

E.3786/6

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

EXTRAS

8

TOMUL 19
1967

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMANIA

BIBL. FAC. DE MATEMATICĂ
NR. 24.447 19 79

101

ASUPRA UNOR INEGALITĂȚI RECURENTE ȘI APLICAȚII ALE LOR¹⁾

DE

I. PĂVĂLOIU

(Cluj)

În lucrare se deduc două inegalități pe care le verifică elementele unui șir de numere nenegative în ipoteza că aceste elemente verifică anumite inegalități recurente.

În sfârșit se dă o aplicație a acestor inegalități la evaluarea erorilor în cazul rezolvării ecuațiilor neliniare cu metode iterative cu doi pași.

Fie dat un șir infinit $G = \{g_0, g_1, \dots, g_n, \dots\}$ de numere reale și nenegative și două numere k și α , $\alpha \geq 0$.

Dacă elementele șirului G satisfac inegalitățile :

$$(1) \quad g_n \leq k g_{n-1} + \alpha,$$

atunci, oricare ar fi g_n un element al șirului G , are loc următoarea inegalitate

$$(2) \quad g_n \leq k^n g_0 + \frac{\alpha}{1-k}$$

care depinde numai de n și de g_0 și nu depinde de elementele care preced pe g_n în șirul G .

1. În Nota de față ne propunem să generalizăm acest rezultat în cazul când inegalitatea (1) este înlocuită cu una mai generală și anume, vom presupune că elementele șirului G satisfac următoarele inegalități :

$$1.1) \quad g_n \leq \beta g_{n-1} + \gamma g_{n-2} + \alpha; \quad 0 < \beta + \gamma < 1.$$

¹⁾ Lucrare comunicată la „Colocviu de teoria funcțiilor convexe cu aplicație la calculul numeric” din 1-5 iunie 1965, Cluj.

În acest caz pentru a demonstra o inegalitate analoagă cu (2) nu se mai poate aplica același procedeu ca și pentru demonstrarea inegalității (2). Fie

$$(1.2) \quad c_1 = \frac{\beta g_1 + \gamma g_0}{x_1},$$

unde x_1 este dat de următoarea egalitate:

$$x_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\gamma}}{2}.$$

Cu aceste notații avem următorul rezultat:

TEOREMA 1. Dacă șirul G satisface inegalitățile (1.1) și în plus

$$(1.3) \quad g_1 \leq c_1$$

unde c_1 este dat de egalitatea (1.2), atunci oricare ar fi g_n un element al șirului G este satisfăcută inegalitatea:

$$(1.4) \quad g_n \leq c_1 x_1^{n-1} + \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma}.$$

Demonstrație. Mai întâi vom demonstra că inegalitatea (1.3) este în adevăr posibilă, ținând seamă că c_1 depinde de g_1 . Din (1.2) și (1.3) avem:

$$g_1 \leq \frac{\beta g_1 + \gamma g_0}{x_1}$$

sau

$$(x_1 - \beta) g_1 \leq \gamma g_0;$$

trebuie deci să arătăm că $x_1 - \beta > 0$ adică $\sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \gamma} - \frac{\beta}{2} > 0$ ceea ce este adevărat totdeauna.

Trecem acum la demonstrația teoremei enunțate. Se observă fără nici un fel de dificultate că dacă $x_1 < 1$, atunci $\gamma + \beta < 1$ și invers Din (1.1) și (1.3) avem:

$$g_1 \leq c_1$$

$$g_2 \leq \beta g_1 + \gamma g_0 + \alpha \leq c_1 x_1 + \alpha + \alpha c \beta + \gamma = c_1 x_1 + \alpha [1 + \beta + \gamma]$$

și ținând cont de aceasta obținem:

$$g_3 \leq \beta g_2 + \gamma g_1 + \alpha \leq c_1 (\beta x_1 + \gamma) + \alpha [1 + (\beta + \gamma) + (\beta + \gamma)^2]$$

Este ușor de arătat că

$$(1.5) \quad \beta x_1 + \gamma = x_1^2$$

deci

$$(1.6) \quad g_3 \leq c_1 x_1^2 + \alpha [1 + (\beta + \gamma) + (\beta + \gamma)^2]$$

În general, dacă presupunem prin inducție că:

$$g_{n-2} \leq c_1 x_1^{n-3} + \alpha \sum_{i=0}^{n-3} (\beta + \gamma)^i$$

$$g_{n-1} \leq c_1 x_1^{n-2} + \alpha \sum_{i=0}^{n-2} (\beta + \gamma)^i$$

atunci vom arăta că și pentru g_n are loc o inegalitate analoagă. Adică:

$$g_n \leq \beta g_{n-1} + \gamma g_{n-2} + \alpha \leq c_1 x_1^{n-3} (\beta x_1 + \gamma) + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (\beta + \gamma)^i$$

și ținând cont de egalitatea (1.5) avem:

$$g_n \leq c_1 x_1^{n-1} + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (\beta + \gamma)^i.$$

Dacă se ține cont acum de faptul că $\beta + \gamma < 1$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$, rezultă că:

$$g_n \leq c_1 x_1^{n-1} + \frac{\alpha}{1 - \beta - \gamma}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

2. Vom pune acum problema mai general. Fie dat șirul G și numerele pozitive $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$, $k \geq 2$ cu condiția:

$$(2.1) \quad \delta = \sum_{i=0}^k \beta_i < 1$$

și șirul de inegalități:

$$(2.2) \quad g_{k+1} \leq \sum_{i=0}^k \beta_i g_i + \alpha$$

$$g_{k+\beta+1} \leq \sum_{i=0}^k \beta_i g_{i+s} + s + \alpha, \quad s = 1, 2, \dots$$

Să se deducă pentru g_n , $n = k+1, k+2, \dots$, o inegalitate analoagă cu inegalitatea (1.4)

Să observăm mai întâi că ecuația:

$$(2.3) \quad F(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_k x^k - x^{k+1} = 0$$

admite cel puțin o rădăcină cuprinsă în intervalul $(0,1)$. Aceasta se arată ușor, deoarece $F(0) = \beta_0 > 0$ și $F(1) = \delta - 1 < 0$. Fie $x \in (0,1)$ rădăcina ecuației (2.3) pe care am precizat-o mai sus. Considerăm constanta c_1 pentru care sînt satisfăcute inegalitățile:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} g_0 &\leq c_1 + \alpha \\ g_1 &\leq c_1 x_1 + \alpha (1 + \delta) \\ &\dots \\ g_k &\leq c_1 x_1^k + \alpha (1 + \delta + \dots + \delta^k). \end{aligned}$$

Dacă ținem cont de inegalitățile (2.2) și (2.4) avem :

$$g_{k+1} \leq c_1 (\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x^k) + \alpha (1 + \delta + \dots + \delta^{k+1})$$

și ținând cont de (2.3) avem :

$$g_{k+1} \leq c_1 x_1^{k+1} + \alpha (1 + \delta + \dots + \delta^{k+1}).$$

Ușor se arată prin inducție că în general avem :

$$g_{k+s} \leq c_1 x_1^{k+s} + \alpha (1 + \delta + \dots + \delta^{k+s}).$$

sau

$$(2.5) \quad g_{k+s} \leq c_1 x_1^{k+s} + \frac{\alpha}{1 - \delta}.$$

Ținând cont de cele arătate mai sus, în general putem enunța următorul rezultat :

TEOREMA 2. Dacă șirul G satisface inegalitățile (2.2) cu condițiile (2.1), c_1 este o constantă pozitivă, astfel ca inegalitățile (2.4) să fie satisfăcute și x_1 este o rădăcină a ecuației (2.3) cuprinsă în intervalul $(0,1)$, atunci oricare ar fi s avem următoarea inegalitate :

$$g_{k+s} \leq c_1 x_1^{k+s} + \frac{\alpha}{1 - \delta}.$$

3. În continuare vom da o aplicație simplă a teoremei 1 la evaluarea erorilor în procedeele iterative cu doi pași.

Considerăm ecuația :

$$(3.1) \quad x = \varphi(x),$$

unde despre funcția φ definită pe intervalul $[a, b]$ facem următoarele ipoteze :

a) Funcției φ putem face să-i corespundă o funcție de două variabile $F(x, \varphi)$ cu proprietatea că $F(x, x) = \varphi(x)$.

b) Oricare ar fi x și y două puncte din $[a, b]$, valoarea funcției $F(x, y)$ pe aceste puncte aparține tot intervalului $[a, b]$.

c) $|F(x, y) - F(x', y')| \leq \alpha |x - x'| + \beta |y - y'|$ oricare ar fi (x, y) și (x', y') două puncte din domeniul $[a, b] \times [a, b]$.

În lucrarea [1] este dovedit că oricare ar fi punctele x_0 și x_1 din $[a, b]$ șirul :

$$(3.2) \quad x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

converge către soluția $\bar{x}$ a ecuației (3.1) dacă $\alpha + \beta < 1$ și sînt îndeplinite condițiile a), b) și c). Pentru a rezolva ecuația (3.1) vom considera o altă funcție $F^*(x, y)$ definită tot pe $[a, b] \times [a, b]$ și care transformă această mulțime în ea însăși sau într-o parte a sa. Funcția $F^*(x, y)$ vom presupune că este legată de funcția $F(x, y)$ prin inegalitatea

$$(3.3) \quad |F(x, y) - F^*(x, y)| \leq \delta,$$

unde δ este o constantă pozitivă dată. Considerăm acum în locul procedurii (3.2) procedeul :

$$(3.4) \quad x_{n+1}^* = F^*(x_n^*, x_{n-1}^*), \quad n = 1, 2, \dots,$$

De multe ori în calculele practice este convenabil ca procedeul de forma (3.4) să fie oprit cu un criteriu de forma :

$$(3.5) \quad |x_m^* - x_{m-2}^*| \leq \varepsilon$$

dar acest lucru nu totdeauna este posibil deoarece noi în afară de condiția (3.3) nu cunoaștem alte proprietăți ale funcției $F^*(x, y)$. Vom arăta că pentru ca inegalitatea (3.5) să fie satisfăcută la un moment dat, este suficient ca :

$$(3.6) \quad \varepsilon > \frac{2\delta}{1 - \alpha - \beta}.$$

Din (3.4) și (3.3) avem :

$$|x_m^* - x_{m-2}^*| \leq \alpha |x_{m-1}^* - x_{m-3}^*| + \beta |x_{m-2}^* - x_{m-4}^*| + 2\delta.$$

Dacă aplicăm acum rezultatele teoremei 1 obținem :

$$|x_m^* - x_{m-2}^*| \leq c_1 x_1^{m-1} + \frac{2\delta}{1 - \alpha - \beta} \quad 0 \leq x_1 \leq g < 1$$

de unde rezultă că inegalitatea (3.6) poate fi satisfăcută pentru un m destul de mare.

Dacă notăm cu $\varepsilon_1 = |x_m^* - x_{m-1}^*|$ obținem pentru diferența $|\bar{x} - x_m^*|$ următoarea evaluare :

$$|\bar{x} - x_m^*| \leq \frac{\alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon + \delta}{1 - \alpha - \beta}.$$

Aceasta este evaluarea erorii care se comite în cazul cînd procedeul (3.2) este înlocuit cu procedeul (3.4).

Primită la redacție la 23 martie 1967.

Institutul de calcul al Academiei
Republicii Socialiste România,
Filiata Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. H. J. WEINITSCHKE, Über eine Klasse von Iterationsverfahren. Numerische Mathematik, **6**, 395-404 (1964).
2. M. URABE, Error Estimation in Numerical Solution of Equations by Iteration Process. J. Sci. Hiroshima. Univ. Ser. A-I, **26**, 2 (1962).