, atunci polinomul

$$(1) \quad P(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) P_i(x)$$

numit în [1] „polinom de interpolație” al funcției $f(x)$ este convex de ordinul n pe intervalul $I = [a, b]$ ($a < b$). La finele punctului 14 din lucrarea citată se definesc anumite polinoame „minimale” de interpolație alese printre polinoamele de interpolație mai sus amintite și se determină polinomul minimal de interpolație (1) în cazurile $m = 1$, $m = 2$, cu noduri oarecare (se presupune întotdeauna $x_0 < x_1 < \dots < x_m$) și în cazul $m = 3$ când $x_1 + x_2 = x_0 + x_3$. În Nota de față se determină folosind procedeul indicat în [1], polinomul (1) în cazul $m = 3$ cu noduri oarecare, apoi se dă — folosind iarăși procedeul prof. T. Popoviciu — un procedeu cu ajutorul căruia se poate determina polinomul minimal de interpolație $P(x)$ din (1) — care se va numi prescurtat polinomul $P(x)$ — pentru orice m și orice noduri $x_0, x_1, \dots, x_m$.

Procedeul indicat de prof. T. Popoviciu este cuprins în formulele (15) și (17) din [1] și constă în următoarele:

Se consideră expresiile:

$$(2) \quad S_{0,i}(x) \equiv 0; \quad S_{1,i}(x) = - \sum_{j=i+1}^m P_j(x),$$

$$(3) \quad \begin{cases} S_{s,i}(x) = -\frac{1}{\prod_{v=1}^{s-1} (x_i - x_{i-v})} \sum_{j=i+1}^m P_j(x) \prod_{v=1}^{s-1} (x_j - x_{i-v}), (s=2, \dots, i) \\ S_{i+1,i}(x) = -\frac{1}{\prod_{v=0}^{i-1} (x_i - x_v)} \sum_{j=i+1}^m P_j(x) \prod_{v=0}^{i-1} (x_j - x_v), \end{cases}$$

$$(4) \quad \lambda_{j,i} = \sup_{x \in I} \left[S_{i-j,i}^{(i-j)}(x) - S_{i+1,i}^{(i-j)}(x) - \sum_{v=0}^{j-1} \lambda_{v,i} \frac{(x-a)^{j-v}}{(j-v)!} \right],$$

$$(j = 0, 1, \dots, i),$$

cu convenția ca în cazul $j = 0$, suma $\sum_{v=0}^{j-1}$ să se înlocuiască cu zero și

$$(5) \quad P_i(x) = S_{i+1,i}(x) + \sum_{j=0}^i \lambda_{j,i} \frac{(x-a)^{i-j}}{(i-j)!}.$$

În toate aceste expresii $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Dacă se cunoaște $P_m(x), P_{m-1}(x), \dots, P_{i+1}(x)$, atunci se determină $P_i(x)$ în felul următor:

1. Se determină pe $S_{0,i}(x), S_{1,i}(x)$ cu ajutorul lui (2), iar $S_{2,i}(x), S_{3,i}(x), \dots, S_{i+1,i}(x)$ cu ajutorul lui (3).

2. Se determină $\lambda_{0,i}, \lambda_{1,i}, \dots, \lambda_{i,i}$ cu ajutorul lui (4).

3. Se determină $P_i(x)$ cu ajutorul lui (5).

Se ia $P_m(x) = \varrho(x-a)^m$ unde ϱ este o constantă pozitivă și se determină succesiv $P_{m-1}(x), P_{m-2}(x), \dots, P_0(x)$, în care caz (1) dă polinomul $P(x)$ în chestiune.

2. Se va determina mai întâi polinomul (1) în cazul $m=3$ pentru noduri x_0, x_1, x_2, x_3 oarecare.

Se va lua deci $P_3(x) = \varrho(x-a)^3$ și se va face mai întâi $i=2$. (2) dă în acest caz

$$S_{0,2}(x) = 0, S_{1,2}(x) = -P_3(x),$$

iar (3)

$$S_{2,2}(x) = -\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} P_3(x), S_{3,2}(x) = -\frac{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} P_3(x).$$

Cu aceste expresii (4) dă

$$\lambda_{0,2} = \sup_{x \in I} (S_{2,2}^{(2)}(x) - S_{3,2}^{(2)}(x)) = 6\varrho \sup_{x \in I} \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (x-a),$$

deci

$$(6) \quad \lambda_{0,2} = 6\varrho \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (b-a).$$

$$\lambda_{1,2} = \sup_{x \in I} [S_{1,2}'(x) - S_{3,2}'(x) - \lambda_{0,2}(x-a)] =$$

$$= 3\varrho \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \sup_{x \in I} [(x_2 + x_3 - x_0 - x_1)(x-a)^2 - 2(x_3 - x_1)(b-a)(x-a)].$$

Dacă se înseamnă pentru comoditate

$$(7) \quad x - a = (b-a)u$$

atunci

$$\lambda_{1,2} = 3\varrho \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (b-a)^2 \sup_{u \in [0,1]} Q_1(u),$$

cu

$$Q_1(u) = (x_2 + x_3 - x_0 - x_1)u^2 - 2(x_3 - x_1)u.$$

Se va considera o funcție $\varphi(u)$ de variabila u , continuă pentru $u \in [0,1]$ și a cărei variație în acest interval este dată de tabloul I,

TABLOUL I

u	0	$\bar{u}$	1
$\varphi(u)$	—	0	+
$\varphi'(u)$	$\varphi(0) + \varphi(\bar{u}) \uparrow \varphi(1)$		

Dacă $\varphi(1) > \varphi(0)$, atunci $\max_{u \in [0,1]} \varphi(u) = \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi(1) - \varphi(0)$,

iar dacă $\varphi(1) \leq \varphi(0)$, atunci $\max_{u \in [0,1]} \varphi(u) = \varphi(0) = \varphi(0) + 0$, așa că în ambele cazuri $\max_{u \in [0,1]} \varphi(u) = \varphi(0) + F[\varphi(1) - \varphi(0)]$, unde s-a însemnat

$$(8) \quad F(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) = \begin{cases} x & \text{dacă } x > 0. \\ 0 & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

Evident că dacă $\varphi(u)$ este monotonă pentru $u \in [0,1]$, relația de mai sus se păstrează. Așadar, dacă funcția $\varphi(u)$, continuă pentru $u \in [0,1]$ este monotonă în acest interval sau variază conform tabloului I, atunci $\max_{u \in [0,1]} \varphi(u) = \varphi(0) + F[\varphi(1) - \varphi(0)]$.

De altfel, este evident că dacă polinomul $Q(u)$ îndeplinește condițiile cerute mai sus funcției $\varphi(u)$ și $Q(0) \leq 0$, atunci și polinomul $R(u)$ cu $R'(u) = Q(u)$ îndeplinește aceste condiții. Se deduce de aici că polinomul $Q(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i$ cu $a_i \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) îndeplinește aceste condiții (ceea ce apare de altfel evident folosind teorema lui Descartes pentru $Q'(u)$). Așadar:

a) Dacă polinomul $Q(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i$ este monoton în intervalul $[0,1]$ sau variază conform tabloului I (cu $Q(u)$ în locul lui $\varphi(u)$), atunci

$$(9a) \quad \sup_{u \in [0,1]} Q(u) = \max_{u \in [0,1]} Q(u) = Q(0) + F[Q(1) - Q(0)].$$

b) Dacă în particular $a_i \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) aceeași relație are loc.

c) Dacă $a_i \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) și $a_0 = 0$, atunci

$$(9c) \quad \sup_{u \in [0,1]} Q(u) = F[Q(1)] \geq 0.$$

Or, $Q_1(u)$ îndeplinește condițiile b), așa că

$$(10) \quad \lambda_{1,2} = 3\varrho \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) (b - a)^2.$$

$$\lambda_{2,2} = \sup_{x \in I} \left[S_{0,2}(x) - S_{3,2}(x) - \lambda_{0,2} \frac{(x - a)^2}{2} - \lambda_{1,2}(x - a) \right] =$$

$$= \frac{\varrho(b - a)^3}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \sup_{u \in [0,1]} Q_2(u),$$

unde $Q_2(u) = (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)u^3 - 3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)u^2 -$

$$- 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)u \text{ îndeplinește condițiile c), așa că}$$

$$(11) \quad \lambda_{2,2} = \frac{\varrho(b - a)^3}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) -$$

$$- 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)].$$

Se deduce deci din (5) cu expresiile (6), (10) și (11)

$$(12) \quad P_2(x) = S_{3,2}(x) + \frac{\lambda_{0,2}}{2}(x - a)^2 + \lambda_{1,2}(x - a) + \lambda_{2,2} =$$

$$= \varrho \left\{ - \frac{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (x - a)^3 + 3 \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (b - a)(x - a)^2 + \right.$$

$$+ 3 \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) (b - a)^2 (x - a) +$$

$$+ \frac{(b - a)^3}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) -$$

$$\left. - 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)] \right\}.$$

Se va face acum $i = 1$. În acest caz (2) dă $S_{0,1}(x) = 0$,

$$S_{1,1}(x) = -[P_2(x) + P_3(x)] = \varrho \left\{ \frac{(x_3 - x_2)(x_2 + x_3 - x_0 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (x - a)^3 - \right.$$

$$- 3 \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} (b - a)(x - a)^2 -$$

$$- 3 \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) (b - a)^2 (x - a) -$$

$$\left. - \frac{(b - a)^3}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) - 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)] \right\},$$

$$S_{2,1}(x) = -\frac{1}{x_1 - x_0} [(x_2 - x_0)P_2(x) + (x_3 - x_0)P_3(x)] = \varrho \left\{ \frac{(x_3 - x_0)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} (x - a)^3 - \right.$$

$$- 3 \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} (b - a)(x - a)^2 -$$

$$\left. - 3 \frac{x_3 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) (b - a)^2 (x - a) - \right.$$

$$- \frac{(b - a)^3}{x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) - 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)] \Big\},$$

așa că

$$\lambda_{0,1} = \sup_{x \in I} (S'_{1,1}(x) - S'_{2,1}(x)) = 3\varrho \frac{(b - a)^2 (x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} \times$$

$$\times \sup_{u \in [0,1]} [x_3 - x_1 + F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) - (x_3 - x_1)(1 - u)^2],$$

$$\lambda_{0,1} = 3\varrho \frac{(b - a)^2 (x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} [x_3 - x_1 + F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)],$$

$$(13) \quad \lambda_{1,1} = \sup_{x \in I} (-S_{2,1}(x) - \lambda_{0,1}(x - a)) = \varrho(b - a)^3 \sup_{u \in [0,1]} Q_3(u), \text{ cu}$$

$$Q_3(u) = - \frac{(x_3 - x_0)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} u^3 + 3 \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} u^2 + 3 \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_0} \left[\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_0} + \right.$$

$$+ \frac{x_1 - x_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) \Big] u +$$

$$+ \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) -$$

$$\left. - 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)] \right],$$

așa că dacă $x_1 + x_2 - x_0 - x_3 \leq 0$, atunci

$$Q'_3(0) < 0, \quad Q'_3(1) = 3 \frac{(x_3 - x_2)(x_0 + x_3 - x_1 - x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \geq 0,$$

iar dacă $x_1 + x_2 - x_0 - x_3 > 0$, atunci

$$Q'_3(u) = 3 \frac{x_3 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} (1 - u) [(x_3 - x_0)u - x_0 + 2x_1 - x_3].$$

Condițiile (9 a) fiind îndeplinite, avem deci

$$(14) \quad \lambda_{1,1} = \varrho(b - a)^3 \left\{ \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} F[(x_3 - x_1)(-x_0 + 3x_2 - 2x_3) - \right.$$

$$- 3(x_3 - x_2)F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3)] + \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F \left[\frac{1}{x_1 - x_0} (-x_0^2 - 3x_1^2 + \right.$$

$$+ 3x_0x_1 + x_0x_2 - 2x_0x_3 + 3x_1x_3 - x_2x_3) + 3F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) \Big] \Big\}.$$

(5) dă deci cu expresiile (13) și (14)

$$P_1(x) = S_{2,1}(x) + \lambda_{0,1}(x - a) + \lambda_{1,1} = \varrho \left\{ \frac{(x_3 - x_0)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} (x - a)^3 - \right.$$

$$- 3 \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} (b - a)(x - a)^2 + 3 \left[\frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} - \right.$$

$$(15) \quad \left. - \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) \right] (b - a)^2 (x - a) +$$

$$+ \frac{x_3 - x_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} F \left[\frac{1}{x_1 - x_0} (-x_0^2 - 3x_1^2 + 3x_0x_1 + x_0x_2 - 2x_0x_3 + \right.$$

$$\left. + 3x_1x_3 - x_2x_3) + 3F(x_1 + x_2 - x_0 - x_3) \right] (b - a)^3 \Big\}.$$

Se va face în sfârșit $i=0$. În acest caz (2) dă $S_{0,0}(x) = 0$,

$$S_{1,0}(x) = \varrho \left[\frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)} (b-x)^3 - (b-a)^3 \left\{ \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} F[(x_3-x_1)(-x_0+3x_2-2x_3) - \right. \right. \\ \left. \left. - 3(x_3-x_2)F(x_1+x_2-x_0-x_3)] + \frac{x_3-x_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} F \left[\frac{1}{x_1-x_0} (-x_0^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 3x_1^2 + 3x_0x_1 + x_0x_2 - 2x_0x_3 + 3x_1x_3 - x_2x_3) + 3F(x_1+x_2-x_0-x_3) \right] \right\} \right],$$

așa că (4) dă

$$\lambda_{0,0} = \sup_{x \in I} [-S_{1,0}(x)] = \varrho \left\{ \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)} + \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \times \right. \\ (16) \quad \times F[(x_3-x_1)(-x_0+3x_2-2x_3) - 3(x_3-x_2)F(x_1+x_2-x_0-x_3)] + \\ \left. + \frac{x_3-x_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} F \left[\frac{1}{x_1-x_0} (-x_0^2 - 3x_1^2 + 3x_0x_1 + x_0x_2 - 2x_0x_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 3x_1x_3 - x_2x_3) + 3F(x_1+x_2-x_0-x_3) \right] \right\} (b-a)^3.$$

(5) dă deci cu expresia (16)

$$(17) \quad P_0(x) = S_{1,0}(x) + \lambda_{0,0} = \varrho \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)} (b-x)^3.$$

Dacă în expresiile $P_3(x) = \varrho(x-a)^3$, (12), (15) și (17) se face $\varrho = 1$, $x_0+x_3 = x_1+x_2$, se obțin expresiile $P_0(x) = (b-x)^3$,

$$P_1(x) = -(2k+1)(b-x)^3 + 3k(b-a)(b-x)^2 + (b-a)^3 F(1-k), \\ P_2(x) = -(2k+1)(x-a)^3 + 3k(b-a)(x-a)^2 + (b-a)^3 F(1-k),$$

cu $k = \frac{x_1-x_0}{x_2-x_1} = \frac{x_3-x_2}{x_2-x_1}$, date în [1].

3. Se va indica acum un procedeu de calcul al coeficienților $\lambda_{j,i}$ din (5) pentru m oarecare și $x_0, x_1, \dots, x_m$ iarăși arbitrari. Pentru comoditate se va face coeficientul ϱ din expresia lui $P_m(x)$ egal cu 1, așa că $P_m(x) = (x-a)^m$. Dacă $\varrho \neq 1$, se deduce din (2), (3), (4), (5) că polinoamele $P_i(x)$ se obțin înmulțind cu ϱ polinoamele $P_i(x)$ obținute în ipoteza $\varrho=1$.

Dacă se înseamnă

$$(18) \quad A_i(x) = \sum_{j=0}^i \lambda_{j,i} \frac{(x-a)^{i-j}}{(i-j)!} \quad (i=0,1,\dots,m-1), \\ A_m(x) = P_m(x) = (x-a)^m,$$

atunci (3) și (5) dau

$$(19) \quad P_i(x) = A_i(x) - \sum_{j=i+1}^m \frac{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{i-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})} P_j(x).$$

Dacă se înseamnă mai departe

$$(20) \quad \Pi_p(x) = \prod_{s=0}^p (x-x_s),$$

atunci

$$(21) \quad P_i(x) = \sum_{s=0}^{m-i} \frac{\Pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\Pi'_{m-s}(x_i)} A_{m-s}(x), \quad (i=0,1,\dots,m-1).$$

Relația (21) apare ca evidentă, dacă se observă pe de o parte că (19) dă

$$P_{m-1}(x) = A_{m-1}(x) - \frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\dots(x_{m-1}-x_{m-2})} P_m(x) = \\ = A_{m-1}(x) + \frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-1})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\dots(x_{m-1}-x_{m-2})(x_{m-1}-x_m)} P_m(x) = \\ = A_{m-1}(x) + \frac{\Pi'_m(x_m)}{\Pi'_m(x_{m-1})} P_m(x),$$

așa că (21) are loc pentru $i=m-1$ (pentru $i=m$ este evidentă), iar pe de alta că dacă se presupune că (21) are loc pentru $i=m, m-1, \dots, m-p$ atunci tot (19) dă

$$P_{m-p-1}(x) = A_{m-p-1}(x) - \\ - \sum_{j=m-p}^m \frac{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{m-p-2})}{(x_{m-p-1}-x_0)(x_{m-p-1}-x_1)\dots(x_{m-p-1}-x_{m-p-2})} P_j(x) = \\ = A_{m-p-1}(x) - \sum_{j=m-p}^m \frac{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{m-p-2})}{(x_{m-p-1}-x_0)(x_{m-p-1}-x_1)\dots(x_{m-p-1}-x_{m-p-2})} \times \\ \times \sum_{s=0}^{m-j} \frac{\Pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\Pi'_{m-s}(x_j)} A_{m-s}(x) = A_{m-p-1}(x) - \\ - \sum_{s=0}^p A_{m-s}(x) \sum_{j=m-p}^{m-s} \frac{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{m-p-2})}{(x_{m-p-1}-x_0)(x_{m-p-1}-x_1)\dots(x_{m-p-1}-x_{m-p-2})} \frac{\Pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\Pi'_{m-s}(x_j)},$$

așa că spre a dovedi că (21) are loc pentru $i=m-p-1$, este destul de a stabili că

$$- \sum_{j=m-p}^{m-s} \frac{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{m-p-2})}{(x_{m-p-1}-x_0)(x_{m-p-1}-x_1)\dots(x_{m-p-1}-x_{m-p-2})} \frac{\Pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\Pi'_{m-s}(x_j)} = \\ = \frac{\Pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\Pi'_{m-s}(x_{m-p-1})}.$$

Or, această relație se scrie

$$\sum_{j=m-p-1}^{m-s} \frac{1}{\Pi'(x_j)} = 0, \text{ cu } \Pi(x) = (x-x_{m-p-1})(x-x_{m-p})\dots(x-x_{m-s}),$$

și se obține pentru $z_1 = x_{m-p-1}, z_2 = x_{m-p}, \dots, z_n = z_{p-s+2} = x_{m-s}$ din relația

$$(22) \quad \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{\Pi'(z_{\sigma})} = 0 \text{ cu } \Pi(z) = (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n),$$

care este o identitate elementară bine cunoscută.

Se deduce deci din (21) și (18)

$$(23) \quad P_t(x) = \sum_{\sigma=0}^m C_{\sigma,t} \frac{(x-a)^{\sigma}}{\sigma!} \quad (i=0,1,\dots,m-1),$$

unde

$$(24) \quad C_{\sigma,t} = \sum_{s=0}^{m-i} \lambda_{m-\sigma-s, m-s} \frac{\Pi'_{m-s}(x_{m-s})}{\Pi'_{m-s}(x_t)},$$

cu convenția de a înlocui pe $\lambda_{m-\sigma-s, m-s}$ cu zero cînd $m-\sigma-s < 0$, (2), (3) și (23) dau așadar

$$(25) \quad \begin{cases} S_{1,t}(x) = - \sum_{j=i+1}^m \frac{(x-a)^{\sigma}}{\sigma!} \sum_{\sigma=0}^m C_{\sigma,j} = - \sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^{\sigma}}{\sigma!} \sum_{j=i+1}^m C_{\sigma,j}, \\ S_{s,t}(x) = - \sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^{\sigma}}{\sigma!} \sum_{j=i+1}^m \frac{(x_j-x_{t-1})(x_j-x_{t-2})\dots(x_j-x_{t-s+1})}{(x_t-x_{t-1})(x_t-x_{t-2})\dots(x_t-x_{t-s+1})} C_{\sigma,j}, \\ \quad (s=2,3,\dots,i) \\ S_{i+1,t}(x) = - \sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^{\sigma}}{\sigma!} \sum_{j=i+1}^m \frac{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{t-1})}{(x_t-x_0)(x_t-x_1)\dots(x_t-x_{t-1})} C_{\sigma,j}. \end{cases}$$

Se deduce deci din (4) și (25) (în care se înlocuiește indicele j cu μ și se face apoi $s=i-j$)

$$\lambda_{j,t} = \sup_{x \in I} \left[- \sum_{\sigma=0}^m \frac{((x-a)^{\sigma})^{(i-j)}}{\sigma!} \sum_{\mu=i+1}^m \frac{(x_{\mu}-x_{t-1})(x_{\mu}-x_{t-2})\dots(x_{\mu}-x_{j+1})}{(x_t-x_{t-1})(x_t-x_{t-2})\dots(x_t-x_{j+1})} C_{\sigma,\mu} + \right. \\ \left. + \sum_{\sigma=0}^m \frac{((x-a)^{\sigma})^{(i-j)}}{\sigma!} \sum_{\mu=i+1}^m \frac{(x_{\mu}-x_{t-1})(x_{\mu}-x_{t-2})\dots(x_{\mu}-x_0)}{(x_t-x_{t-1})(x_t-x_{t-2})\dots(x_t-x_0)} C_{\sigma,\mu} - \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,t} \frac{(x-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} \right],$$

cu condiția ca în cazul $j=i-1$ să se înlocuiască cu 1 expresia

$$\frac{(x_{\mu}-x_{t-1})(x_{\mu}-x_{t-2})\dots(x_{\mu}-x_{j+1})}{(x_t-x_{t-1})(x_t-x_{t-2})\dots(x_t-x_{j+1})}.$$

Dacă se înseamnă

$$\frac{(x_{\mu}-x_j)(x_{\mu}-x_{j-1})\dots(x_{\mu}-x_0)}{(x_t-x_j)(x_t-x_{j-1})\dots(x_t-x_0)} - 1 = \frac{(x_{\mu}-x_t) I(x_j, x_t; x_j, x_{j-1}, \dots, x_0)}{(x_t-x_j)(x_t-x_{j-1})\dots(x_t-x_0)},$$

așa că

$$(26) \quad I(x_{\mu}, x_t; x_j, x_{j-1}, \dots, x_0) = \frac{(x_{\mu}-x_j)(x_{\mu}-x_{j-1})\dots(x_{\mu}-x_0) - (x_t-x_j)(x_t-x_{j-1})\dots(x_t-x_0)}{x_{\mu}-x_t},$$

se înlocuiește în expresia lui $\lambda_{j,t}$ de mai sus pe $C_{\sigma,\mu}$ cu expresia lui (24) și se ține seama că

$$\sum_{\mu=i+1}^m \sum_{s=0}^{m-\mu} c_{\sigma,\mu} = \sum_{s=0}^{m-i-1} \sum_{\mu=i+1}^{m-s} c_{\sigma,\mu},$$

atunci se obține

$$\lambda_{j,t} = \sup_{x \in I} \left[\sum_{\sigma=0}^m \frac{((x-a)^{\sigma})^{(i-j)}}{\sigma!} \sum_{s=0}^{m-i-1} \lambda_{m-\sigma-s, m-s} \Pi'_{m-s}(x_{m-s}) \times \right. \\ \left. \times \sum_{\mu=i+1}^{m-s} \frac{(x_{\mu}-x_t)(x_{\mu}-x_{t-1})\dots(x_{\mu}-x_{j+1})}{(x_t-x_{t-1})(x_t-x_{t-2})\dots(x_t-x_0)} \frac{I(x_{\mu}, x_t; x_j, x_{j-1}, \dots, x_0)}{\Pi'_{m-s}(x_{\mu})} - \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,t} \frac{(x-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} \right] \quad (j=0,1,\dots,i-1),$$

$$\lambda_{i,t} = \sup_{x \in I} \left[\sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^{\sigma}}{\sigma!} \sum_{s=0}^{m-i-1} \lambda_{m-\sigma-s, m-s} \Pi'_{m-s}(x_{m-s}) \times \right. \\ \left. \times \sum_{\mu=i+1}^{m-s} \frac{(x_{\mu}-x_{t-1})(x_{\mu}-x_{t-2})\dots(x_{\mu}-x_0)}{(x_t-x_{t-1})(x_t-x_{t-2})\dots(x_t-x_0) \Pi'_{m-s}(x_{\mu})} - \sum_{\mu=0}^{i-1} \lambda_{\mu,t} \frac{(x-a)^{i-\mu}}{(i-\mu)!} \right],$$

adică

$$\lambda_{j,t} = \sup_{x \in I} \left[\sum_{\sigma=0}^m \frac{((x-a)^{\sigma})^{(i-j)}}{\sigma!} \sum_{s=0}^{m-i-1} \frac{\lambda_{m-\sigma-s, m-s} (x_{m-s}-x_0)\dots(x_{m-s}-x_{m-s-1})}{(x_t-x_0)(x_t-x_1)\dots(x_t-x_{t-1})} a_{j,i,s} - \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,t} \frac{(x-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} \right]. \quad (27)$$

$$\lambda_{i,t} = \sup_{x \in I} \left[\sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^{\sigma}}{\sigma!} \sum_{s=0}^{m-i-1} \lambda_{m-\sigma-s, m-s} \frac{(x_{m-s}-x_0)\dots(x_{m-s}-x_{m-s-1})}{(x_t-x_0)(x_t-x_1)\dots(x_t-x_{t-1})} b_{i,s} - \sum_{\mu=0}^{i-1} \lambda_{\mu,t} \frac{(x-a)^{i-\mu}}{(i-\mu)!} \right], \quad (28)$$

unde

$$a_{j,t,s} = \frac{I(x_{t+1}, x_t; x_j, x_{j-1}, \dots, x_0)}{(x_{t+1}-x_0)\dots(x_{t+1}-x_j)(x_{t+1}-x_{t+2})\dots(x_{t+1}-x_{m-s})} + \\ (29) \quad + \sum_{\mu=i+2}^{m-s} \frac{I(x_{\mu}, x_t; x_t, x_{j-1}, \dots, x_0)}{(x_{\mu}-x_0)\dots(x_{\mu}-x_j)(x_{\mu}-x_{t+1})\dots(x_{\mu}-x_{\mu-1})(x_{\mu}-x_{\mu+1})\dots(x_{\mu}-x_{m-s})}, \\ b_{i,t,s} = \sum_{\mu=i+1}^{m-s} \frac{1}{(x_t-x_0)\dots(x_t-x_{t-1})(x_{\mu}-x_t)\dots(x_{\mu}-x_{\mu-1})(x_{\mu}-x_{\mu+1})\dots(x_{\mu}-x_{m-s})}.$$

Dacă se ține seama de (22) și de (26), se obține deci

$$(30a) \quad a_{j,t,s} = (x_t-x_0) \cdot \dots (x_t-x_j) \sum_{\mu=0}^j \frac{1}{[(x_{\mu}-x_0)\dots(x_{\mu}-x_{\mu-1}) \times \\ \times (x_{\mu}-x_{\mu+1})\dots(x_{\mu}-x_j)(x_{\mu}-x_t)\dots(x_{\mu}-x_{m-s})]} =$$

$$(30b) \quad = -(x_t - x_0) \dots (x_t - x_j) \sum_{\mu=0}^{m-s} \frac{1}{\mu!} [(x_\mu - x_0) \dots (x_\mu - x_j) (x_\mu - x_t) \times \\ \times (x_\mu - x_{t+1}) \dots (x_\mu - x_{\mu-1}) (x_\mu - x_{\mu+1}) \dots (x_\mu - x_{m-s})], \quad (j \geq 1)$$

$$(30c) \quad a_{0,t,s} = -i/(x_0 - x_{t+1})(x_0 - x_{t+2}) \dots (x_0 - x_{m-s}),$$

$$(30d) \quad b_{i,s} = -1/(x_t - x_{t+1})(x_t - x_{t+2}) \dots (x_t - x_{m-s}).$$

Cu această expresie a lui $b_{i,s}$, (28) se scrie

$$(31) \quad \lambda_{i,t} = \sup_{x \in I} \left\{ - \left[\sum_{\sigma=0}^m \frac{(x-a)^\sigma}{\sigma!} \sum_{s=0}^{m-i-1} \lambda_{m-\sigma-s, m-s} \times \right. \right. \\ \times \frac{(x_{m-s} - x_0)(x_{m-s} - x_1) \dots (x_{m-s} - x_{m-s-1})}{(x_t - x_0) \dots (x_t - x_{t-1})(x_t - x_{t+1}) \dots (x_t - x_{m-s})} + \\ \left. \left. + \sum_{\mu=0}^{i-1} \lambda_{\mu,t} \frac{(x-a)^{\mu}}{(i-\mu)!} \right] \right\}.$$

În expresiile (27) și (31) se respectă, așa cum s-a menționat, convenția introdusă în relația (24). În acest caz dacă se schimbă în suma dublă din (27) indicii σ și s cu indicii $\mu = \sigma + j - i$ și $\varphi = m + j - i - \mu - s$ și se face schimbarea (7), se obține

$$(32) \quad \lambda_{j,t} = \sup_{u \in [0,1]} \left[\sum_{\mu=0}^{m+j-i} \frac{(b-a)^\mu}{\mu!} \sum_{\varphi=F(j+1-\mu)}^{m+j-i-\mu} a_{j,t,m+j-i-\mu-\varphi} \lambda_{\varphi,t-j+\mu+\varphi} \times \right. \\ \times \frac{(x_{t-j+\mu+\varphi} - x_0)(x_{t-j+\mu+\varphi} - x_1) \dots (x_{t-j+\mu+\varphi} - x_{t-j+\mu+\varphi-1})}{(x_t - x_0)(x_t - x_1) \dots (x_t - x_{t-1})} - \\ \left. - \sum_{\mu=1}^j \lambda_{j-\mu,t} \frac{(b-a)^{\mu}}{\mu!} u^\mu \right] \quad (j = 0, 1, \dots, i-1),$$

unde $a_{j,t,m+j-i-\mu-\varphi}$ este dat de (29) sau (30) (în care s-a înlocuit indicii μ cu σ) avem:

$$(33a) \quad a_{j,t,m+j-i-\mu-\varphi} = \frac{I(x_{t+1}, x_t; x_j, x_{t-1}, \dots, x_0)}{(x_{t+1} - x_0) \dots (x_{t+1} - x_j)(x_{t+1} - x_{t+2}) \dots (x_{t+1} - x_{t-j+\mu+\varphi})} + \\ + \frac{I(x_\mu, x_t; x_j, x_{j-1}, \dots, x_0)}{\sum_{\sigma=i+2}^{i-j+\mu+\varphi} (x_\sigma - x_0) \dots (x_\sigma - x_j)(x_\sigma - x_{t+1}) \dots (x_\sigma - x_{\sigma-1})(x_\sigma - x_{\sigma+1}) \dots (x_\sigma - x_{t-j+\mu+\varphi})} =$$

$$(33b) \quad = (x_t - x_0) \dots (x_t - x_j) \sum_{\sigma=0}^j \frac{1}{(x_\sigma - x_0) \dots (x_\sigma - x_{\sigma-1})(x_\sigma - x_{\sigma+1}) \dots (x_\sigma - x_j)} \times \\ \times \frac{1}{(x_\sigma - x_{t+1})(x_\sigma - x_{t+2}) \dots (x_\sigma - x_{t-j+\mu+\varphi})} =$$

$$(33c) \quad = -(x_t - x_0) \dots (x_t - x_j) \sum_{\sigma=i}^{i-j+\mu+\varphi} \frac{1}{(x_\sigma - x_0) \dots (x_\sigma - x_j)(x_\sigma - x_t) \dots (x_\sigma - x_{\sigma-1})} \times \\ \times \frac{1}{(x_\sigma - x_{\sigma+1})(x_\sigma - x_{\sigma+2}) \dots (x_\sigma - x_{t-j+\mu+\varphi})} \quad (j \geq 1)$$

$$(33d) \quad a_{0,t,m-t-\mu-\varphi} = - \frac{1}{(x_0 - x_{t+1})(x_0 - x_{t+2}) \dots (x_0 - x_{t+\mu+\varphi})}.$$

De asemenea, dacă pentru uniformitatea notației se înlocuiesc în (31) indicii σ și s cu indicii $\mu = \sigma$ și $\varphi = m - \mu - s$, se obține

$$(34) \quad \lambda_{i,t} = \sup_{u \in [0,1]} \left\{ - \left[\sum_{\mu=1}^m \frac{(b-a)^\mu}{\mu!} \sum_{\varphi=F(i+1-\mu)}^{m-\mu} \lambda_{\varphi,\mu+\varphi} \times \right. \right. \\ \times \frac{(x_{\mu+\varphi} - x_0)(x_{\mu+\varphi} - x_1) \dots (x_{\mu+\varphi} - x_{\mu+\varphi-1})}{(x_t - x_0) \dots (x_t - x_{t-1})(x_t - x_{t+1}) \dots (x_t - x_{\mu+\varphi})} + \\ \left. \left. + \sum_{\mu=1}^i \lambda_{t-\mu,t} \frac{(b-a)^\mu}{\mu!} u^\mu \right] \right\}.$$

În expresiile (32) și (34), funcția $F(x)$ este funcția definită în (8) și se respectă convenția din (4), adică pentru $j = 0$ în (32) și $i = 0$ în (34) sumele simple se înlocuiesc cu zero. Pentru calculul lui $a_{j,t,m+j-i-\mu-\varphi}$ se poate folosi una din expresiile (33), respectiv (29) sau (30), după cum valorile numerice ale lui i, j, μ, φ fac mai comodă pentru calcul una sau alta din aceste expresii.

De altfel, dacă se înseamnă $\Pi_{x_1, \dots, x_n}(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ și $\left[\frac{x_1, x_2, \dots, x_p; f}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right] = \sum_{s=1}^p \frac{f(x_s)}{\Pi'_{x_1, \dots, x_n}(x_s)}$, ($p \leq n-1$), atunci evident că

$$\left[\frac{x_1, x_2, \dots, x_p; f}{x_1, x_2, \dots, x_n} \right] = \frac{1}{x_1 - x_n} \left(\left[\frac{x_1, x_2, \dots, x_p; f}{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}} \right] - \left[\frac{x_2, x_3, \dots, x_p; f}{x_2, x_3, \dots, x_n} \right] \right),$$

așa că dacă se ia $f(x) \equiv 1$ se obține relația

$$\sum_{s=1}^p \frac{1}{\Pi'_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_s)} = \frac{1}{x_1 - x_n} \left[\sum_{s=1}^p \frac{1}{\Pi'_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}}(x_s)} - \sum_{s=2}^p \frac{1}{\Pi'_{x_2, x_3, \dots, x_n}(x_s)} \right],$$

care se poate folosi la calculul expresiilor (33) (b) și (c).

Așa cum s-a amintit mai sus în (32) și (34) intervin expresiile $\lambda_{0,m}, \lambda_{1,m}, \dots, \lambda_{m,m}$. Se va lua

$$(35) \quad \lambda_{0,m} = m!, \quad \lambda_{1,m} = \lambda_{2,m} = \dots = \lambda_{m,m} = 0.$$

Cu aceste valori și cu convenția $S_{m+1,m}(x) \equiv 0$, (5) dă valoarea $(x-a)^m$ adoptată pentru $P_m(x)$, iar în expresia (32) se poate micșora cu o unitate — dacă $\mu < m+j-i$ — limita superioară de sumare din suma $\sum_{\mu=0}^{m+j-i}$, pentru că dacă $\mu \leq m+j-i-1$, atunci pentru $\varphi = m+j-i-\mu \geq 1$ avem $\lambda_{\varphi,i-j+\mu+\varphi} = \lambda_{\varphi,m} = 0$, așa că (32) se poate scrie

$$\begin{aligned}
 \lambda_{j,i} = & \sup_{u \in [0,1]} \left[m(m-1) \dots (m+j-i+1) \frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})} \times \right. \\
 & \times a_{j,i,0} (b-a)^{m+j-i} u^{m+j-i} + \sum_{\mu=0}^{m+j-i-1} \frac{(b-a)^\mu u^\mu}{\mu!} \times \\
 & \times \sum_{\varphi=F(j+1-\mu)}^{m+j-i-\mu-1} \frac{(x_{i-j+\mu+\varphi}-x_0) \dots (x_{i-j+\mu+\varphi}-x_{i-j+\mu+\varphi-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})} \times \\
 & \times a_{j,i,m+j-i-\mu-\varphi} \lambda_{\varphi,i-j+\mu+\varphi} - \sum_{\mu=1}^j \lambda_{j-\mu,i} \frac{(b-a)^\mu u^\mu}{\mu!} \Big], \\
 & (j=0,1,\dots,i-1).
 \end{aligned}
 \quad (36)$$

Tot aceste valori permit să se reducă — dacă $\mu \leq m-1$ — cu o unitate limita superioară de sumație în suma $\sum_{\varphi}$ din (34):

$$\begin{aligned}
 \lambda_{i,i} = & \sup_{u \in [0,1]} \left\{ - \left[(b-a)^m \frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-1}) u^m}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_m)} + \right. \right. \\
 & + \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{(b-a)^\mu u^\mu}{\mu!} \sum_{\varphi=F(i+1-\mu)}^{m-\mu-1} \lambda_{\varphi,\mu+\varphi} \frac{(x_{\mu+\varphi}-x_0) \dots (x_{\mu+\varphi}-x_{\mu+\varphi-1})}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_{\mu+\varphi})} + \\
 & \left. \left. + \sum_{\mu=1}^i \lambda_{i-\mu,i} \frac{(b-a)^\mu u^\mu}{\mu!} \right] \right\}.
 \end{aligned}
 \quad (37)$$

În (36) și în (37) pentru $i=m-1$, sumele duble lipsesc, avîndu-se respectiv în (32) și (34) $0 \leq j+1-\mu = F(j+1-\mu) = m+j-i-\mu$ și $0 \leq i+1-\mu = F(i+1-\mu) = m-\mu$.

De asemenea, cum s-a specificat referitor la expresiile (32) și (34), dacă în (36) $j=0$ sau în (37) $i=0$, atunci sumele simple lipsesc din aceste expresii. (36) și (30) (b) dau deci

$$\begin{aligned}
 \lambda_{j,m-1} = & \sup_{u \in [0,1]} \left[m(m-1) \dots (j+2) \left(\frac{(x_m-x_0) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} - \right. \right. \\
 & - \frac{(x_m-x_{j+1}) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_{j+1}) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} \Big) (b-a)^{j+1} u^{j+1} - \\
 & \left. - \sum_{\mu=1}^j \lambda_{j-\mu,m-1} \frac{(b-a)^\mu u^\mu}{\mu!} \right], \quad (0 \leq j \leq m-2),
 \end{aligned}
 \quad (38)$$

cu condiția de a înlocui în cazul $j=m-2$ expresia

$$\frac{(x_m-x_{j+1})(x_m-x_{j+2}) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_{j+1})(x_{m-1}-x_{j+2}) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})}$$

cu 1 și în cazul $j=0$ suma simplă cu zero.

(37) dă

$$\begin{aligned}
 \lambda_{m-1,m-1} = & \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} (b-a)^m u^m - \right. \\
 & \left. - \sum_{\mu=1}^{m-1} \lambda_{m-1-\mu,m-1} \frac{(b-a)^\mu u^\mu}{\mu!} \right].
 \end{aligned}
 \quad (39)$$

De altfel, dacă se calculează cu (2), (3) și (4) $\lambda_{j,m-1}$ ($j=0,1,\dots,m-1$), se obțin expresiile (38) și (39).

Relațiile (36), (37), (18), (21) și (1) constituie procedeul propus pentru determinarea polinomului $P(x)$ din (1). (36) și (37) dau pe $\lambda_{j,i}$ ($j \leq i-1$), respectiv pe $\lambda_{i,i}$ cu ajutorul lui $\lambda_{0,p}$, $\lambda_{1,p}$, $\dots$, $\lambda_{p,p}$ ($p=m-1, m-2, \dots, i+1$) și al lui $\lambda_{0,i}$, $\lambda_{1,i}$, $\dots$, $\lambda_{j-1,i}$ respectiv $\lambda_{0,i}$, $\lambda_{1,i}$, $\dots$, $\lambda_{i-1,i}$.

Avînd coeficienții $\lambda_{j,i}$ ($j=0,1,\dots,i$; $i=m, m-1, \dots, 0$), (18) și (21) dau polinoamele $P_i(x)$ ($i=m, m-1, \dots, 0$) iar (1) polinomul $P(x)$ în chestiune.

4. Se vor face cîteva observații asupra procedurii indicat.

1. Relațiile (38) și (39) dau imediat expresia explicită a lui $\lambda_{j,m-1}$ ($j=0,1,\dots,m-1$). Anume, se deduce din (38) și (9c) că dacă $\lambda_{s,m-1} \geq 0$ ($s=0,1,\dots,j-1$), atunci și $\lambda_{j,m-1} \geq 0$. Or, tot (38) dă

$$\lambda_{0,m-1} = m! \frac{(x_m-x_1)(x_m-x_2) \dots (x_m-x_{m-1})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} (b-a) > 0,
 \quad (40)$$

așa că $\lambda_{j,m-1} \geq 0$ ($j=0,1,\dots,m-2$), în care caz (38) și (9c) dau

$$\begin{aligned}
 \lambda_{j,m-1} = & F \left[m(m-1) \dots (j+2) \left(\frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} - \right. \right. \\
 & - \frac{(x_m-x_{j+1})(x_m-x_{j+2}) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_{j+1})(x_{m-1}-x_{j+2}) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} \Big) (b-a)^{j+1} - \\
 & \left. - \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,m-1} \frac{(b-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} \right],
 \end{aligned}
 \quad (41)$$

cu convenția adoptată în (38) referitor la valorile $j=0$ și $j=m-2$, iar (39) și (9c) dau

$$\begin{aligned}
 \lambda_{m-1,m-1} = & F \left[\frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1) \dots (x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1) \dots (x_{m-1}-x_{m-2})} (b-a)^m - \right. \\
 & \left. - \sum_{\mu=0}^{m-2} \lambda_{\mu,m-1} \frac{(b-a)^{m-1-\mu}}{(m-1-\mu)!} \right].
 \end{aligned}
 \quad (42)$$

Cu ajutorul lui (41) și (42) se pot calcula succesiv

$$\lambda_{1,m-1}, \lambda_{2,m-1}, \lambda_{m-1,m-1}.$$

Se obține astfel, de exemplu

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,m-1} &= \frac{m!}{2!} (b-a)^2 \frac{(x_m-x_2)(x_m-x_3)\dots(x_m-x_{m-1})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\dots(x_{m-1}-x_{m-2})} F(x_1 + \\
 &\quad + x_{m-1}-x_0-x_m), \quad (m \geq 3), \\
 (43) \quad \lambda_{2,m-1} &= \frac{m!}{3!} (b-a)^3 \frac{(x_m-x_3)(x_m-x_4)\dots(x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\dots(x_{m-1}-x_{m-2})} \times \\
 &\quad \times F[-(x_m-x_{m-1})(x_{m-1}+2x_m)-(x_0+x_1+x_2)x_{m-1}+(-x_0+2x_1+2x_2)x_m + \\
 &\quad + x_0x_1+x_0x_2-2x_1x_2-3(x_m-x_2) F(x_1+x_{m-1}-x_0-x_m)], \\
 &\quad (m \geq 5), \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

2. În particular, (41) cu $m=3$, $j=0$ și $j=1$ dă pe $\lambda_{0,2}$ și $\lambda_{1,2}$ din (6) și (10), (42) cu $m=3$ dă pe $\lambda_{2,2}$ din (11); (36) cu $m=3$, $j=0$ și $i=1$ dă pe $\lambda_{0,1}$ din (13); (37) cu $m=3$, $i=1$ dă pe $\lambda_{1,1}$ din (14), iar pentru $m=3$, $i=0$, pe $\lambda_{0,0}$ din (15).

3. Se va mai deduce din (36) relația care dă pe $\lambda_{j,m-2}$ ($j=0,1,\dots,m-4$; pentru $j=m-3$, expresia suferă ușoare modificări).

$$\begin{aligned}
 \lambda_{j,m-2} &= \sup_{u \in [0,1]} \left\{ m(m-1)\dots(j+3) \times \right. \\
 &\quad \times \left[-\frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-3})(x_m-x_{m-1})}{(x_{m-2}-x_0)(x_{m-2}-x_1)\dots(x_{m-2}-x_{m-3})(x_{m-1}-x_{m-2})} + \right. \\
 &\quad + \frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0)\dots(x_{m-1}-x_j)(x_{m-1}-x_{m-2})(x_{m-2}-x_{j+1})\dots(x_{m-2}-x_{m-3})} - \\
 &\quad - \frac{(x_m-x_{j+1})(x_m-x_{j+2})\dots(x_m-x_{m-3})}{(x_{m-2}-x_{j+1})(x_{m-2}-x_{j+2})\dots(x_{m-2}-x_{m-3})} \Big] (b-a)^{j+2} u^{j+2} + \\
 &\quad + \sum_{\mu=0}^{j+1} \left[\frac{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\dots(x_{m-1}-x_{m-3})}{(x_{m-2}-x_0)(x_{m-2}-x_1)\dots(x_{m-2}-x_{m-3})} - \right. \\
 &\quad - \frac{(x_{m-1}-x_{j+1})(x_{m-1}-x_{j+2})\dots(x_{m-1}-x_{m-3})}{(x_{m-2}-x_{j+1})(x_{m-2}-x_{j+2})\dots(x_{m-2}-x_{m-3})} \Big] \times \\
 (44) \quad &\quad \times F \left[m(m-1)\dots(j+3-\mu) \left(\frac{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\dots(x_{m-1}-x_{m-2})} - \right. \right. \\
 &\quad - \frac{(x_m-x_{j+2-\mu})(x_m-x_{j+3-\mu})\dots(x_m-x_{m-2})}{(x_{m-1}-x_{j+2-\mu})(x_{m-1}-x_{j+3-\mu})\dots(x_{m-1}-x_{m-2})} \Big) (b-a)^{j+2-\mu} - \\
 &\quad - \sum_{\sigma=0}^{j-\mu} \lambda_{\sigma,m-1} \frac{(b-a)^{j+1-\mu-\sigma}}{(j+1-\mu-\sigma)!} \frac{(b-a)^\mu u^\mu}{\mu!} - \sum_{\mu=1}^j \lambda_{j-\mu,m-2} \frac{(b-a)^\mu u^\mu}{\mu!} \Big\}.
 \end{aligned}$$

5. În ultimul punct al Notei dăm expresia explicită a lui $P(x)$ din (1) în cazul particular când nodurile sînt echidistante, adică $x_s = x_0 + ls$ ($s=0,1,\dots,m$; $l>0$)

În acest scop se va dovedi mai întîi că

$$(45) \quad \lambda_{0,i} = \frac{m!}{(m-i)!} (b-a)^{m-i}; \quad \lambda_{j,i} = 0 \quad (j=1,2,\dots,i), \\
 (i=m,m-1,\dots,0).$$

Demonstrația relațiilor (45) este imediată. Se va presupune că aceste relații au loc pentru $i=m-1, m-2, \dots, m-p$ ($1 \leq p \leq m-1$). În acest caz (36) dă

$$\begin{aligned}
 \lambda_{j,m-p-1} &= (b-a)^{j+p+1} \sup_{u \in [0,1]} \left[m(m-1)\dots(j+p+2) m(m-1)\dots \times \right. \\
 &\quad \times (m-p) l^{p+1} a_{j,m-p-1,0} u^{j+p+1} + \sum_{\mu=j+1}^{j+p} (m-p+\mu-j-1) \times \\
 (46) \quad &\quad \times (m-p+\mu-j-2)\dots(m-p) \frac{m!}{(p+j+1-\mu)!} l^{\mu-j} a_{j,m-p-1,p+j+1-\mu} \frac{u^\mu}{\mu!} - \\
 &\quad - \frac{1}{(b-a)^{j+p+1}} \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,m-p-1} \frac{(b-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} u^{j-\mu} \Big], \quad (0 \leq j \leq m-p-2).
 \end{aligned}$$

Or, (30 b) dă

$$\begin{aligned}
 a_{j,i,s} &= (-1)^{m-s-1} \frac{i(i-1)\dots(i-j)}{l^{m-s-i}} \sum_{\mu=i}^{m-s} \frac{(-1)^\mu}{(\mu-i)!(m-s-\mu)! \mu(\mu-1)\dots(\mu-j)} = \\
 (47) \quad &= (-1)^{m-s-i+1} \frac{i(i-1)\dots(i-j)}{(m-s-i)! l^{m-s-i}} \sum_{a=0}^{m-s-i} \frac{(-1)^a C_{m-s-i}^a}{(a+i-j)(a+i-j+1)\dots(a+i)}
 \end{aligned}$$

Ne vom servi de relația

$$(48) \quad \sum_{a=0}^M (-1)^a \frac{C_M^a}{(a+h)(a+h+1)\dots(a+h+\lambda)} = \frac{(h-1)!}{\lambda!(M+\lambda+1)(M+\lambda+2)\dots(M+\lambda+h)} \\
 (M, h, \lambda \text{ întregi}; M \geq 0, h \geq 1, \lambda \geq 0),$$

a cărei demonstrație este imediată, dacă în relația

$$\int_0^x \sigma^{h-1} (1-\sigma)^M d\sigma = \sum_{a=0}^M (-1)^a C_M^a \frac{x^{a+h}}{a+h}$$

se face $x=\varphi$ și se integrează apoi expresiile obținute în raport cu φ între 0 și x :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x d\varphi \int_0^\varphi \sigma^{h-1} (1-\sigma)^M d\sigma &= \int_0^x \sigma^{h-1} (1-\sigma)^M d\sigma \int_\sigma^x d\varphi = \\
 &= \int_0^x (x-\sigma) \sigma^{h-1} (1-\sigma)^M d\sigma = \sum_{a=0}^M (-1)^a C_M^a \frac{x^{a+h+1}}{(a+h)(a+h+1)}.
 \end{aligned}$$

Dacă în relația obținută se face $x=\varphi$ și se integrează apoi expresiile obținute în raport cu φ între 0 și x , se obține

$$\sum_{a=0}^M (-1)^a C_M^a \frac{x^{a+h+2}}{(a+h)(a+h+1)(a+h+2)} = \int_0^x \sigma^{h-1} (1-\sigma)^M \frac{(x-\sigma)^2}{2!} d\sigma.$$

Continuând procedeul, obținem relația

$$\sum_{a=0}^M (-1)^a C_M^a \frac{x^{a+h+\lambda}}{(a+h)(a+h+1)\dots(a+h+\lambda)} = \int_0^x \sigma^{h-1}(1-\sigma)^M \frac{(x-\sigma)^\lambda}{\lambda!} d\sigma,$$

care pentru $x=1$ dă

$$(49) \quad \sum_{a=0}^M \frac{(-1)^a C_M^a}{(a+h)(a+h+1)\dots(a+h+\lambda)} = \frac{1}{\lambda!} \int_0^1 \sigma^{h-1}(1-\sigma)^{M+\lambda} d\sigma.$$

Or,

$$\int_0^1 \sigma^{h-1}(1-\sigma)^{M+\lambda} d\sigma = \frac{h-1}{M+\lambda+1} \int_0^1 \sigma^{h-2}(1-\sigma)^{M+\lambda+1} d\sigma \quad (h \geq 2).$$

Dacă se înlocuiește în această relație pe h cu $h-p$, pe λ cu $\lambda+p$, apoi se face $p=0,1,\dots,h-2$, se obține valoarea lui $\int_0^1 \sigma^{h-1}(1-\sigma)^{M+\lambda} d\sigma^*$, care împreună cu (49) dă relația (48). Dacă se face în această relație $M=m-s-i$, $h=i-j$, $\lambda=j$, se obține cu ajutorul lui (47)

$$(50) \quad a_{j,ts} = \frac{(-1)^{m-s-i+1}}{l^{m-s-i}} \frac{i!}{j!} \frac{1}{(m-s-i)!(m-s-i+j+1)\dots(m-s)}$$

în care caz (46) se scrie (făcând în suma întâi $\mu = \sigma + j$)

$$\lambda_{j,m-p-1} = \frac{m!}{(p+j+1)!} (b-a)^{p+j+1} \sup_{u \in [0,1]} \left[-C_{p+j+1}^j u^j \times \right. \\ \left. \times \sum_{\sigma=1}^{p+1} (-1)^\sigma C_{p+1}^\sigma u^\sigma - \frac{(p+j+1)!}{m!(b-a)^{p+j+1}} \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,m-p-1} \frac{(b-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} u^{j-\mu} \right],$$

deci conform formulei binomului

$$(51) \quad \lambda_{j,m-p-1} = \frac{m!}{(p+j+1)!} (b-a)^{p+j+1} \sup_{u \in [0,1]} \left\{ C_{p+j+1}^j u^j [1 - \right. \\ \left. - (1-u)^{p+1}] - \frac{(p+j+1)!}{m!(b-a)^{p+j+1}} \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,m-p-1} \frac{(b-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} u^{j-\mu} \right\},$$

așa că

$$(52) \quad \lambda_{0,m-p-1} = \frac{m!}{(p+1)!} (b-a)^{p+1},$$

și

$$\lambda_{1,m-p-1} = \frac{m!}{(p+1)!} (b-a)^{p+2} \sup_{u \in [0,1]} [-u(1-u)^{p+1}] = 0.$$

Dacă $\lambda_{j,m-p-1} = 0$ ($j=1,2,\dots,j_1 \leq m-p-3$), atunci (51) și (52) dau

*) pentru $h=1$ valoarea integralei obținute direct coincide cu cea obținută făcând $h=1$ în expresia obținută.

$$\lambda_{j_1+1,m-p-1} = \frac{m!}{(p+1)!(j_1+1)!} (b-a)^{p+j_1+2} \sup_{u \in [0,1]} [-u^{j_1+1}(1-u)^{p+1}] = 0.$$

Așadar

$$(53) \quad \lambda_{j,m-p-1} = 0 \quad (j=1,2,\dots,m-p-2).$$

(37) dă deci cu ajutorul lui (45) (care are loc prin ipoteză pentru $i=m, m-1,\dots,m-p$) și al lui (52) și (53)

$$(54) \quad \lambda_{m-p-1,m-p-1} = C_m^{p+1} (b-a)^m \sup_{u \in [0,1]} \{ -u^{m-p-1} [1 + \\ + \sum_{\mu=m-p}^{m-1} (-1)^{p+1-m+\mu} C_{p+1}^{m-\mu} u^{p+1-m-\mu} + (-1)^{p+1} u^{p+1}] \} = \\ = C_m^{p+1} (b-a)^m \sup_{u \in [0,1]} [-u^{m-p-1}(1-u)^{p+1}] = 0.$$

Or, (41) dă

$$\lambda_{j,m-1} = F \left[m(m-1)\dots(j+1)(b-a)^{j+1} - \sum_{\mu=0}^{j-1} \lambda_{\mu,m-1} \frac{(b-a)^{j-\mu}}{(j-\mu)!} \right],$$

așa că $\lambda_{0,m-1} = m! (b-a)$ și $\lambda_{1,m-1} = 0$. Dacă deci $\lambda_{j,m-1} = 0$ ($j=1,2,\dots,j_1 \leq m-3$), atunci relația de mai sus dă $\lambda_{j_1+1,m-1} = 0$, așa că $\lambda_{j,m-1} = 0$ ($j=1,2,\dots,m-2$), în care caz (42) dă $\lambda_{m-1,m-1} = 0$. Așadar relațiile (45) au loc pentru $i=m-1$ (pentru $i=m$ relațiile sînt evidente pe (35)). Or, din (53) și (54) rezultă că dacă relațiile (45) au loc pentru $i=m-1, m-2,\dots,m-p$, ele au loc și pentru $i=m-p-1$, ceea ce dovedește că aceste relații au loc pentru toate valorile $m, m-1,\dots,0$ ale acestui indice.

Se deduce deci din (18), (45) și (21)

$$(55) \quad P_i(x) = (-1)^i \frac{m!}{i!} \sum_{\sigma=i}^m (-1)^\sigma \frac{(b-a)^{m-\sigma}(x-a)^\sigma}{(\sigma-i)!(m-\sigma)!} = C_m^i (x-a)^i (b-x)^{m-i} \\ (i=0,1,\dots,m-1)$$

Se poate observa că (55) dă și pentru $i=m$ valoarea $P_m(x) = (x-a)^m$ adoptată. (1) și (55) dau deci

$$(56) \quad P(x) = \sum_{\sigma=0}^m a_\sigma (x-a)^\sigma, \\ a_\sigma = (-1)^\sigma \frac{m!}{(m-\sigma)!} (b-a)^{m-\sigma} \sum_{i=0}^\sigma \frac{(-1)^i f(x_i)}{i!(\sigma-i)!}.$$

Polinomul lui Bernstein de gradul m relativ la intervalul $[a, b]$ are expresia

$$B_m(x) = \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{\varphi=0}^m C_m^\varphi f(x_\varphi) (x-a)^\varphi (b-x)^{m-\varphi},$$

unde

$$(57) \quad x_\varphi = a + \frac{\varphi}{m} (b-a) \quad (\varphi=0,1,\dots,m).$$

Dacă se ține seamă că $\sum_{\varphi=0}^m \sum_{\sigma=\varphi}^m C_{\varphi,\sigma} = \sum_{\sigma=0}^m \sum_{\varphi=0}^{\sigma} C_{\varphi,\sigma}$, avem deci

$$\begin{aligned} B_m(x) &= \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{\varphi=0}^m C_m^{\varphi} f(x_{\varphi}) \sum_{s=0}^{m-\varphi} (-1)^s C_{m-\varphi}^s (b-a)^{m-\varphi-s} (x-a)^{s+\varphi} = \\ &= \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{\varphi=0}^m (-1)^{\varphi} C_m^{\varphi} f(x_{\varphi}) \sum_{\sigma=\varphi}^m (-1)^{\sigma} C_{m-\varphi}^{\sigma-\varphi} (b-a)^{m-\sigma} (x-a)^{\sigma} = \\ &= \frac{1}{(b-a)^m} \sum_{\sigma=0}^m a_{\sigma} (x-a)^{\sigma}, \end{aligned}$$

cu a_{σ} dat în (56). Așadar,

$$(58) \quad P(x) = (b-a)^m B_m(x).$$

Dacă deci în (1) nodurile x_i au distribuția din (57), atunci polinomul (1) este — în afară de un factor constant — polinomul lui Bernstein de gradul m relativ la intervalul $[a, b]$ luat în considerație.

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Дается, — используя прием указанный проф. Т. Поповичем (1), — метод установления определенных „минимальных интерполяционных полиномов“ которые сохраняют в одном интервале (a, b) ($a < b$) выпуклость порядков $-1, 0, 1, \dots, m-1$ функции $f(x)$ определяемой на множестве точек $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$.

Предлагаемый прием содержится в формулах (36), (37), (18), (21) и (1) из Заметки.

SUR CERTAINS POLYNOMES D'INTERPOLATION

RÉSUMÉ

Dans cette Note — en utilisant un procédé indiqué par le prof. T. Popoviciu dans [1] — on donne un procédé de détermination de certains „polynomes d'interpolation minimaux“ qui conservent dans un intervalle $[a, b]$ ($a < b$) la convexité d'ordres $-1, 0, \dots, m-1$, de la fonction $f(x)$ définie sur l'ensemble des points $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$.

Le procédé proposé est contenu dans les formules (36), (37), (18), (21) et (1).

BIBLIOGRAPHIE

1. Tiberiu Popoviciu, Sur la conservation de l'allure de convexité d'une fonction par ses polynomes d'interpolation. *Mathematica*, 3 (26), 2, p. 311-329 (1961).