

ÜBER EINE KLASSE VON TERNÄREN QUASIGRUPPEN

Von

F. RADÓ (Cluj, Rumänien) und M. HOSSZÚ (Miskolc)

(Vorgelegt von G. HAJÓS)

1. In der Arbeit [2] wurde die folgende Frage gestellt: welche (binäre und ternäre) Loops haben die Eigenschaft, daß alle ihre Loop-Haut-Isotope, die dasselbe neutrale Element besitzen, zusammenfallen? Es wurde dort bewiesen, daß unter den binären Loops nur die Gruppen diese Eigenschaft besitzen. Bezüglich der entsprechenden Frage für ternäre Loops wurden zwei gleichwertige gewebegeometrische Bedingungen gefunden, von denen eine — eine Verallgemeinerung der Reidemeisterschen Schließungsbedingung — für die Theorie der räumlichen Gewebe von Wichtigkeit erscheint.

Wir führen in dieser Arbeit den ternären Fall auf die Untersuchung von binären Systemen zurück und geben die Lösung im reellen Falle unter Benutzung der Differenzierbarkeit an. Es wird gezeigt, daß in diesem Falle die ins Auge gefaßte Eigenschaft den ternären Gruppen und nur diesen zukommt. Wenn man aber auch die lokalen Loops in die Untersuchung heranzieht, dann bestehen die Lösungen der gestellten Frage aus den Loop-Isotopen der lokalen Quasigruppen mit der Operation

$$(1) \quad t = \frac{x+y+z}{ax+by+cz},$$

wo a, b, c beliebige Konstanten bezeichnen.

2. Die Menge Q der Elemente $x, y, \dots$ wird *binäre* bzw. *ternäre Quasigruppe* Q° genannt, falls eine binäre $(x, y) \rightarrow x \circ y$, bzw. eine ternäre Operation $(x, y, z) \rightarrow x \circ y \circ z$ für die Elemente von Q erklärt ist, welche in jeder ihrer Veränderlichen, bei Konstanthaltung der anderen Veränderlichen, Q ein-eindeutig auf sich selbst abbildet. Wenn keine Gefahr für Mißverständnis besteht, werden wir das Operationszeichen $\circ$ weglassen. Eine Quasigruppe heißt *Loop*, wenn es ein neutrales Element $e \in Q$ mit der Eigenschaft

$$xe = ex = x \text{ für jedes } x \in Q$$

bzw.

$$xee = exe = eex = x \text{ für jedes } x \in Q$$

gibt. Als *Gruppen* bezeichnet man die assoziativen Quasigruppen, also diejenigen, für welche

$$(xy)z = x(yz), \quad x, y, z \in Q$$

bzw.

$$(xyz)uv = x(yzu)v = xy(zuv), \quad x, y, z, u, v \in Q$$

gilt.

Den Isotopiebegriff definieren wir im ternären Falle; durch Spezialisierung gewinnt man ihn für den binären Fall. Die Quasigruppe R ist ein *Isotop* der Quasigruppe Q , wenn es solche ein-eindeutige Abbildungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von Q auf R gibt, daß

$$\alpha x \beta y \gamma z = \delta(xyz), \quad x, y, z \in Q.$$

Ist $R = Q$ und $\delta x = x$ die identische Abbildung, dann haben wir eine *Hauptisotopie*. Es ist leicht zu sehen, daß die Isotopie eine reflexive, symmetrische und transitive Relation ist.

Bei Untersuchungen von Eigenschaften, die bei Isomorphismen invariant sind (z. B. Assoziativität, Existenz des neutralen Elements, usw.), können wir uns auf Hauptisotope beschränken, denn es gilt: *Jedes Isotop ist einem Hauptisotop isomorph* [2].

Es sei Q eine Loop mit dem neutralen Element e . Es wurde in [2] gezeigt, daß alle Hauptisotope von Q , die das neutrale Element e besitzen, genau dann zusammenfallen, wenn

$$(2) \quad xy = (xb)(ay), \quad x, y, a \in Q, \quad ab = e$$

bzw.

$$(3) \quad xyz = (xbc)(ayc)(abz), \quad x, y, z, a, b \in Q, \quad abc = e$$

gilt. So ist das in der Einleitung geschilderte Problem mit der Lösung der Funktionalgleichungen (2) und (3) äquivalent.

In den Funktionalgleichungen (2) und (3) ist e ein festes Element von Q , von dem man nicht anzunehmen braucht, daß es ein neutrales Element ist, da dies eine Folge der Funktionalgleichungen ist. Setzt man $x = a$ in (2) ein, so sieht man, daß $ay = e(ay)$, also ist e linksseitiges neutrales Element, und ebenso zeigt die Einsetzung $y = b$, daß e auch rechtsseitiges neutrales Element ist. Im Falle der Gleichung (3) setzt man $y = b$, $z = c$, dann $x = a$, $z = c$ und schließlich $x = a$, $y = b$ ein, und erhält, daß e neutrales Element ist.

Die Lösungen der Gleichung (2) sind die assoziativen Quasigruppen, die e als neutrales Element besitzen [2].

3. Wir betrachten jetzt die Funktionalgleichung (3) und zeigen, daß die Operation xyz sich mittels drei binärer Gruppenoperationen aufbauen läßt. Wir erklären drei binäre Operationen auf Q durch

$$(4) \quad x \circ y \stackrel{\text{def}}{=} xey, \quad x \nabla y \stackrel{\text{def}}{=} xye, \quad x * y \stackrel{\text{def}}{=} exy.$$

Setzen wir $y = b = e$ in (3) ein:

$$(5) \quad x \circ z = (x \circ c) \circ (a \circ z), \quad x, z, a \in Q,$$

$$a \circ c = e.$$

Es folgt aus dem vorher zitierten Satz, daß Q° und entsprechend Q^∇ , Q^* binäre Gruppen, mit dem neutralen Element e , sind.

Es sei jetzt $b = y$, $c = e$ in (3); $aye = e$ bestimmt a als Funktion von y : $a = a(y)$; wir erhalten also

$$xyz = (x \nabla y) \circ (a(y)yz), \quad x, y, z \in Q.$$

Wenn man hier $x=e$ setzt, so wird wegen (4)

$$y * z = y \circ (a(y)yz),$$

also

$$(a(y)yz) = y^{-1} \circ (y * z),$$

wo der Exponent -1 das inverse Element bezüglich der fraglichen Gruppe bezeichnet. Man erhält so

$$(6) \quad xyz = (x \nabla y) \circ y^{-1} \circ (y * z), \quad x, y, z \in Q$$

und analog

$$(7) \quad \begin{aligned} xyz &= (x \nabla y) * x^{-1} * (x \circ z) = \\ &= (x \circ z) \nabla z^{-1} \nabla (y * z). \end{aligned}$$

Wir haben also die der Gleichung (3) genügende ternäre Operation $(x, y, z) \rightarrow xyz$ mittels der binären Operationen $\circ, \nabla, *$ aufgebaut.

Wir können auch umgekehrt zeigen, daß das Bestehen von (6) und (7) mit irgendwelchen Gruppen Q°, Q^∇, Q^* , die alle e als neutrales Element haben, die Gleichung (3) nach sich zieht. Dafür schreiben wir

$$\begin{aligned} u &= xbc = (x \circ c) \nabla c^{-1} \nabla (b * c), \\ v &= ayc = (a \circ c) \nabla c^{-1} \nabla (y * c) = (a \nabla y) * a^{-1} * (a \circ c), \\ w &= abz = (a \nabla b) * a^{-1} * (a \circ z). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} u \nabla v &= (x \circ c) \nabla c^{-1} \nabla (b * c) \nabla (a \circ c) \nabla c^{-1} \nabla (y * c) = \\ &= (x \circ c) \nabla c^{-1} \nabla (y * c) = xyc, \\ v * w &= (a \nabla y) * a^{-1} * (a \circ c) * (a \nabla b) * a^{-1} * (a \circ z) = \\ &= (a \nabla y) * a^{-1} * (a \circ z) = ayz, \end{aligned}$$

weil wegen $abc=e$

$$(a \circ c) \nabla c^{-1} \nabla (b * c) = (a \nabla b) * a^{-1} * (a \circ c) = e,$$

oder

$$(b * c) \nabla (a \circ c) \nabla c^{-1} = a^{-1} * (a \circ c) * (a \nabla b) = e.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} uvw &= (u \nabla v) \circ v^{-1} \circ (v * w) = \\ &= (xyc) \circ [(a \nabla y) \circ y^{-1} \circ (y * c)]^{-1} \circ (ayz) = \\ &= (x \nabla y) \circ y^{-1} \circ (y * c) \circ (y * c)^{-1} \circ y \circ (a \nabla y)^{-1} \circ \\ &\quad \circ (a \nabla y) \circ y^{-1} \circ (y * z) = (x \nabla y) \circ y^{-1} \circ (y * z) = xyz, \end{aligned}$$

also (6) und (7) ziehen (3) nach sich. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

SATZ 1. *Damit die auf der Menge Q definierte Quasigruppenoperation $(x, y, z) \rightarrow xyz$ die Beziehung (3) befriedige, ist es notwendig und hinreichend, daß diese Operation von der Gestalt (6) und (7) sei, wo $\circ, \nabla, *$ solche binäre Gruppenoperationen auf Q bezeichnen, die das neutrale Element e besitzen.*

4. Wir wollen uns jetzt auf stetige Operationen beschränken, die auf einem reellen Intervall definiert sind. In diesem Falle können wir den Loop-Begriff etwas

verallgemeinern, in dem wir *lokale Loops* betrachten, bei denen die Operationen nur in einer Umgebung von e definiert sind; es wird verlangt, daß diese Operationen in jeder ihrer Veränderlichen, bei Konstanthaltung der anderen Veränderlichen, eine Umgebung von e in eine Umgebung von e abbilden. Isotopie wird bei lokalen Loops lokal aufgefaßt, d. h. die Isotopierelation soll in einer Umgebung von e gelten. Satz 1 gilt auch für lokale Loops, denn der Beweis verläuft ungeändert. Die (lokalen) Gruppen Q°, Q^∇, Q^* sind (lokal) isomorph mit der (lokalen) reellen additiven Gruppe:

$$(8) \quad \begin{cases} x \circ y = f_{-1} [f(x) + f(y)], \\ x \nabla y = g_{-1} [g(x) + g(y)], \\ x * y = h_{-1} [h(x) + h(y)], \end{cases}$$

wo f, g, h das Intervall Q auf die reelle Zahlengerade ein-eindeutig abbilden und der Index -1 die inverse Funktion bezeichnet. Es bestehen gemäß (6) und (7) die folgenden Beziehungen zwischen f, g, h :

$$(9) \quad \begin{aligned} xyz &= f_{-1} \{ f(g_{-1} [g(x) + g(y)]) - f(y) + f(h_{-1} [h(y) + h(z)]) \} = \\ &= g_{-1} \{ g(f_{-1} [f(x) + f(z)]) - g(z) + g(h_{-1} [h(y) + h(z)]) \} = \\ &= h_{-1} \{ h(g_{-1} [g(x) + g(y)]) - h(x) + h(f_{-1} [f(x) + f(z)]) \}. \end{aligned}$$

Wir suchen die Lösungen abgesehen von Isomorphismen. Darum können wir für eine Operation, z. B. $x * y$, die Addition nehmen; dann ist $h(x) = x$, $e = 0$, $f(0) = g(0) = 0$. Wir erhalten das folgende Funktionalgleichungssystem:

$$(10) \quad \begin{aligned} f_{-1} \{ f(g_{-1} [g(x) + g(y)]) - f(y) + f(y + z) \} &= \\ = g_{-1} \{ g(f_{-1} [f(x) + f(z)]) - g(z) + g(y + z) \} &= \\ = g_{-1} [g(x) + g(y)] - x + f_{-1} [f(x) + f(z)]. \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Funktionen f, g, h in (8) und (9), bzw. f, g in (10) stetig differenzierbar sind. Die aus (10₂) gewonnene Gleichung

$$g(y + z) - g(z) = g \{ g_{-1} [g(x) + g(y)] - x + f_{-1} [f(x) + f(z)] \} - g \{ f_{-1} [f(x) + f(z)] \}$$

ergibt

$$\begin{aligned} g'(z) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(z + y) - g(z)}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{g \{ g_{-1} [g(x) + g(y)] - x + f_{-1} [f(x) + f(z)] \} - g \{ f_{-1} [f(x) + f(z)] \}}{g_{-1} [g(x) + g(y)] - x} \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{g_{-1} [g(x) + g(y)] - g_{-1} [g(x)]}{g(y)} \cdot \frac{g(y)}{y} \right] = \\ &= g' \{ f_{-1} [f(x) + f(z)] \} \cdot g'_{-1} [g(x)] \cdot g'(0), \end{aligned}$$

welches, unter Benutzung von $g'_{-1} [g(x)] = 1/g'(x)$ und x für $f(x)$, z für $f(z)$ eingesetzt, die Form

$$(11) \quad g'(0) g' [f_{-1}(x + z)] = g' [f_{-1}(x)] g' [f_{-1}(z)]$$

annimmt. Da $g'(0)=0$ zu $g(x)=\text{Konst.}$ führt, ist $g'(0)\neq 0$. Die stetigen Lösungen von (11) sind

$$(12) \quad g'[f_{-1}(t)] = c_1 a^t.$$

Da die Rolle von f und g in (8), (9) symmetrisch ist, haben wir analog zu (12)

$$(13) \quad f'[g_{-1}(t)] = c_2 b^t.$$

Aus (12) und (13) folgt

$$(14) \quad \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{a^{f(t)}}{b^{g(t)}},$$

$$(15) \quad a^{f(t)} = c_3 b^{g(t)} + c_4$$

(a, b und die c_i bezeichnen Konstanten).

Wir differenzieren (10₁) nach x und setzen $x=0$:

$$f'_{-1}[f(y+z)] f'(y) g'_{-1}[g(y)] g'(0) = g'_{-1}[g(y+z)] g'(z) f'_{-1}[f(z)] f'(0)$$

oder

$$\frac{g'(y+z)}{f'(y+z)} = \frac{g'(y)}{f'(y)} \cdot \frac{g'(z)}{f'(z)} \cdot \frac{f'(0)}{g'(0)}.$$

Da $g'(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$, erhalten wir aus dieser Funktionalgleichung die Beziehung

$$\frac{g'(t)}{f'(t)} = c_5 c^t,$$

die zusammen mit (14)

$$a^{f(t)} = c_6 c^t b^{g(t)}$$

ergibt. $c_6=1$, was durch Einsetzen von $t=0$ erscheint. Wir ziehen noch (15) in Betracht:

$$a^{f(t)} = c_3 b^{g(t)} + c_4 = c^t b^{g(t)};$$

also, wenn $c\neq 1$

$$b^{g(t)} = \frac{c_4}{c^t - c_3}, \quad a^{f(t)} = \frac{c_4 c^t}{c^t - c_3},$$

oder, da $f'(0)=g(0)=0$,

$$(16) \quad f(t) = \log \frac{a}{1+kc^{-t}}, \quad g(t) = \log \frac{b}{1+k} \frac{c^t+k}{1+k} \quad (k\neq 0, -1),$$

bzw., wenn $c=1$,

$$(17) \quad a^{f(t)} = b^{g(t)}, \quad f(t) = c_7 g(t);$$

in diesem Falle ist

$$(18) \quad g_{-1}[g(x)+g(y)] = f_{-1}[f(x)+f(y)] = x \circ y = x \nabla y,$$

also vereinfacht sich (10) zu

$$f_{-1}[f(x)+f(y+z)] = f_{-1}[f(x)+f(y)] - x + f_{-1}[f(x)+f(z)].$$

Indem wir

$$\varphi_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} f_{-1}[x + f(t)] - f_{-1}(x)$$

eingeführen, wird die obige Gleichung (für x schreiben wir $f_{-1}(x)$):

$$\varphi_x(y+z) = \varphi_x(y) + \varphi_x(z),$$

also $\varphi_x(t) = \lambda(x)t$, oder

$$f_{-1}(x+y) = f_{-1}(x) + \lambda(x)f_{-1}(y).$$

Man findet leicht die Lösungen dieser Funktionalgleichung:

$$(19) \quad f(t) = \begin{cases} \log(c_8 t + 1), & \text{oder} \\ c_9 t. \end{cases}$$

5. Im Besitz der Lösungen (16) bzw. (19) der Gleichungen (10), wollen wir jetzt die Operationen $x \circ y$, $x \nabla y$, $x * y$ aufschreiben.

Wir befassen uns zuerst mit dem Falle (19). Wenn $f(t) = g(t) = \log(c_8 t + 1)$, dann

$$c_8(x \circ y) + 1 = (c_8 x + 1)(c_8 y + 1),$$

$$(20) \quad x \circ y = x \nabla y = c_8 xy + x + y, \quad x * y = x + y.$$

Wenn $f(t) = g(t) = c_9 t$ gilt, dann

$$(21) \quad x \circ y = x \nabla y = x * y = x + y.$$

Im Falle (16) betrachten wir, anstatt der durch die obigen Funktionen $f(t)$, $g(t)$, $h(t) = t$ und durch die Formel (8) und (6) bestimmten ternären Quasigruppe

Q , dasjenige isomorphe Bild von Q , welches mittels der Abbildung $t \rightarrow \log t$ entsteht. Dann sind

$$(22) \quad f(t) = \log \frac{a}{1+k} \frac{1+kt^{-1}}{1+k}, \quad g(t) = \log \frac{b}{1+k} \frac{t+k}{1+k}, \quad h(t) = \log t \quad (k \neq 0, -1)$$

und man erhält

$$\frac{1}{1+k} \left(1 + \frac{k}{x \circ y} \right) = \frac{1}{(1+k)^2} \left(1 + \frac{k}{x} \right) \left(1 + \frac{k}{y} \right)$$

also

$$(23) \quad x \circ y = \frac{(1+k)xy}{x+k-(x-1)y};$$

weiter

$$\frac{1}{1+k} (x \nabla y + k) = \frac{1}{(1+k)^2} (x+k)(y+k),$$

$$(24) \quad x \nabla y = \frac{(x+k)y + k(x-1)}{1+k}$$

und

$$(25) \quad x * y = xy.$$

6. Wir schreiben schließlich die Operation $xyz = F(x, y, z)$ auf. Wenn (20) gilt,

$$F(x, y, z) = c_8 x(y+z) + x + y + z$$

oder

$$c_8 F(x, y, z) + 1 = (c_8 x + 1)(c_8 y + 1 + c_8 z + 1 - 1).$$

Dies geht durch den Isomorphismus $c_8 x + 1 \rightarrow x$ in

$$(26) \quad F(x, y, z) = x(y+z-1)$$

über. Wenn (21) gilt,

$$(27) \quad F(x, y, z) = x + y + z.$$

Wenn die Gruppenoperationen $x \circ y$, $x \nabla y$, $x * y$ durch (23), (24), (25) bestimmt sind, dann wird

$$F(x, y, z) = (x \nabla y) * x^{-1} * (x \circ z) = \frac{(x+k)y+k(x-1)}{1+k} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{(1+k)xz}{x+k-(x-1)z}$$

oder

$$(28) \quad F(x, y, z) = \frac{y+k \frac{x-1}{x+k}}{\frac{1}{z} - \frac{x-1}{x+k}} \quad (k \neq -1, 0).$$

Die sämtlichen stetig differenzierbaren Lösungen der Funktionalgleichung (3) entstehen aus (26), (27), (28) durch Isomorphismus. Wenn also φ eine willkürliche, umkehrbare, stetig differenzierbare Funktion bezeichnet, die das Intervall Q auf die Zahlengerade abbildet, so haben die Lösungen von (3) die Formen

$$(29) \quad \begin{cases} F(x, y, z) = \varphi_{-1}[\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)], \\ F(x, y, z) = \varphi_{-1}\{\varphi(x)[\varphi(y) + \varphi(z) - 1]\}, \\ F(x, y, z) = \varphi_{-1} \left[\frac{\varphi(y) + k \frac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+k}}{\frac{1}{\varphi(z)} - \frac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)+k}} \right] \end{cases} \quad (k \neq 0, -1).$$

Man rechnet einfach nach, daß die Funktionen (29) die Gleichung (3) befriedigen. Ferner, wenn man die Gruppenoperationen $x \circ y = F(x, e, y)$, $x \nabla y = F(x, y, e)$, $x * y = F(e, x, y)$ aufbaut, bestehen die Darstellungen (6) und (7) ebenfalls. Im Falle (29₁) ist $e = \varphi_{-1}(0)$, in den Fällen (29₂) und (29₃) ist $e = \varphi_{-1}(1)$.

Da die Veränderlichen x, y, z in (3) eine symmetrische Rolle haben, muß die aus (28) durch Vertauschung von y und z entstehende Funktion ebenfalls eine Lösung von (3) sein. Diese Lösung ist in (29₃) enthalten; man bekommt sie, wenn man $\varphi(x) = 1/x$ wählt und $1/k$ statt k setzt. Vertauscht man x und z in (28), so bekommt man diese Funktion aus (29₃) bei $\varphi(x) = (k+1)x - k$, wenn man nachträglich $-k(k+1)$ statt k schreibt. Die Funktionen (29₃) können also in derselben Form aufgeschrieben werden mit irgendwelcher Permutation der Veränderlichen. Bei den Permutationen gehen die Ausnahmefälle $k=0$, $k=-1$, $k=\infty$ ineinander über.

Setzt man in (29₃) $k=0$, $\varphi(x)=1/x$, so entsteht $F(x, y, z) = y(x+z-1)$, was ebenfalls eine Lösung von (3) ist und sich von (26) nur durch eine Permutation der Veränderlichen unterscheidet. Wir können deswegen den Ausnahmefall $k=0$ beseitigen und (29₂) streichen. Auch $k = \infty$ kann erlaubt werden, dann ist $F(x, y, z) = \varphi_{-1}\{\varphi(z)[\varphi(x) + \varphi(y) - 1]\}$.

Die Formel (29₁) enthält die ternären kommutativen Gruppen.

SATZ 2. *Jede reelle, stetig differenzierbare auf einem Intervall erklärte lokale ternäre Loop Q , deren alle Loop—Haupt-Isotope mit demselben neutralen Element zusammenfallen, ist entweder eine ternäre kommutative Gruppe, oder ihre Operation ist von der Form*

$$(30) \quad xyz = \varphi_{-1} \left[\frac{\varphi(y) + k \frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + k}}{\frac{1}{\varphi(z)} - \frac{\varphi(x) - 1}{\varphi(x) + k}} \right],$$

wo φ eine willkürliche, umkehrbare, stetig differenzierbare Abbildung von Q auf ein den Einheitspunkt enthaltendes Intervall der Zahlgeraden bezeichnet und k eine reelle von -1 verschiedene Konstante ist, oder aber ist sie von der Form (30) mit irgendwelcher Vertauschung der Veränderlichen auf der rechten Seite. Eine Vertauschung der Veränderlichen ergibt i. a. keine neue Funktionen, ausgenommen $k=0$.

Man sieht, daß die Funktionen (30) gerade die Operationen der Loop-Isotope der durch (1) definierten Quasigruppen darstellen.

MATHEMATISCHER LEHRSTUHL,
TECHNISCHE UNIVERSITÄT,
MISKOLC
RECHENINSTITUT DER AKADEMIE
DER RUMÄNISCHEN VOLKSREPUBLIK,
CLUJ, RUMÄNIEN

(Eingegangen am 10. September 1962; in veränderter Form 9. April 1963.)

Literaturverzeichnis

- [1] J. ACZÉL, G. PICKERT, F. RADÓ, Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen, *Mathematica*, 2 (25) (1960), S. 5–24.
- [2] F. RADÓ, Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe, *Mathematica*, 2 (25) (1960), S. 325–334.