

Approximationseigenschaften der Gammaoperatoren

A. LUPAŞ und M. MÜLLER

Eingegangen am 21. Dezember 1966

1. Einleitung

Eine Reihe wohlbekannter Folgen linearer positiver Operatoren, die in der Approximationstheorie Verwendung finden, stehen in einem engen formalen Zusammenhang mit bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Limitierungsverfahren.

So erkennt man in den Gewichten

$$b_{nk}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (n=1, 2, \dots; k=0, \dots, n)$$

des n -ten Bernsteinschen Polynoms

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n b_{nk}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (n=1, 2, \dots),$$

das einer für $0 \leq x \leq 1$ definierten komplexwertigen Funktion $f(x)$ zugeordnet wird, unmittelbar die Bernoullische (oder binomische) Verteilung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie das allgemeine Matrixelement

$$a_{nk} = \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (n=0, 1, \dots; k=0, \dots, n)$$

des Euler-Knopp Verfahrens E_α der Limitierungstheorie in der FF -Form (vgl. [14], S. 130).

Mit Hilfe der Gewichte

$$m_{nk}(x) = \binom{k}{n} (1-x)^{n+1} x^{k-n} \quad (n=1, 2, \dots; k=n, n+1, \dots)$$

wird nach MEYER-KÖNIG und ZELLER (vgl. [1, 7]) einer für $0 \leq x \leq 1$ erklärten komplexwertigen Funktion $f(x)$ die n -te Bernsteinsche Potenzreihe

$$M_n(f; x) = \sum_{k=n}^{\infty} m_{nk}(x) f\left(\frac{k-n}{k}\right) \quad (n=1, 2, \dots)$$

zugeordnet. Zu den Gewichten $m_{nk}(x)$ gehört die Pascalsche Verteilung der Wahrscheinlichkeitstheorie, sowie das allgemeine Matrixelement

$$a_{nk} = \alpha^{n+1} \binom{k}{n} (1-\alpha)^{k-n}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (n=0, 1, \dots; k=n, n+1, \dots)$$

des Taylorverfahrens T_α der Limitierungstheorie in der FF -Form (vgl. [14], S. 141).

Die Operatoren von SZÁSZ-MIRAKYAN (vgl. [4, 13]) schließlich ordnen einer komplexwertigen Funktion $f(x)$, die auf der positiven reellen Achse erklärt ist, die Reihen

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{nk}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (n=1, 2, \dots)$$

zu. Zu den Gewichten $s_{nk}(x)$ gehören hier die Poissonsche Verteilung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das allgemeine Matrixelement

$$a_{\lambda k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (0 \leq \lambda < \infty; k=0, 1, \dots)$$

des Borelverfahrens B_0 der Limitierungstheorie in der FF -Form (vgl. [14], S. 134).

In dieser Note wird eine Folge $\{G_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) linearer positiver Integraloperatoren untersucht, die in Analogie zu den Operatoren B_n , M_n und S_n konstruiert sind. Da hierbei von der Gammaverteilung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. [3], S. 152) ausgegangen wird, bezeichnen wir diese Operatoren als Gammaoperatoren. Das zugehörige Limitierungsverfahren ist das von MEYER-KÖNIG eingeführte Taylorsche Verfahren T'_a zur Limitierung von Funktionen (vgl. [6], S. 181), das auf der Integraltransformation mit dem Kern

$$g_n(a, u) = \frac{a^{n+1}}{n!} e^{-a u} u^n \quad (n=0, 1, \dots; a>0; u>0)$$

beruht.

Die Gammaoperatoren wurden vom zweitgenannten Verfasser in seiner Dissertation (vgl. [8]) eingeführt und ausführlich untersucht. Hier werden sie in einer leicht modifizierten Form definiert, die den Zwecken dieser Arbeit besser angepaßt ist (s. auch Nr. 5).

Definition 1.1. (Funktionsraum $M(0, \infty)$ bzw. $M[0, \infty)$). $M(0, \infty)$ bzw. $M[0, \infty)$ sei der lineare Raum derjenigen komplexwertigen Funktionen $f(x)$, die für $x>0$ bzw. $x \geq 0$ definiert und in jedem Intervall $[r, R]$ (wobei $0 < r < R < \infty$) Lebesgue-meßbar und beschränkt sind.

Der n -te Gammaoperator ($n=1, 2, \dots$) wird dadurch erklärt, daß man jeder Funktion $f(x)$ aus den Räumen $M(0, \infty)$ oder $M[0, \infty)$ formal das Integral

$$(1.1) \quad G_n(f; x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-x u} u^n f\left(\frac{n}{u}\right) du = \int_0^\infty g_n(x, u) f\left(\frac{n}{u}\right) du$$

zuordnet. Die auftretenden Integrale sollen dabei für jedes feste n stets in folgendem Sinne verstanden werden:

$$(1.2) \quad \int_0^\infty g_n(x, u) f\left(\frac{n}{u}\right) du = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_r^R g_n(x, u) f\left(\frac{n}{u}\right) du,$$

wo $r \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ unabhängig voneinander. Existiert das uneigentliche Integral für ein $x > 0$, so bezeichne $G_n(f; x)$ den Wert des G_n -Bildes der Funktion f an der Stelle x .

Der nun folgende Hilfssatz gibt eine erste hinreichende Bedingung für die Möglichkeit der Erweiterung des Definitionsbereichs der Funktion $G_n(f; x)$ in die Stelle $x=0$ hinein (s. auch Satz 2.10).

Hilfssatz 1.2. *Ist die Funktion $f(x) \in M[0, \infty)$ beschränkt und an der Stelle $x=0$ rechtsseitig stetig, dann gilt für jedes feste n*

$$\lim_{x \rightarrow 0+} G_n(f; x) = f(0).$$

Der Beweis ergibt sich daraus, daß für jedes feste n die Integraltransformation $G_n(f; x)$, die zu dem Kern

$$g_n(x, u) = \frac{x^{n+1}}{n!} e^{-xu} u^n \begin{cases} x > 0, & x \rightarrow 0+ \\ u \geq 0 \end{cases}$$

gehört, permanent ist.

Sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1.2 erfüllt, so definieren wir

$$(1.3) \quad G_n(f; 0) := \lim_{x \rightarrow 0+} G_n(f; x) = f(0) \quad (n=1, 2, \dots).$$

Die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit sind sogenannte direkte Sätze. Aus vorgegebenen speziellen Eigenschaften der Funktion $f(x)$ wird geschlossen auf: (a) Gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{G_n(f; x)\}$ für $n \rightarrow \infty$; (b) Approximation von $f'(x)$ durch die Ableitung von $G_n(f; x)$; (c) Monotonie der gleichmäßigen Konvergenz von $\{G_n(f; x)\}$; (d) Erhaltung der Konvexität bzw. Konkavität k -ter Ordnung durch die Folge $\{G_n\}$; (e) Lokale Approximationsordnung, insbesondere asymptotische Aussagen. Dabei zeigt es sich, daß die Gammaoperatoren für die Approximation von Funktionen, die auf unendlichen Intervallen erklärt sind, etwa dieselbe Rolle spielen wie die Bernsteinischen Polynome B_n für die Approximation von Funktionen, die auf endlichen Intervallen erklärt sind.

Zu Beginn einer jeden neuen Nummer wird von den Funktionen $f(x)$ zunächst eine globale Beschränktheit gefordert, um bekannte Sätze über Folgen linearer positiver Operatoren (vgl. [4, 5]) anwenden zu können. Von dieser Einschränkung befreien wir uns dann jeweils durch ein Paar von Lokalisations-sätzen, die es erlauben, Funktionen, deren Beträge für $x \rightarrow 0+$ bzw. $x \rightarrow \infty$ über alle Schranken anwachsen, in geeigneter Weise „abzuschneiden“.

Beide Verfasser möchten Herrn Prof. Dr. W. MEYER-KÖNIG für sein großes Interesse an dieser Arbeit und für wertvolle Ratschläge aufrichtig danken.

2. Gleichmäßige Approximation

Definition 2.1. (Funktionsraum $S[x_1, x_2]$). $S[x_1, x_2]$ sei der lineare Raum derjenigen beschränkten Funktionen $f(x) \in M[0, \infty)$, für die alle Punkte des

festen Intervalls $[x_1, x_2]$ (wobei $0 \leq x_1 \leq x_2 < \infty$) zweiseitige Stetigkeitspunkte sind. (Im Falle $x_1 = 0$ sei die Stetigkeit dort nur einseitig.)

Die Existenz von $G_n(f; x)$ für Funktionen $f(x) \in S[x_1, x_2]$ ist gesichert. Grundlegend ist der folgende Approximationssatz:

Satz 2.2. Für jede Funktion $f(x) \in S[x_1, x_2]$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(f; x) = f(x) \quad \text{gleichmäßig in } [x_1, x_2].$$

Beweis. Nach dem bekannten Satz von KOROWKIN (vgl. [4], S. 14) ist zu zeigen, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(t^k; x) = x^k \quad (k=0, 1, 2)$$

gleichmäßig im Intervall $[x_1, x_2]$ gilt. Nun zeigt man aber leicht, daß für $n \geq 2$

$$(2.1) \quad G_n(1; x) = 1, \quad G_n(t; x) = x, \quad G_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x^2}{n-1}$$

ist, woraus die Behauptung des Satzes unmittelbar folgt. (Im Falle $x_1 = 0$ beachte man Hilfssatz 1.2 und (1.3).)

Die Konvergenzaussage von Satz 2.2 wird nun auf einige Funktionenräume ausgedehnt, die den Raum $S[x_1, x_2]$ enthalten. Hierzu benötigen wir zunächst einige Eigenschaften des Integrals

$$S_{mn}(x) = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^\infty \left(u - \frac{n}{x}\right)^m e^{-xu} u^n du \quad (m=0, 1, \dots; n=1, 2, \dots; x>0).$$

Es ist

$$S_{0n}(x) = 1, \quad S_{1n}(x) = \frac{1}{x},$$

und die Integrale $S_{mn}(x)$ genügen der Rekursionsformel

$$(2.2) \quad S_{m+1,n}(x) = \frac{mn}{x^2} S_{m-1,n}(x) + \frac{1}{x} S_{mn}(x) - \frac{d}{dx} S_{mn}(x) \quad (m=0, 1, \dots).$$

Mit Hilfe von vollständiger Induktion folgt hieraus, daß sich die Integrale $S_{mn}(x)$ in der Form

$$S_{mn}(x) = \frac{1}{x^m} \sum_{i=0}^{[m/2]} P_{mi} n^i$$

darstellen lassen, wo $[a]$ für ein reelles a das Ganze von a bedeutet und die P_{mi} von x unabhängige Konstanten sind. Für die Integrale $S_{mn}(x)$ ergibt sich damit die Abschätzung

$$(2.3) \quad 0 \leq S_{mn}(x) \leq \frac{K_n(m) n^{[m/2]}}{x^m} \quad (m=0, 1, \dots; n=1, 2, \dots; x>0).$$

Es ist

$$K_n(0)=1, \quad K_n(1)=1, \quad K_n(2)=1+\frac{2}{n}, \quad K_n(3)=5+\frac{6}{n}.$$

Hilfssatz 2.3. Für ein beliebiges $t > 0$ gilt

$$\int_{u \in I} g_n(x, u) du \leq \frac{K_n(2m)n^m}{x^{2m}t^{2m}} \quad (m=0, 1, \dots; n=1, 2, \dots; x>0),$$

wo

$$I = \left\{ u : u \geq 0, \left| u - \frac{n}{x} \right| \geq t \right\}$$

ist.

Beweis. Für ein festes $t > 0$ und ein festes m ist

$$\int_{u \in I} g_n(x, u) du \leq \frac{1}{t^{2m}} \int_{u \in I} \left(u - \frac{n}{x} \right)^{2m} g_n(x, u) du \leq \frac{S_{2m,n}(x)}{t^{2m}} \leq \frac{K_n(2m)n^m}{x^{2m}t^{2m}}.$$

Für $m=1$ ergibt sich die im folgenden oft benötigte Abschätzung

$$(2.4) \quad \int_{u \in I} g_n(x, u) du \leq \frac{K_n(2)n}{x^2 t^2} = \frac{n+2}{x^2 t^2}.$$

Wie man leicht zeigt, gilt für ein festes $x > 0$ und ein beliebiges $\delta > 0$

$$(2.5) \quad \left| \frac{n}{u} - x \right| < \delta \quad \text{für} \quad \left| u - \frac{n}{x} \right| < \frac{\delta n}{x(x+\delta)}.$$

Definition 2.4 (Funktionsraum A_L). A_L sei der lineare Raum derjenigen Funktionen $f(x) \in M(0, \infty)$, die einer Wachstumsbedingung der Art $|f(x)| \leq P e^{a/x}$ ($P > 0, a > 0, x > 0$) genügen.

Hilfssatz 2.5. Für die Funktion $f(x) \in A_L$ existiert die Bildfunktion $G_n(f; x)$ an der festen Stelle $x_1 > 0$ für alle $n \geq [a/x_1] + 1$.

Beweis. Sei $x_1 > 0$ fest. Dann ist

$$|G_n(f; x_1)| \leq P \frac{x_1^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-x_1 u} u^n e^{\frac{a u}{n}} du = P \frac{x_1^{n+1}}{n!} \int_0^\infty e^{-(x_1 - \frac{a}{n})u} u^n du,$$

und das uneigentliche Integral konvergiert an der oberen Grenze, falls

$$x_1 - \frac{a}{n} > 0$$

ist.

Satz 2.6 (A_L -Lokalisationssatz). Für die beiden Funktionen $f(x), g(x) \in M(0, \infty)$ seien alle Punkte des festen Intervalls $[x_1, x_2]$ (wobei $0 < x_1 \leq x_2 < \infty$) zweiseitige Stetigkeitspunkte. Weiter sei (a) $f(x) \in A_L$, (b) $|g(x)| \leq Q$ für $x > 0$ (Q eine positive Konstante), (c) $f(x) = g(x)$ für $x \in [x_1, x_2]$. Dann existiert

$G_n(f; x)$ für $n \geq [a/x_1] + 1$ und $x \geq x_1$, ferner existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(f; x),$$

und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(f; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(g; x) \quad \text{gleichmäßig in } [x_1, x_2].$$

Beweis. Sei zunächst $n_0 \geq [a/x_1] + 1$. Nach Hilfssatz 2.5 existiert $G_n(f; x)$ für $x \in [x_1, x_2]$ (sogar für $x \geq x_1$), falls $n \geq n_0$ ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, unabhängig von $x \in [x_1, x_2]$, so daß gleichzeitig gilt

$$(2.6) \quad |f(x') - f(x)| \leq \varepsilon, \quad |g(x') - g(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für } x \in [x_1, x_2], \quad |x' - x| < \delta.$$

(O.B.d.A. sei dabei $\delta < x_1$.) Wir wählen nun einen Index $n_1 \geq n_0$ so, daß auch noch $\delta/2 > a/n_1$ ist. Im folgenden sei ein $n \geq n_1$ festgehalten. Für ein festes $x \in [x_1, x_2]$ ist

$$(2.7) \quad |G_n(f; x) - G_n(g; x)| \leq S_1 + S_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} S_i &= \int_{u \in I_i} g_n(x, u) \left| f\left(\frac{n}{u}\right) - g\left(\frac{n}{u}\right) \right| du \quad (i=1, 2), \\ I_1 &= \left\{ u: u \geq 0, \left| u - \frac{n}{x_n} \right| < \frac{\delta n}{2x_n(x_n + \delta)} \right\} \quad \left(x_n = x - \frac{a}{n} > 0 \right), \\ I_2 &= [0, \infty) - I_1 \end{aligned}$$

ist. Sei $u \in I_1$. Wegen (2.5) folgt dann

$$\left| \frac{n}{u} - x_n \right| < \frac{\delta}{2}$$

und hieraus wegen der über n gemachten Voraussetzung

$$\left| \frac{n}{u} - x \right| < \delta.$$

Aus (2.6) und (c) folgt

$$\left| f\left(\frac{n}{u}\right) - g\left(\frac{n}{u}\right) \right| \leq \left| f\left(\frac{n}{u}\right) - f(x) \right| + \left| g\left(\frac{n}{u}\right) - g(x) \right| \leq 2\varepsilon \quad (x \in [x_1, x_2]),$$

und hieraus

$$S_1 \leq 2\varepsilon \int_{u \in I_1} g_n(x, u) du \leq 2\varepsilon \int_0^\infty g_n(x, u) du = 2\varepsilon.$$

Sei nun $u \in I_2$. Aus den Voraussetzungen (a) und (b) folgt

$$\left| f\left(\frac{n}{u}\right) - g\left(\frac{n}{u}\right) \right| \leq P e^{\frac{au}{n}} + Q \leq (P + Q) e^{\frac{au}{n}},$$

und damit erhalten wir

$$S_2 \leq (P+Q) \frac{x^{n+1}}{n!} \int_{u \in I_2} e^{-x_n u} u^n du = (P+Q) \frac{x^{n+1}}{x_n^{n+1}} \int_{u \in I_2} g_n(x_n, u) du.$$

Nun ist aber

$$\frac{x^{n+1}}{x_n^{n+1}} = \left(1 + \frac{a}{n x - a}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{2a}{n x_1}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{2a}{x_1}\right) e^{\frac{2a}{x_1}},$$

und hieraus folgt mit Hilfe der Ungleichung (2.4) unmittelbar

$$S_2 \leq \frac{4(P+Q) \left(1 + \frac{2a}{x_1}\right) e^{\frac{2a}{x_1}} (x_2 + \delta)^2}{\delta^2} \cdot \frac{n+2}{n^2}.$$

Wählen wir $n \geq n_1$ hinreichend groß, so wird $S_2 \leq \varepsilon$, unabhängig von $x \in [x_1, x_2]$. Damit ist gleichzeitig die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(f; x)$$

und die behauptete gleichmäßige Konvergenz bewiesen, da die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(g; x)$$

durch Satz 2.2 gesichert ist.

Ein unmittelbares Korollar des vorangehenden Satzes ist

Satz 2.7. Für die Funktion $f(x) \in A_L$ seien alle Punkte des festen Intervalls $[x_1, x_2]$ (vgl. Satz 2.6) zweiseitige Stetigkeitspunkte. Dann existiert $G_n(f; x)$ für $n \geq [a/x_1] + 1$ und $x \geq x_1$, und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(f; x) = f(x) \quad \text{gleichmäßig in } [x_1, x_2].$$

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus Hilfssatz 2.5. Wir wählen nun ein festes $n \geq [a/x_1] + 1$ und definieren eine neue Funktion $g(x)$ durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x_1) & \text{für } 0 < x \leq x_1 \\ f(x) & \text{für } x \geq x_1. \end{cases}$$

Da für die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Bedingungen von Satz 2.6 erfüllt sind, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(f; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(g; x)$$

gleichmäßig in $[x_1, x_2]$. Nach Satz 2.2 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(g; x) = g(x),$$

und wegen $f(x) = g(x)$ für $x \geq x_1$ folgt die gleichmäßige Konvergenz von $G_n(f; x)$ gegen die Funktion $f(x)$ im Intervall $[x_1, x_2]$.

Definition 2.8. (Funktionsraum $A_R(0, \infty)$ bzw. $A_R[0, \infty)$). $A_R(0, \infty)$ bzw. $A_R[0, \infty)$ sei der lineare Raum derjenigen Funktionen $f(x) \in M(0, \infty)$ bzw. $M[0, \infty)$, die einer Wachstumsbedingung der Art $|f(x)| \leq P(1+x^a)$ ($P > 0$, $a > 0$, $x > 0$ bzw. $x \geq 0$) genügen.

Hilfssatz 2.9. Für die Funktion $f(x) \in A_R[0, \infty)$ existiert die Bildfunktion $G_n(f; x)$ an der festen Stelle $x_1 > 0$ für alle $n \geq [a]$.

Beweis. Sei $x_1 > 0$ fest. Dann ist

$$|G_n(f; x_1)| \leq P + P \frac{x_1^{n+1}}{n!} n^a \int_0^\infty e^{-x_1 u} u^{n-a} du,$$

und das Integral konvergiert an der unteren Grenze für $n \geq [a]$.

Wir geben nun eine weitere hinreichende Bedingung für die Möglichkeit der Erweiterung des Definitionsbereichs der Funktion $G_n(f; x)$ in die Stelle $x=0$ hinein. Dieser Satz wird den Hilfssatz 1.2 und die Festsetzung (1.3) als Spezialfälle enthalten.

Satz 2.10. Ist die Funktion $f(x) \in A_R[0, \infty)$ an der Stelle $x=0$ rechtsseitig stetig, dann gilt für jedes feste $n \geq [a]$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} G_n(f; x) = f(0).$$

Beweis. Sei $n \geq [a]$ fest. Nach Hilfssatz 2.9 existiert $G_n(f; x)$ für $x > 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $u_0 = u_0(\varepsilon)$ so, daß

$$\left| f\left(\frac{n}{u}\right) - f(0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist für $u > u_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} G_n(f; x) - f(0) &= \int_0^{u_0} g_n(x, u) \left[f\left(\frac{n}{u}\right) - f(0) \right] du + \int_{u_0}^\infty g_n(x, u) \left[f\left(\frac{n}{u}\right) - f(0) \right] du \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$|S_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{u_0}^\infty g_n(x, u) du \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } x > 0$$

und

$$|S_1| \leq M n^a \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^{u_0} e^{-x u} u^{n-a} du + f(0) \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^{u_0} e^{-x u} u^n du < \frac{\varepsilon}{2},$$

falls x hinreichend klein ist.

Sind die Voraussetzungen von Satz 2.10 erfüllt, so treffen wir die Festsetzung

$$(2.8) \quad G_n(f; 0) := \lim_{x \rightarrow 0+} G_n(f; x) = f(0) \quad (n = [a], [a] + 1, \dots).$$

Satz 2.11 ($A_R[0, \infty)$ -Lokalisationssatz). Für die beiden Funktionen $f(x)$, $g(x) \in M[0, \infty)$ seien alle Punkte des festen Intervalls $[x_1, x_2]$ (wobei $0 \leq x_1 \leq x_2 < \infty$) zweiseitige Stetigkeitspunkte. (Im Falle $x_1 = 0$ sei die Stetigkeit dort nur einseitig.) Weiter sei (a) $f(x) \in A_R[0, \infty)$, (b) $|g(x)| \leq Q$ für $x \geq 0$ (Q eine positive Konstante), (c) $f(x) = g(x)$ für $x \in [x_1, x_2]$. Dann existiert $G_n(f; x)$ für $n \geq [a]$ und $x \geq 0$, ferner existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(f; x)$$

und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(f; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(g; x) \quad \text{gleichmäßig in } [x_1, x_2].$$

Beweis. Sei $n \geq [a]$ fest. Nach Hilfssatz 2.9 existiert $G_n(f; x)$ für $x > 0$. Im Falle $x_1 = 0$ ist wegen der Festsetzung (2.8) $G_n(f; 0) = f(0)$ für $n \geq [a]$, $G_n(g; 0) = g(0)$ für alle n und damit $G_n(f; 0) = G_n(g; 0)$ für $n \geq [a]$. Wir setzen deshalb im folgenden stets $x \neq 0$ voraus. Sei $\varepsilon > 0$. Wir benützen wieder die im Beweis von Satz 2.6 beschriebene Zerlegung in S_1 und S_2 , hier aber mit

$$I_1 = \left\{ u: u \geq 0, \left| u - \frac{n}{x} \right| < \frac{\delta n}{x(x+\delta)} \right\} \quad \text{und} \quad I_2 = [0, \infty) - I_1.$$

Wie im dortigen Beweis zeigt man, daß auch hier $S_1 \leq 2\varepsilon$ ist. Für $u \in I_2$ folgt wegen der Voraussetzungen (a) und (b)

$$S_2 \leq (P+Q) \int_{u \in I_2} g_n(x, u) du + P n^a \frac{x^{n+1}}{n!} \int_{u \in I_2} e^{-xu} u^{n-a} du = S_{21} + S_{22}.$$

Wendet man die Abschätzung (2.4) auf S_{21} an, so folgt die Existenz einer Zahl $n_1(\varepsilon)$ ($\geq [a]$) derart, daß gilt

$$(2.9) \quad S_{21} \leq \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_1, \text{ unabhängig von } x \in [x_1, x_2].$$

Wegen $u^n < u^{n-1}$ für $0 < u < 1$ schätzen wir S_{22} nach oben ab durch

$$S_{22} \leq P n^a \int_{u \in I_2} g_n(x, u) du + P n^a \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

Aus Hilfssatz 2.3 folgt für $m = [a] + 1$

$$S_{22} \leq P n^a \frac{K_n(2m) n^m (x_2 + \delta)^2}{\delta^{2m} n^{2m}} + P n^a \frac{x_2^{n+1}}{n!}$$

und damit die Existenz einer Zahl $n_2(\varepsilon)$ ($\geq [a]$) derart, daß gilt

$$(2.10) \quad S_{22} \leq \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_2, \text{ unabhängig von } x \in [x_1, x_2].$$

Die Behauptung des Satzes folgt nun für $n \geq \max(n_1, n_2)$.

Als Korollar des vorstehenden Satzes folgt unmittelbar

Satz 2.12. Für die Funktion $f(x) \in A_R[0, \infty)$ seien (wie in Satz 2.11) alle Punkte des Intervalls $[x_1, x_2]$ zweiseitige Stetigkeitspunkte. Dann gibt es ein n_0

so, daß $G_n(f; x)$ existiert für $n \geq n_0$ und $x \geq x_1$, und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(f; x) = f(x) \quad \text{gleichmäßig in } [x_1, x_2].$$

Es wird nun noch der Funktionenraum A eingeführt, dessen Elemente Wachstumseigenschaften der Elemente aus $A_R(0, \infty)$ und A_L in sich vereinigen.

Definition 2.13. (Funktionenraum A). A sei der lineare Raum derjenigen Funktionen $f(x) \in M(0, \infty)$, deren Beträge für $x \rightarrow 0+$ höchstens wie $P \cdot e^{a/x}$ ($P > 0, a > 0$) und für $x \rightarrow \infty$ höchstens wie $Q(1 + x^b)$ ($Q > 0, b > 0$) anwachsen.

Für Funktionen $f(x) \in A$ lassen sich die Ergebnisse der beiden Lokalisationsätze und ihrer Korollare zu einer Aussage zusammenfassen, welche die Konvergenzaussage des Satzes 2.2 wesentlich erweitert.

3. Approximation der Funktion $f'(x)$

Dieser Abschnitt behandelt lokale Konvergenz bzw. Aussagen über punktweise Konvergenz. Wir verwenden dabei die Abkürzung

$$\left[\frac{d}{dx} G_n(f; x) \right]_{x=x_0} = G'_n(f; x_0).$$

Satz 3.1. Die Funktion $f(x) \in M[0, \infty)$ sei für $x \geq 0$ beschränkt und stetig. Dann gilt in jedem Punkt $x_0 (0 < x_0 < \infty)$, in dem $f'(x_0)$ existiert und endlich ist,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G'_n(f; x_0) = f'(x_0).$$

Beweis. Aus der Existenz und Endlichkeit von $f'(x_0)$ folgt

$$(3.1) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + g(x)(x - x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

und hieraus

$$(3.2) \quad f\left(\frac{n}{u}\right) = f(x_0) + f'(x_0)\left(\frac{n}{u} - x_0\right) + g\left(\frac{n}{u}\right)\left(\frac{n}{u} - x_0\right).$$

Für alle n ($n = 1, 2, \dots$) und $x_0 > 0$ ist

$$(3.3) \quad G'_n(f; x_0) = \int_0^\infty \left(\frac{n}{x_0} - u\right) g_n(x_0, u) f\left(\frac{n}{u}\right) du + \frac{1}{x_0} \int_0^\infty g_n(x_0, u) f\left(\frac{n}{u}\right) du.$$

Aus (3.2) und (3.3) folgt nach einer elementaren, allerdings längeren Rechnung

$$(3.4) \quad \begin{aligned} G'_n(f; x_0) - f'(x_0) &= \int_0^\infty g\left(\frac{n}{u}\right)\left(\frac{n}{u} - x_0\right)\left(\frac{n}{x_0} - u\right) g_n(x_0, u) du + \\ &+ \frac{1}{x_0} \int_0^\infty g\left(\frac{n}{u}\right)\left(\frac{n}{u} - x_0\right) g_n(x_0, u) du = S_1 + S_2, \end{aligned}$$

wobei die Existenz der Integrale für alle n gesichert ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so, daß

$$\left| g\left(\frac{n}{u}\right) \right| < \varepsilon \quad \text{ist für} \quad \left| \frac{n}{u} - x_0 \right| < \delta.$$

Wir benützen die im Beweis von 2.11 beschriebene Zerlegung des Integrationsbereichs in die beiden disjunkten Teile I_1 und I_2 ; S_1 wird dadurch zerlegt in T_1 und T_2 . Für $u \in I_1$ folgt aus (2.5)

$$\left| \frac{n}{u} - x_0 \right| < \delta \quad \text{und deshalb} \quad \left| g\left(\frac{n}{u}\right) \right| < \varepsilon.$$

Wegen

$$\left(\frac{n}{x_0} - u \right) \frac{x_0}{u} = \frac{n}{u} - x_0$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq \varepsilon \frac{x_0^{n+2}}{n!} \int_{u \in I_1} e^{-x_0 u} u^{n-1} \left(\frac{n}{x_0} - u \right)^2 du \\ (3.5) \quad &\leq \varepsilon \frac{x_0^{n+2}}{n!} \int_0^\infty e^{-x_0 u} u^{n-1} \left(\frac{n}{x_0} - u \right)^2 du = \varepsilon. \end{aligned}$$

Für $u \in I_2$ folgt wegen (3.2) die Existenz zweier reeller Zahlen $M > 0$ und $N > 0$ so, daß

$$(3.6) \quad \left| g\left(\frac{n}{u}\right) \left(\frac{n}{u} - x_0 \right) \right| \leq M \frac{n}{u} + N$$

ist, und hieraus folgt dann

$$\begin{aligned} (3.7) \quad |T_2| &\leq \frac{M x_0^{n+1}}{(n-1)!} \int_{u \in I_2} \left| \frac{n}{x_0} - u \right| e^{-x_0 u} u^{n-1} du + N \int_{u \in I_2} \left| \frac{n}{x_0} - u \right| g_n(x_0, u) du \\ &= T_{21} + T_{22}. \end{aligned}$$

Aus der Schwarzschen Ungleichung und dem Hilfssatz 2.3 ($m=2$) folgt für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} &\left[\int_{u \in I_2} \left| \frac{n}{x_0} - u \right| g_n(x_0, u) du \right]^2 \\ &\leq \left[\int_{u \in I_2} \left(\frac{n}{x_0} - u \right)^2 g_n(x_0, u) du \right] \cdot \left[\int_{u \in I_2} g_n(x_0, u) du \right] \\ &\leq S_{2n}(x_0) \int_{u \in I_2} g_n(x_0, u) du \leq \frac{2K_n(4)(x_0 + \delta)^2}{\delta^4 x_0^2} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

und damit die Existenz einer Zahl $n_1 = n_1(\varepsilon)$ so, daß für $n \geq n_1$ $T_{22} \leq \varepsilon$ ist. T_{21} schätzen wir nach oben ab durch

$$T_{21} \leq \frac{M n^2}{x_0} \int_{u \in I_2} g_n(x_0, u) du + M n \int_{u \in I_2} g_n(x_0, u) du + \frac{M n^2 x_0^n}{n!}.$$

Vermöge des Hilfssatzes 2.3 ($m=3$) folgt für $n \geq 2$ die Existenz einer Zahl $n_2 = n_2(\varepsilon)$ so, daß für $n \geq n_2$ auch $T_{2,1} \leq \varepsilon$ ist. Ganz auf die gleiche Weise schließt man leicht auf die Existenz einer Zahl $n_3 = n_3(\varepsilon)$ so, daß $S_2 \leq \varepsilon$ ist für $n \geq n_3$. Die Behauptung des Satzes folgt nun für $n \geq \max(n_1, n_2, n_3)$.

Ist die mit einer Funktion $f(x) \in M[0, \infty)$ gebildete Funktion

$$(3.8) \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

für $x > 0$ beschränkt, so ist nach Satz 3.1 punktweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G'_n(F; x) = f(x)$$

fast überall in $(0, \infty)$, da die Funktion $F(x)$ auf allen Intervallen $[r, R]$ (wobei $0 < r < R < \infty$) absolut stetig ist und demnach $F'(x) = f(x)$ ist fast überall für $x > 0$.

Es gilt hier das folgende Paar von Lokalisationssätzen:

Satz 3.2 (A_L -Lokalisationssatz). *Die beiden Funktionen $f(x), g(x) \in M(0, \infty)$ seien für $x > 0$ stetig. Weiter gelte (a) $f(x) \in A_L$, (b) $|g(x)| \leq Q$ (Q eine positive Konstante), (c) $f(x) = g(x)$ für $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ ($0 < \delta < x_0$). Dann existiert $G'_n(f; x_0)$ für $n \geq [a/x_0] + 1$, ferner*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G'_n(f; x_0),$$

und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G'_n(f; x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} G'_n(g; x_0).$$

Satz 3.3 ($A_R[0, \infty)$ -Lokalisationssatz). *Die beiden Funktionen $f(x), g(x) \in M[0, \infty)$ seien für $x \geq 0$ stetig. Weiter gelte (a) $f(x) \in A_R[0, \infty)$, (b) $|g(x)| \leq Q$ (Q eine positive Konstante), (c) $f(x) = g(x)$ für $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ ($0 < \delta < x_0$) falls $x_0 > 0$, und für $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$ ($\delta > 0$) falls $x_0 = 0$ ist. Dann existiert $G'_n(f; x_0)$ für $n \geq [a]$, ferner existiert*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G'_n(f; x_0),$$

und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G'_n(f; x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} G'_n(g; x_0).$$

Die Beweise der beiden Lokalisationssätze lassen sich ganz entsprechend wie die der Sätze 2.6 und 2.11 führen. Wichtig ist auch hierbei wieder der Hilfssatz 2.3.

Faßt man die Aussagen der Sätze 3.1 bis 3.3 zusammen, so ergibt sich (wie in Nummer 2) eine Erweiterung der Konvergenzaussage des Satzes 3.1 auf den Funktionenraum A .

Gehört die mit einer Funktion $f(x) \in M[0, \infty)$ gebildete Funktion $F(x)$ (s. (3.8)) dem Raum A an, so gibt es zu jedem Intervall $[x_1, \infty)$ (wobei

$0 < x_1 < \infty$) einen Index n_0 (der i. a. von $F(x)$ und x_1 abhängen wird) derart, daß $G'_n(F; x)$ in $[x_1, \infty)$ existiert, und ferner gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G'_n(F; x) = f(x)$$

(punktweise) fast überall in $[x_1, \infty)$.

4. Monotonie und konvexitäterhaltende Eigenschaften der Folge $\{G_n\}$

Definition 4.1. (Funktionsraum $D^{(k)}$). $D^{(k)}$ ($k=0, 1, \dots$) sei der lineare Raum derjenigen Funktionen $f(x) \in A$, die für $x > 0$ k -fach stetig differenzierbar sind.

POPOVICIU (vgl. [10]) nennt eine (reellwertige) Funktion $f(x)$ konvex (bzw. polynomial bzw. konkav) von k -ter Ordnung auf einem Intervall $[a, b]$ genau dann, wenn für jede Gruppe von $k+2$ Knoten $x_1, x_2, \dots, x_{k+2}$ aus $[a, b]$ gilt

$$[x_1, x_2, \dots, x_{k+2}; f] > 0 \quad (\text{bzw. } = 0, \text{ bzw. } < 0).$$

Dabei stellt $[x_1, x_2, \dots, x_{k+2}; f]$ die dividierte Differenz $(k+1)$ -ter Ordnung der Funktion $f(x)$ dar. Für eine im Intervall $[a, b]$ $(k+1)$ -fach stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ gilt bekanntlich

$$[x_1, x_2, \dots, x_{k+2}; f] = \frac{f^{(k+1)}(\vartheta)}{(k+1)!},$$

wobei

$$\min_i x_i < \vartheta < \max_i x_i$$

ist. Wir nennen deshalb im folgenden eine $(k+1)$ -fach stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ konvex (bzw. polynomial bzw. konkav) von k -ter Ordnung auf dem Intervall $[a, b]$, genau dann, wenn $f^{(k+1)}(x) > 0$ (bzw. $= 0$, bzw. < 0) ist auf $[a, b]$.

Definition 4.2. $K_+^{(k)}$ (bzw. $K_0^{(k)}$, bzw. $K_-^{(k)}$) ($k=0, 1, \dots$) seien die linearen Räume derjenigen Funktionen $f(x) \in D^{(k+1)}$, die konvex (bzw. polynomial bzw. konkav) von k -ter Ordnung sind auf dem Intervall $(0, \infty)$. ($f(x) \in K_-^{(k)}$ ist gleichbedeutend mit $-f(x) \in K_+^{(k)}$.)

In dem nun folgenden Satz wird die Konvergenzaussage von Satz 2.2 für gewisse lineare Teilräume von A präzisiert.

Satz 4.3. Sei $f(x) \in K_+^{(1)}$ (bzw. $K_0^{(1)}$ bzw. $K_-^{(1)}$). Dann gibt es für jedes $x_1 > 0$ ein n_0 (das im allgemeinen von der Funktion $f(x)$ und von x_1 abhängen wird), derart, daß $G_n(f; x)$ für $x \geq x_1$ und für $n \geq n_0$ existiert und die Folge $\{G_n(f; x)\}$ für jedes feste x aus dem Intervall $[x_1, \infty)$ mit $n(n \geq n_0)$ echt monoton abnimmt (bzw. konstant bleibt bzw. echt monoton zunimmt).

Beweis. Die Funktion $f(x)$ gehöre einem der Räume $K_+^{(1)}$, $K_0^{(1)}$ oder $K_-^{(1)}$ an. Da $f(x)$ aus A ist, wissen wir wegen der Hilfssätze 2.5 und 2.9, daß $G_n(f; x)$ auf $[x_1, \infty)$ existiert, falls $n \geq \max([a/x_1] + 1, [b]) = n_0$ ist. Es sei nun $n > n_0$

fest. Durch partielle Integration von $G_{n+1}(f; x)$ erhalten wir

$$G_{n+1}(f; x) = \int_0^\infty g_n(x, u) f\left(\frac{n+1}{u}\right) du - \int_0^\infty g_n(x, u) \frac{1}{u} f'\left(\frac{n+1}{u}\right) du$$

und können schreiben

$$(4.1) \quad G_{n+1}(f; x) - G_n(f; x) = \int_0^\infty g_n(x, u) \frac{1}{u} \left[\frac{f\left(\frac{n+1}{u}\right) - f\left(\frac{n}{u}\right)}{\frac{1}{u}} - f'\left(\frac{n+1}{u}\right) \right] du.$$

Da $f(x) \in D^{(1)}$, folgt aus dem Mittelwertsatz

$$(4.2) \quad G_{n+1}(f; x) - G_n(f; x) = \int_0^\infty g_n(x, u) \frac{1}{u} \left[f'(\vartheta_{n,u}) - f'\left(\frac{n+1}{u}\right) \right] du,$$

wobei

$$\frac{n}{u} < \vartheta_{n,u} < \frac{n+1}{u}$$

ist. Gehört die Funktion $f(x)$ nun bzw. einem der Räume $K_+^{(1)}$, $K_0^{(1)}$, $K_-^{(1)}$ an, so sieht man unmittelbar, daß für $n \geq n_0$ $G_{n+1}(f; x) - G_n(f; x) < 0$ (bzw. $= 0$ bzw. > 0) ist auf $[x_1, \infty)$.

Ist die Funktion $f(x)$ im obigen Satz global beschränkt, so ist speziell $n_0 = 0$.

L sei ein Operator, der auf einem beliebigen Funktionenraum F definiert sei.

Definition 4.4. Wir sagen genau dann, daß der Operator L die Konvexität (bzw. Polynomialität bzw. Konkavität) k -ter Ordnung auf einem Intervall $[a, b]$ erhält, wenn die Bilder $L(f; x)$ von Funktionen $f(x) \in F$, die auf einem Intervall $[\alpha, \beta]$ konvex (bzw. polynomial bzw. konkav) von k -ter Ordnung sind, wieder konvex (bzw. polynomial bzw. konkav) von k -ter Ordnung auf $[a, b]$ sind.

Es soll nun eine konvexitäterhaltende Eigenschaft der Gammaoperatoren untersucht werden. Dazu benötigen wir zuvor

Hilfssatz 4.5. Sei $f(x) \in D^{(k)}$ ($k=0, \dots, n-[b]$) und $x_1 > 0$ beliebig. Dann existiert $G_n(f; x)$ auf dem Intervall $[x_1, \infty)$ für $n \geq \max([a/x_1] + 1, [b]) = n_0$ und es gilt

$$G_n^{(k)}(f; x) = \frac{n^k}{n!} x^{n-k+1} \int_0^\infty e^{-xu} u^{n-k} f^{(k)}\left(\frac{n}{u}\right) du \quad (k=0, \dots, n-[b]).$$

Beweis. Wir betrachten das Integral

$$I_{n-s}(f; x) = \int_0^\infty e^{-xu} u^{n-s} f\left(\frac{n}{u}\right) du \quad (s=0, \dots, n-[b]).$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$(4.3) \quad I_{n-s}(f; x) = \frac{x}{n-s+1} I_{n-s+1}(f; x) + \frac{n}{n-s+1} I_{n-s-1}(f'; x).$$

Andererseits ist

$$(4.4) \quad \frac{d}{dx} I_{n-s}(f; x) = -I_{n-s+1}(f; x).$$

Mit den obigen Bezeichnungen können wir schreiben

$$(4.5) \quad G_n(f; x) = \frac{x^{n+1}}{n!} I_n(f; x).$$

Indem wir (4.5) differenzieren, erhalten wir

$$G'_n(f; x) = \frac{n+1}{n!} x^n I_n(f; x) - \frac{x^{n+1}}{n!} I_{n+1}(f; x)$$

und durch Verwendung von (4.3) für $s=0$ folgt hieraus

$$G'_n(f; x) = \frac{n}{n!} x^n I_{n-1}(f'; x).$$

Mittels vollständiger Induktion folgt leicht die Behauptung des Hilfssatzes.

Da die Operatoren G_n und alle ihre Ableitungen positive Operatoren sind, folgt aus Hilfssatz 4.5 unmittelbar der

Satz 4.6. *Sei $f(x) \in D^{(k)}$ ($k=0, \dots, n-[b]$). Dann gibt es für jedes $x_1 > 0$ ein n_0 (das im allgemeinen von der Funktion $f(x)$ und von x_1 abhängen wird), derart, daß $G_n(f; x)$ für $x \geq x_1$ und für $n \geq n_0$ existiert und jedes G_n ($n \geq n_0$) auf dem Intervall $[x_1, \infty)$ die Konvexität (bzw. Polynomialität bzw. Konkavität) k -ter Ordnung ($k=0, \dots, n-[b]-1$) erhält.*

Als bestimmte Integrale mit dem positiven Kern $g_n(x, u)$ sind die Gammaoperatoren G_n variationsvermindernd im Sinne von SCHOENBERG (vgl. [12]). Bezeichnen wir die Variation einer Funktion $f(x) \in A$ (A = Anzahl der Vorzeichenwechsel der Funktion, wenn die Variable x den Definitionsbereich durchläuft) mit $v[f(x)]$, so gilt also $v[G_n(f; x)] \leq v[f(x)]$, und da G_n linear ist, folgt wegen $G_n(1; x) = 1$ und $G_n(t; x) = x$ ($n=1, 2, \dots$) die Ungleichung

$$v[G_n(f; x) - A - Bx] \leq v[f(x) - A - Bx],$$

in der A und B beliebige reelle Konstanten sind. Die Ungleichung besagt, daß der Graph der approximierenden Funktion $G_n(f; x)$ nicht öfter um eine beliebige Gerade oszilliert als die zu approximierende Funktion.

5. Die lokale Approximationsordnung der Folge $\{G_n\}$

Die Geschwindigkeit, mit der die Folge der Differenzen $\Delta_n = G_n(f; x) - f(x)$ ($n=1, 2, \dots$) lokal gegen Null strebt, hängt naturgemäß von speziellen Eigenschaften des zugrunde gelegten Funktionenraums ab. Wir werden hier drei Fälle untersuchen.

Satz 5.1. Die Funktion $f(x) \in A_R[0, \infty)$ sei für $x \geq 0$ stetig, $\omega(\delta)$ sei ihr Stetigkeitsmodul und $x_0 (0 \leq x_0 < \infty)$ ein beliebiger Punkt. Dann existiert $G_{n+1}(f; x)$ für $n \geq [a]$ und $x \geq 0$, und es ist

$$(5.1) \quad |G_{n+1}(f; x_0) - f(x_0)| \leq (1 + x_0) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Beweis. Sei $n \geq [a]$ fest. Für $x_0 = 0$ ist die Behauptung des Satzes wegen der Festsetzung (2.8) trivialerweise richtig. Für $x_0 > 0$ existiert $G_{n+1}(f; x_0)$ nach Hilfssatz 2.9, und es gilt

$$(5.2) \quad |G_{n+1}(f; x_0) - f(x_0)| \leq G_{n+1}(|f(t) - f(x_0)|; x_0).$$

Aus der Definition des Stetigkeitsmoduls $\omega(\delta)$ folgt für ein beliebiges $\beta > 0$

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x_0)| &\leq \omega(|t - x_0|) = \omega\left(|t - x_0| n^\beta \frac{1}{n^\beta}\right) \\ &\leq (|t - x_0| n^\beta + 1) \omega\left(\frac{1}{n^\beta}\right), \end{aligned}$$

und aus (5.2) folgt

$$|G_{n+1}(f; x_0) - f(x_0)| \leq [n^\beta G_{n+1}(|t - x_0|; x_0) + 1] \omega\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

Die Schwarzsche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} G_{n+1}^2(|t - x_0|; x_0) &\leq G_{n+1}((t - x_0)^2; x_0) \\ &= G_{n+1}(t^2; x_0) - 2x_0 G_{n+1}(t; x_0) + x_0^2 G_{n+1}(1; x_0) = \frac{x_0^2}{n}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$|G_{n+1}(f; x_0) - f(x_0)| \leq [n^{\beta - \frac{1}{2}} x_0 + 1] \omega\left(\frac{1}{n^\beta}\right),$$

und die Behauptung des Satzes folgt für $\beta = \frac{1}{2}$.

Für Funktionen, die sehr rasch anwachsen, wie etwa die Funktion $f(x) = x^2$, macht der Satz keine Aussage, wohl aber für beschränkte Funktionen und genügend langsam wachsende Funktionen. Gehört die Funktion $f(x)$ der Lipschitzklasse Lip_M^α ($0 < \alpha \leq 1$) an, so folgt aus (5.1) die anschaulichere Abschätzung

$$(5.3) \quad |G_{n+1}(f; x_0) - f(x_0)| \leq \frac{M(1 + x_0)}{n^{\alpha/2}}.$$

Der nun folgende Satz verwendet eine starke lokale Eigenschaft der Funktion $f(x)$. Für seinen Beweis benötigen wir noch den folgenden

Hilfssatz 5.2 (A_L -Lokalisationssatz). Für die beiden Funktionen $f(x)$, $g(x) \in M(0, \infty)$ gelte

(a) $f(x) \in A_L$, (b) $|g(x)| \leq Q$ (Q eine positive Konstante), (c) $f(x) = g(x)$ für $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ (wobei $0 < \delta < x_0$). Dann existiert $G_n(f; x_0)$ für $n \geq [a/x_0] + 1$,

und es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[G_n(f; x_0) - G_n(g; x_0)] = 0.$$

Ein ganz entsprechender Satz gilt auch für Funktionen $f(x) \in A_R[0, \infty)$. Auf die Beweise beider Hilfssätze (vgl. [8]) soll hier verzichtet werden; ein wesentliches Beweishilfsmittel ist wieder der Hilfssatz 2.3.

Satz 5.3. Die Funktion $f(x) \in A$ besitze in einem festen Punkt x_0 ($0 < x_0 < \infty$) eine endliche zweite Ableitung. Dann existiert $G_n(f; x_0)$ für $n \geq \max([a/x_0] + 1, [b]) = n_0$, und es ist

$$(5.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)[G_n(f; x_0) - f(x_0)] = \frac{1}{2} x_0^2 f''(x_0),$$

$$(5.5) \quad G_{n+1}(f; x_0) - G_n(f; x_0) = -\frac{x_0^2}{2n(n-1)} f''(x_0) + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Sei $n \geq n_0$ fest. Um (5.4) nachzuweisen, genügt es nach einem Satz von MAMEDOW (vgl. [5, 8]) über Folgen linearer positiver Operatoren zu zeigen, daß für $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$G_n(1; x_0) = 1 + o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right),$$

$$G_n(t^k; x_0) = x_0^k + \frac{\psi_k(x_0)}{\varphi(n)} + o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right) \quad (k=1, 2),$$

wobei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \infty$$

und für ein geeignetes ganzes $m > 1$

$$(5.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) G_n((t-x_0)^{2m}; x_0) = 0$$

ist. Für jede beschränkte Funktion $f(x) \in M(0, \infty)$, die eine endliche zweite Ableitung besitzt, gilt dann

$$(5.7) \quad \begin{aligned} & G_n(f; x_0) - f(x_0) \\ &= \frac{2f'(x_0)\psi_1(x_0) + f''(x_0)[\psi_2(x_0) - 2x_0\psi_1(x_0)]}{2\varphi(n)} + o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right). \end{aligned}$$

Aus den Gln. (2.1) folgt $\psi_1(x_0) = 0$, $\psi_2(x_0) = x_0^2$, $\varphi(n) = n-1$, und eine einfache Rechnung ergibt

$$(5.8) \quad G_n((t-x_0)^4; x_0) = \frac{3n+18}{(n-1)(n-2)(n-3)} x_0^4,$$

d.h. die Gl. (5.6) ist bereits für $m=2$ erfüllt. Aus dem Satz von MAMEDOW folgt somit für beschränkte Funktionen $f(x) \in M(0, \infty)$

$$(5.9) \quad G_n(f; x_0) - f(x_0) = \frac{x_0^2}{2(n-1)} f''(x_0) + o\left(\frac{1}{n-1}\right).$$

Mit Hilfe des Lokalisationssatzes 5.2 bzw. seines Analogons zeigt man nun, wie im Beweis von Satz 2.7 bzw. Satz 2.12, daß die behauptete Gl. (5.4) auch für Funktionen $f(x) \in A_L$ bzw. $A_R[0, \infty)$ und damit für Funktionen $f(x) \in A$ gilt. Die Gl. (5.5) ist eine unmittelbare Folge von (5.4).

Die lokale Approximationsordnung läßt sich auch dann nicht verbessern, wenn höhere Ableitungen als die zweite existieren. Dies zeigt das Beispiel der Funktion $f(x) = x^{-2} \in A$. Für $x_0 > 0$ gilt hier

$$G_n(f; x_0) - f(x_0) = \frac{(n+1)(n+2)}{n^2} \cdot \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0^2} = \frac{3n+2}{n^2} \cdot \frac{1}{x_0^2} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ähnliche Ergebnisse erhalten wir, wenn wir die bisherige starke lokale Forderung streichen, dafür aber eine wesentlich stärkere globale Forderung an die Funktion $f(x)$ stellen.

Satz 5.4. Die Funktion $f(x) \in D^{(1)}$ sei für $x > 0$ stetig und x_0 ($0 < x_0 < \infty$) sei ein beliebiger Punkt. Dann existiert $G_{n+1}(f; x)$ für $n \geq n_0$ (s. Satz 5.3) und $x \geq x_0$, und für geeignete (voneinander verschiedene) $\xi_{in} \in [x_0, \infty)$ ($i = 1, 2, 3$) ist

$$(5.10) \quad G_{n+1}(f; x_0) - f(x_0) = \frac{x_0^2}{n} [\xi_{1n}, \xi_{2n}, \xi_{3n}; f],$$

und für geeignete (voneinander verschiedene) $\eta_{in} \in [x_0, \infty)$ ($i = 1, 2, 3$) ist

$$(5.11) \quad G_{n+2}(f; x_0) - G_{n+1}(f; x_0) = -\frac{x_0^2}{n(n+1)} [\eta_{1n}, \eta_{2n}, \eta_{3n}; f].$$

Beweis. Sei $n \geq \max(n_0, 2)$ fest. Für $x_0 > 0$ existiert $G_{n+1}(f; x_0)$ nach den Hilfssätzen 2.5 und 2.9. Nach einem Satz von POPOVICU (vgl. [11]) über Restglieder in linearen Approximationsformeln hat das auf dem linearen Raum $D^{(1)}$ definierte lineare Funktional

$$R_n[f] = f(x_0) - G_{n+1}(f; x_0)$$

die Darstellung

$$(5.12) \quad R_n[f] = C \cdot [\xi_{1n}, \xi_{2n}, \xi_{3n}; f] \quad (\text{Funktional „einfacher Art“}),$$

wobei $C \neq 0$ unabhängig von $f(x)$ ist und die voneinander verschiedenen Knoten $\xi_{in} \in [x_0, \infty)$ ($i = 1, 2, 3$) im allgemeinen von $f(x)$ abhängen, genau dann, wenn gilt

$$(1) \quad R_n[1] = 0, R_n[t] = 0, R_n[t^2] \neq 0,$$

(2) $R_n[f] \neq 0$ für jede Funktion $f(x) \in D^{(1)}$, die auf dem Intervall $[x_0, \infty)$ konvex von erster Ordnung ist.

Die Bedingung (1) ist wegen (2.1) erfüllt, die Bedingung (2) wegen Satz 4.4. Die Konstante C bestimmen wir nun aus der Tatsache, daß sie unabhängig von $f(x)$ ist. Für die spezielle Funktion $f(x) = x^2$ folgt aus (5.12) unmittelbar

$$C = -\frac{x_0^2}{n} \quad ([\xi_{1n}, \xi_{2n}, \xi_{3n}; t^2] = 1),$$

womit die behauptete Gl. (5.10) bewiesen ist. Die zweite Behauptung (5.11) ist eine einfache Folgerung hiervon.

Aus (5.10) folgt noch, daß das Restglied positiv (bzw. negativ) ist für eine Funktion, die auf dem Intervall $[x_0, \infty)$ konvex (bzw. konkav) von erster Ordnung ist.

Literatur

- [1] CHENEY, E.W., and A. SHARMA: Bernstein power series. *Canad. Journal of Math.* **16**, 241—252 (1964).
- [2] FELLER, W.: An introduction to probability theory and its applications I. New York: John Wiley & Sons 1950.
- [3] FISZ, M.: Probability theory and mathematical statistics. New York and London: John Wiley & Sons 1963.
- [4] KOROVKIN, P.P.: Linear operators and approximation theory. Delhi: Hindustan Publ. Corp. 1960.
- [5] MAMEDOW, R.G.: Über die Approximationsordnung von Funktionen [Russisch]. *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.* **128**, 674—676 (1959).
- [6] MEYER-KÖNIG, W.: Das Taylorsche Verfahren zur Limitierung von Funktionen. *Math. Zeitschr.* **56**, 179—205 (1952).
- [7] —, u. K. ZELLER: Bernsteinsche Potenzreihen. *Studia Math.* **19**, 89—94 (1960).
- [8] MÜLLER, M.: Die Folge der Gammaoperatoren. Dissertation Stuttgart 1967.
- [9] NATANSON, I.P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin: Akademie Verlag 1961.
- [10] POPOVICIU, T.: Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. *Mathematica (Cluj)* **10**, 49—54 (1935).
- [11] — Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse. *Mathematica (Cluj)* **1**(24), 95—142 (1959).
- [12] SCHOENBERG, I.: On variation diminishing approximation methods (R.E. LANGER, ed.). On numerical approximation. Madison: The University of Wisconsin Press 1959.
- [13] SZÁSZ, O.: Generalization of S. BERNSTEIN's polynomials to the infinite intervall. *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **45**, 239—245 (1950).
- [14] ZELLER, K.: Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.

Academia Republicii Socialiste România, Institutul de Calcul, Cluj (Rumänien)

*Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule, Stuttgart
(Bundesrepublik Deutschland)*