

Einbettung von Inzidenzstrukturen in projektive Ebenen mit vorgegebenen Schließungssätzen

Von

F. RADÓ

1. In dieser Arbeit wollen wir folgende Frage behandeln: Unter welchen Bedingungen kann man eine Inzidenzstruktur erweitern zu einer projektiven Ebene, in welcher ein bestimmter allgemeiner Schließungssatz gilt?

Wir werden einen Schließungssatz T als eine *Folge* eines anderen S bezeichnen, wenn bei beliebiger Wahl der Inzidenzstruktur $\mathfrak{I}$, die Gültigkeit von S in $\mathfrak{I}$ die Gültigkeit von T in $\mathfrak{I}$ nach sich zieht. Wird dasselbe nur für solche $\mathfrak{I}$ verlangt, welche projektive Ebenen sind, so werden wir T eine *projektive Folge* von S nennen. Zwei Schließungssätze sind (*projektiv*) *äquivalent*, wenn jeder eine (projektive) Folge des anderen ist. Es soll darauf hingewiesen werden, daß bei der Herleitung einer projektiven Folge gewisse Schnittpunkte und Verbindungsgeraden benutzt werden, die in einer Inzidenzstruktur nicht zu existieren brauchen. Wollen wir also, daß in einer Inzidenzstruktur neben dem Schließungssatz S auch eine gewisse projektive Folge desselben gelten soll, so müssen wir diese separat postulieren.

Für die Einbettbarkeit einer Inzidenzstruktur $\mathfrak{I}$ in eine projektive Ebene mit dem vorgegebenen Schließungssatz S ist es offenbar notwendig, daß alle projektiven Folgen von S in $\mathfrak{I}$ erfüllt sein sollen. Wir werden — unter gewissen Einschränkungen — beweisen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist.

Diesem Resultat werden wir eine schärfere Form geben, indem wir die keineswegs konstruktiv hergestellte Menge aller projektiven Folgen von S durch gewisse mittels wohl definierter Operationen gebildete projektive Folgen ersetzen.

Für die benutzten Begriffe verweisen wir auf [1].

Die verwandte Frage nach der Einbettung eines Halbgewebes in ein reguläres Gewebe haben wir in [2] behandelt.

2. Die Voraussetzung des Schließungssatzes S wird mit $V(S)$, die Folgerung mit $F(S)$ bezeichnet. Ist die Inzidenzbeziehung $X \in \xi$ in $V(S)$ vorhanden, so nennen wir die Punktvariable X und die Geradenvariable ξ *benachbart*. Zwei verschiedene Variablen derselben Art heißen *benachbart*, wenn es eine duale Variable gibt, welche mit beiden benachbart ist.

Wir wollen einen Schließungssatz S als *zulässig* bezeichnen, wenn

- 1) er allgemein ist,
- 2) $F(S)$ nur eine Inzidenz $X_0 \in \xi_0$ enthält,

3) Verneinungen von Inzidenzen in $V(S)$ nicht vorkommen,

4) Ungleichungen in $V(S)$ nur zwischen benachbarten Variablen vorhanden sind.

Die Variablen X_0 und ξ_0 heißen *Folgerungsvariablen*. Kommt X_0 (bzw. ξ_0) in genau zwei Inzidenzen von $V(S)$ vor, so haben wir eine *elementare Folgerung* (bzw. eine *dual elementare Folgerung*).

Wenn eine Menge $\mathcal{U}$ von Ungleichungen zwischen Variablen eines zulässigen Schließungssatzes S diejenige Eigenschaft besitzt, daß sie, an die Stelle der Ungleichungsmenge von S gesetzt, zu einem äquivalenten zulässigen Schließungssatz führt, so wollen wir sagen, daß $\mathcal{U}$ eine zu S gehörige *Ungleichungsmenge* ist.

Jeder allgemeine Schließungssatz ist projektiv äquivalent mit einem zulässigen Schließungssatz oder mit einem System von zulässigen Schließungssätzen. Ist nämlich die Relation $X \notin \xi$ in $V(S)$ vorhanden, so ergänzen wir die Punktvariablen mit X_1, X_2 , die Geradenvariablen mit ξ_1, ξ_2 , und $V(S)$ mit $X_1 \in \xi, X_2 \in \xi, X \in \xi_1, X_1 \in \xi_1, X \in \xi_2, X_2 \in \xi_2, X_1 \neq X_2, \xi_1 \neq \xi, \xi_2 \neq \xi$ und streichen $X \notin \xi$. Offensichtlich führen diese Änderungen zu einem mit S projektiv äquivalenten Schließungssatz; in dieser Weise können wir der Reihe nach alle Verneinungen von Inzidenzen ausschließen. Enthält $V(S)$ die Ungleichung $X_1 \neq X_2$ und ist keine Geradenvariable ξ mit $X_1 \in \xi$ und $X_2 \in \xi$ in $V(S)$ vorhanden, so führen wir ein solches ξ ein; enthält $V(S)$ die Ungleichung $\xi_1 \neq \xi_2$ und sind ξ_1, ξ_2 nicht benachbart, so führen wir eine entsprechende Punktvariable ein. Dadurch erhält man wieder projektiv äquivalente Schließungssätze. Um noch die Eigenschaft 2) zu erreichen, trennt man nötigenfalls den Schließungssatz in mehrere zulässige Schließungssätze auf.

Wir können also o. B. d. A. die Annahme machen, daß der in der anfangs gestellten Frage vorkommende Schließungssatz zulässig sei.

Die nachstehenden Operationen ordnen zulässigen Schließungssätzen bzw. Schließungssatzpaaren projektive Folgen zu, die wieder zulässige Schließungssätze sind.

I. *Ausschließung einer Variablen aus der Ungleichungsmenge von $V(S)$* . a) Es soll die Punktvariable X ausgeschlossen werden, d. h. es sollen die Ungleichungen folgender Form entfernt werden: $X \neq X_1$ und $\xi_1 \neq \xi_2$, wobei ξ_1, ξ_2 durch X benachbart sind. Um das nachstehende Verfahren möglich wenigmal zu verwenden, ersetzen wir zunächst die Ungleichungen von $V(S)$ durch eine zu S gehörige Ungleichungsmenge so, daß eine Mindestzahl für die Ungleichungen der obigen Art erreicht sein soll. Bleiben noch Ungleichungen von der Form $X \neq X_1$ übrig, so führen wir für jede derartige Ungleichung die neuen Variablen Y, η, η_1 ein, und ergänzen $V(S)$ mit $X \in \eta, Y \in \eta, Y \in \eta_1, X_1 \in \eta_1, X_1 \neq Y, \eta \neq \eta_1$; sodann wird $X \neq X_1$ von der Voraussetzung ausgeschlossen. Für eine übrigbleibende Ungleichung der Form $\xi_1 \neq \xi_2$ führen wir die Variablen Y', Y'', η' ein, fügen der Voraussetzung $Y' \in \xi_1, Y' \in \eta', Y'' \in \eta', Y'' \in \xi_2, \xi_1 \neq \eta', Y' \neq Y''$ hinzu und lassen davon $\xi_1 \neq \xi_2$ weg.

b) Soll eine Geradenvariable ausgeschlossen werden, so wird das duale Verfahren vorgenommen.

II. *Freie Zusammenziehung*. Nehmen wir an, daß eine Variable X in nicht mehr als zwei Inzidenzen von $V(S)$, weder in $F(S)$ noch in der Ungleichungsmenge von $V(S)$ vorkommt, und daß diese Ungleichungsmenge auch keine Ungleichung zwischen

zwei mit X benachbarten Variablen enthält. Unter freier Zusammenziehung verstehen wir das Weglassen (in $V(S)$) aller Beziehungen, in denen X vorkommt, oder das duale Verfahren.

III. *Gleichsetzung von Variablen.* Sind X, Y zwei der Variablen eines Schließungssatzes S , so wird ein neuer Schließungssatz gebildet, indem man überall, wo X vorkommt, an seine Stelle Y setzt, und die Beziehungen von $V(S)$, welche logische Folgen der anderen geworden sind, streicht. Diese Gleichsetzung wird durch $X := Y$ angegeben.

IV. *Folgerungsaustausch.* Ist $F(S)$ elementar (bzw. dualelementar), so kann die Folgerung mit einer der beiden Inzidenzen von $V(S)$, welche die Folgerungspunkt- (bzw. Folgerungsgeraden-) Variable enthält, ausgetauscht werden.

V. *Zusammensetzung zweier Schließungssätze an benachbarten Variablenpaaren.*
 a) *An zwei Geradenpaaren.* Wir nehmen an, daß S und T zulässige Schließungssätze ohne gemeinsame Variable sind, daß $F(S)$ aus $X_0 \in \xi_0$ besteht, daß $X_0 \in \xi_1$ eine Beziehung aus $V(S)$, $Y_0 \in \eta_0$ aus $V(T)$, $Y_0 \in \eta_1$ aus $V(T)$ oder $F(T)$ ist. Die Zusammensetzung von S und T an den Geradenpaaren $\xi_0, \xi_1; \eta_0, \eta_1$ ist ein neuer zulässiger Schließungssatz, der folgendermaßen gebildet wird: Ist eine Variable Y bzw. η vorhanden, für welche die Beziehungen $Y \in \eta_0$, $Y_0 \neq Y$ bzw. $Y_0 \in \eta$, $\eta_0 \neq \eta$ in $V(T)$ enthalten sind, so werden die Ungleichungen $Y_0 \neq Y$ bzw. $\eta_0 \neq \eta$, wie in I., aus der Ungleichungsmenge von $V(T)$ ausgeschlossen; die Voraussetzung von T sei jetzt mit $V'(T)$ bezeichnet. Nun bilden wir die Voraussetzung der Zusammensetzung von S und T , indem wir $V(S)$ und $V'(T)$ zu einer einzigen Relationsmenge vereinigen, $Y_0 \in \eta_0$ davon entfernen und die Gleichsetzungen $X_0 := Y_0$, $\xi_0 := \eta_0$, $\xi_1 := \eta_1$ vornehmen. Als Folgerung der Zusammensetzung nehmen wir $F(T)$.

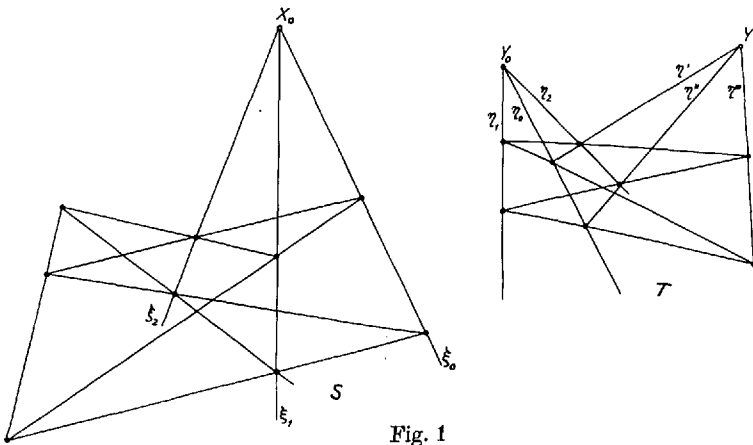


Fig. 1

Die in Fig. 1 skizzierten Schließungssätze S und T haben als Voraussetzungsinzidenzen die durch die fetten Punkte angedeuteten und $X_0 \in \xi_1$, $X_0 \in \xi_2$ bzw. $Y' \in \eta''$, $Y' \in \eta'''$; $F(S)$ besteht aus $X_0 \in \xi_0$ und $F(T)$ aus $Y' \in \eta'$. Die Zusammensetzung von S und T an den Geradenpaaren $\xi_0, \xi_1; \eta_0, \eta_1$ besitzt in der Voraussetzung die in Fig. 2 fett angedeuteten Inzidenzen und $Y' \in \eta''$, $Y' \in \eta'''$; ihre Folgerung ist $Y' \in \eta'$.

b) *An zwei Punktepaaren.* Bei dualen Annahmen wird die duale Konstruktion vorgenommen.

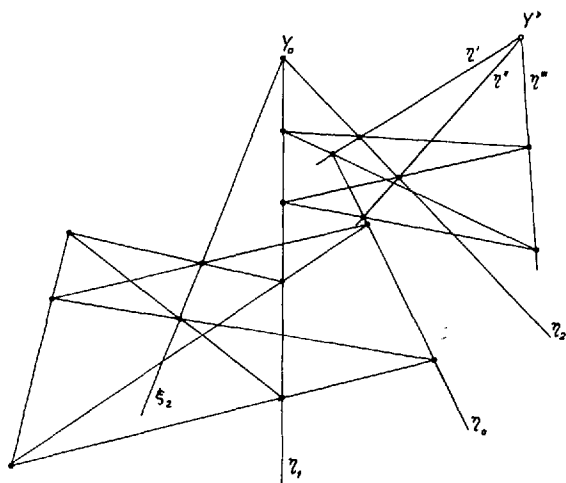


Fig. 2. Zusammensetzung von S und T an den Geradenpaaren $\xi_0, \xi_1; \eta_0, \eta_1$

VI. *Zusammensetzung zweier Schließungssätze an Variablentripeln.* a) *An Geradentripeln.* Wir fügen zu den obigen Annahmen noch hinzu: Die Folgerung von S ist elementar, $X_0 \in \xi_2$ ist die dritte die Folgerungspunktvariable X_0 enthaltende Inzidenzbeziehung, Y_0 ist nicht Folgerungsvariable in T , und es gibt genau drei Inzidenzen aus $V(T)$, die Y_0 enthalten: $Y_0 \in \eta_i, i = 0, 1, 2$. Die Zusammensetzung von S und T an den Geradentripeln $\xi_0, \xi_1, \xi_2; \eta_0, \eta_1, \eta_2$ wird gebildet, indem man die folgenden Operationen V, III, I und II nacheinander verwendet: Zusammensetzung von S

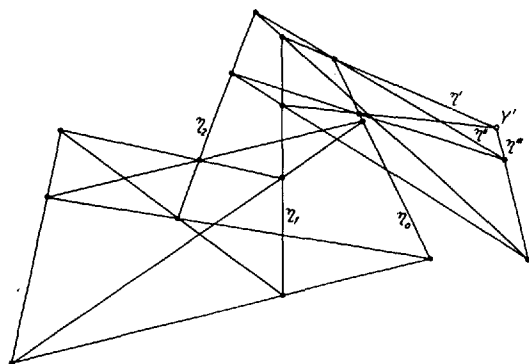


Fig. 3. Zusammensetzung von S und T an den Geradentripeln $\xi_0, \xi_1, \xi_2; \eta_0, \eta_1, \eta_2$

Fig. 3 stellt die Zusammensetzung der in Fig. 1 angegebenen Schließungssätze an den Geradentripeln $\xi_0, \xi_1, \xi_2; \eta_0, \eta_1, \eta_2$ dar. Wird in Fig. 2 die Gleichsetzung $\xi_2 := \eta_2$ vorgenommen, so ist Y_0 nur noch mit η_1 und η_2 inzident und Y_0 kann — nach eventueller Umformung der Ungleichungsmenge — durch freie Zusammenziehung entfernt werden.

und T an $\xi_0, \xi_1; \eta_0, \eta_1$, die Gleichsetzung $\xi_2 := \eta_2$, Ausschließung von Y_0 aus der Ungleichungsmenge, Entfernen von Y_0 mittels freier Zusammenziehung.

b) *An Punkttupeln. Duale Konstruktion.*

Die Menge der zulässigen Schließungssätze, welche sich durch endlich vielmalige Anwendung der Operationen III, IV, V und VI auf einen zulässigen Schließungssatz S ergibt, soll als die *Schließungssatzverwandtschaft* $[S]$ bezeichnet werden. Ist S nicht zulässig, so sollen die obigen Operationen auf ein mit S äquivalentes System von zulässigen Schließungssätzen angewendet werden und die dabei entstehende Schließungssatzmenge wieder mit $[S]$ bezeichnet werden.

Nun können wir eine Antwort auf die anfangs gestellte Frage für diejenige Inzidenzstrukturen $\mathfrak{I}$ geben, welche die folgende Verbindbarkeitsbedingung erfüllen:

(B) Zu jedem Punkt A und jeder Geraden α von $\mathfrak{I}$ gibt es einen Punkt P und eine Gerade γ von $\mathfrak{I}$ mit $A \in \gamma$, $P \in \gamma$, $P \in \alpha$.

Eine Inzidenzstruktur, in welcher durch zwei Punkte stets eine Gerade geht und auf jeder Geraden mindestens ein Punkt liegt und ebenso die dazu duale Struktur besitzen offensichtlich diese Eigenschaft.

Satz. *Eine nicht ausgeartete Inzidenzstruktur $\mathfrak{I}$, in welcher die Verbindbarkeitsbedingung (B) gilt, kann dann und nur dann zu einer projektiven Ebene mit vorgegebenem allgemeinen Schließungssatz S erweitert werden, wenn in $\mathfrak{I}$ die zu $[S]$ gehörenden Schließungssätze erfüllt sind.*

Beweis. Betrachten wir zunächst einen Schließungssatz $T \in [S]$, welcher folgende Bedingungen erfüllt: 1) er ist normal; 2) seine Folgerung ist elementar: $F(T)$ besteht aus $X_0 \in \xi_0$ und X_0 kommt noch genau in den beiden Inzidenzen $X_0 \in \xi_1$, $X_0 \in \xi_2$ vor; 3) keine Ungleichung aus $V(T)$ enthält die Variable X_0 oder zwei mit demselben ξ_i ($i = 0, 1, 2$) benachbarte Punktvariablen. Läßt man von der zum Schließungssatz T gehörigen Inzidenzstruktur (siehe [1], S. 27) den Punkt X_0 weg, so entsteht eine Inzidenzstruktur $\tilde{T}$, deren Bild bei einem beliebigen Isomorphismus φ wir als eine zu $[S]$ gehörige (von T hervorgerufene) Konfiguration mit den Trägern $\varphi(\xi_1)$, $\varphi(\xi_2)$, $\varphi(\xi_3)$ bezeichnen wollen. Es ist zu bemerken, daß in T ein Folgerungsaustausch ohne weiteres vorgenommen werden kann; die Konfiguration wird dabei nicht beeinflusst. Dual bildet man die zu $[S]$ gehörigen Konfigurationen, die drei verschiedene Punkte als Träger besitzen.

Wir wollen das Rekursionsschema, mit welchem in [1], S. 14 alle von $\mathfrak{I}$ erzeugten projektiven Ebenen hergestellt werden, in folgender etwas abgeänderten Form verwenden: Man setzt $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}$. Aus $\mathfrak{I}_{2m}$ wird $\mathfrak{I}_{2m+1}$ gebildet, indem man als neue Punkte die Elemente einer Menge Γ_{2m} von Geradenmengen aus $\mathfrak{I}_{2m}$ hinzufügt, und als Inzidenzrelation für einen neuen Punkt und eine Gerade aus $\mathfrak{I}_{2m}$ das Enthaltensein der Geraden in der den Punkt definierenden Menge nimmt; dabei soll Γ_{2m} den nachstehenden Bedingungen genügen: a) Jede Menge $\in \Gamma_{2m}$ enthält mindestens zwei Elemente, b) ein Paar von verschiedenen Geraden aus $\mathfrak{I}_{2m}$, deren Schnittpunkt in $\mathfrak{I}_{2m}$ nicht vorhanden ist, kommt in genau einer Menge $\in \Gamma_{2m}$ vor, c) zwei Geraden aus derselben Menge Γ_{2m} haben in $\mathfrak{I}_{2m}$ keinen Schnittpunkt. Die Elemente von Γ_{2m} sollen als *uneigentliche Büschel* in $\mathfrak{I}_{2m}$ bezeichnet werden. Aus $\mathfrak{I}_{2m+1}$ wird $\mathfrak{I}_{2m+2}$,

indem man dual vorgeht; dabei wird die Menge, welche Γ_{2m} entspricht, mit Π_{2m+1} bezeichnet. Die Vereinigung der $\mathfrak{S}_n$ ist eine von $\mathfrak{S}$ erzeugte projektive Ebene.

Wir bemerken, daß in $\mathfrak{S}_{2m+1}$ zwei Geraden stets einen gemeinsamen Punkt besitzen und in $\mathfrak{S}_{2m}$, $m \neq 0$, durch zwei Punkte immer eine Gerade geht. Also gilt die Verbindbarkeitsbedingung (B) in allen $\mathfrak{S}_n$, insofern sie nur in $\mathfrak{S}_0$ erfüllt ist.

Nun nehmen wir an, daß die Inzidenzstruktur $\mathfrak{S}$ unseres Satzes den Schließungssätzen aus $[S]$ genüge. Wir werden die Mengen Γ_{2m} , Π_{2m+1} rekursiv angeben, und dabei durch vollständige Induktion zeigen, daß die Inzidenzstrukturen $\mathfrak{S}_n$ die Schließungssätze aus $[S]$ erfüllen. Dann erfüllt aber auch ihre Vereinigung diese Sätze, also insbesondere den vorgegebenen Schließungssatz S .

Unter der Annahme, daß $\mathfrak{S}_{2m}$ schon hergestellt sei und in $\mathfrak{S}_{2m}$ die Schließungssätze aus $[S]$ gelten, bezeichnen wir die voneinander verschiedenen Geraden $\alpha_i \in \mathfrak{S}_{2m}$, $i = 1, 2, 3$, als *assoziiert* — in Zeichen $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ —, falls eine zu $[S]$ gehörige Konfiguration mit den Trägern $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in $\mathfrak{S}_{2m}$ vorhanden ist.

Aus $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ und $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4]$ folgt $[\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4]$ und $[\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$. Es gibt nämlich zu $[S]$ gehörige Konfigurationen mit den Trägern $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$; sind sie von den Schließungssätzen T bzw. T' hervorgerufen, so stimmen sie mit den Bildern von $\dot{T}, \dot{T}'$ bei gewissen Isomorphismen φ, φ' überein; wir bezeichnen $\xi_i = \varphi^{-1}(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3$, $\eta_i = \varphi'^{-1}(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 4$. Man kann o.B.d.A. annehmen, daß die Folgerungsgeradenvariablen in T, T' ξ_1 bzw. η_4 sind (denn ein Folgerungsaustausch ist hier durchaus möglich). In der Zusammensetzung U von T und T' an den Geradenpaaren $\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2$ kommt die Folgerungspunktvariable Y_0 genau in den Inzidenzen $Y_0 \in \eta_2, Y_0 \in \xi_3, Y_0 \in \eta_4$ vor, somit hat U eine elementare Folgerung. Man sieht leicht, daß auch die anderen Bedingungen erfüllt sind, die man zu der Bildung von $\dot{U}$ benötigt. Wir definieren mittels

$$\varphi^*(X) = \begin{cases} \varphi(X), & X \text{ Variable in } T, \\ \varphi'(X), & X \text{ Variable in } T' \end{cases}$$

einen Isomorphismus φ^* von $\dot{U}$ in $\mathfrak{S}_{2m}$. Das Bild $\varphi^*(\dot{U})$ ist eine zu $[S]$ gehörige Konfiguration in $\mathfrak{S}_{2m}$ mit den Trägern $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; damit ist es bewiesen, daß $[\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ gilt. Vertauscht man die Reihenfolge von α_1 und α_2 , so erhält man $[\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4]$.

Wir führen die folgende Bezeichnung ein, wobei α, β verschiedene Geraden aus $\mathfrak{S}_{2m}$ sind:

$$G(\alpha, \beta) = \{\gamma \mid \gamma \in \mathfrak{S}_{2m}, [\alpha, \beta, \gamma] \text{ oder } \gamma = \alpha \text{ oder } \gamma = \beta\}.$$

Es gilt:

1) Sind $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ verschiedene Elemente von $G(\alpha, \beta)$, so gilt $[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$. Aus $[\alpha, \beta, \gamma_1]$ und $[\alpha, \beta, \gamma_2]$ folgt nämlich $[\alpha, \gamma_1, \gamma_2]$; ebenso folgt $[\alpha, \gamma_1, \gamma_3]$, also $[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$.

2) Aus $\alpha' \neq \beta'$, $\alpha' \in G(\alpha, \beta)$, $\beta' \in G(\alpha, \beta)$ folgt $G(\alpha, \beta) = G(\alpha', \beta')$. Aus $\gamma \in G(\alpha, \beta)$, $\gamma \neq \alpha'$, $\gamma \neq \beta'$ ergibt sich nach 1) $[\alpha', \beta', \gamma]$, also $\gamma \in G(\alpha', \beta')$; für $\gamma = \alpha'$ oder $\gamma = \beta'$ ist das evident. Wir haben also $G(\alpha, \beta) \subset G(\alpha', \beta')$ und insbesondere $\alpha \in G(\alpha', \beta')$, $\beta \in G(\alpha', \beta')$; man kann also die Rollen von α, β und α', β' vertauschen und erhält auch die entgegengesetzte Inklusion.

3) Haben die zu $\mathfrak{Z}_{2m}$ gehörigen voneinander verschiedenen Geraden α, β einen Schnittpunkt A in $\mathfrak{Z}_{2m}$, so gehen alle Geraden aus $G(\alpha, \beta)$ durch den Punkt A . Es sei nämlich $\gamma \in G(\alpha, \beta)$ und $\gamma \neq \alpha, \gamma \neq \beta$. Da $[\alpha, \beta, \gamma]$ gilt, gibt es in $\mathfrak{Z}_{2m}$ eine zu $[S]$ gehörige Konfiguration $\varphi(\dot{T})$ mit den Trägern α, β, γ . Unter der keine Einschränkung bedeutenden Annahme, daß $\varphi^{-1}(\gamma)$ die Folgerungsgeradenvariable von T ist, erfüllen die Elemente von $\varphi(\dot{T}) \cup \{A\}$ die Voraussetzung von T , und da T in $\mathfrak{Z}_{2m}$ gilt, erfüllen sie auch die Folgerung von T , also ist $A \in \gamma$.

Wir definieren jetzt die Menge Γ_{2m} der uneigentlichen Büschel in folgender Weise:

$$\Gamma_{2m} = \{G(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathfrak{Z}_{2m}; \text{ es gibt keinen Punkt } A \in \alpha, \beta \text{ in } \mathfrak{Z}_{2m}\}.$$

Die an die Mengen Γ_{2m} gestellten Forderungen sind erfüllt:

- a) ist evident;
- b) folgt aus 2);
- c) folgt aus 3) und 2).

Damit ist $\mathfrak{Z}_{2m+1}$ wohl bestimmt, zu $\mathfrak{Z}_{2m}$ kommen als neue Punkte die Mengen $G(\alpha, \beta) \in \Gamma_{2m}$ und eine Gerade $\gamma \in \mathfrak{Z}_{2m}$ ist inzident mit $G(\alpha, \beta)$ genau dann, wenn $\gamma \in G(\alpha, \beta)$.

Nun müssen wir zeigen, daß die Schließungssätze aus $[S]$ in $\mathfrak{Z}_{2m+1}$ gelten.

Ist T ein beliebiger Schließungssatz mit den Variablen $X_0, X_1, \dots, X_n; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\mu$ und $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \epsilon)$ eine beliebige Inzidenzstruktur, so bezeichnen wir als eine *Einsetzung* für T aus $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \epsilon)$ eine Abbildung

$$\mathbf{M}: \begin{cases} X_i \rightarrow A_i, & i = 0, 1, \dots, n, \\ \xi_j \rightarrow \alpha_j, & j = 0, 1, \dots, \mu, \end{cases}$$

wo $A_i \in \mathfrak{P}$, $\alpha_j \in \mathfrak{G}$ und wobei allen Beziehungen aus $V(T)$ gültige Beziehungen in $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \epsilon)$ entsprechen. Die Einsetzung *erfüllt* den Schließungssatz T , wenn auch $F(T)$ einer richtigen Beziehung in $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \epsilon)$ entspricht.

Nehmen wir jetzt einen beliebigen Schließungssatz T aus $[S]$ und eine beliebige Einsetzung $\mathbf{M}$ für T aus $\mathfrak{Z}_{2m+1}$. Wir verwenden die obigen Bezeichnungen für die Variablen von T und für die Bildmenge von $\mathbf{M}$. Ist $X_0 \in \xi_0$ die Folgerung von T , so haben wir $A_0 \in \alpha_0$ zu zeigen. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß alle A_i und alle α_j voneinander verschieden sind (denn $\mathbf{M}$ kann widrigenfalls als eine Einsetzung in einem aus T durch Gleichsetzung von Variablen entstandenen Schließungssatz angesehen werden).

Gehört A_1 nicht zu $\mathfrak{Z}_{2m}$, ist also $A_1 = G(\alpha, \beta) \in \Gamma_{2m}$, und sind die mit X_1 benachbarten Geradenvariablen etwa $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, so ist offensichtlich $\alpha_i \in G(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2, \dots, p$. Somit gibt es in $\mathfrak{Z}_{2m}$ zu $[S]$ gehörige Konfigurationen mit den Trägern $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4; \dots; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_p$; die hervorgerufenen Schließungssätze sollen mit $T_1, T_2, \dots, T_{p-2}$, und die Isomorphismen von $\dot{T}_1, \dot{T}_2, \dots, \dot{T}_{p-2}$ auf die entsprechenden Konfigurationen mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{p-2}$ bezeichnet werden. Es bedeutet keine Einschränkung, wenn wir annehmen, daß $\varphi_i^{-1}(\alpha_{i+2})$ die Folgerungsgeradenvariable von T_i ist, $i = 1, \dots, p-2$. Wir bilden neue Schließungssätze $U_i \in [S]$, zunächst für $i = 0, 1, \dots, p-3$, mittels Induktion: $U_0 = T$; U_{i+1} wird

durch Zusammensetzung von T_{i+1} und U_i an den Geradenpaaren $\varphi_{i+1}^{-1}(\alpha_{i+3})$, $\varphi_{i+1}^{-1}(\alpha_1)$; ξ_{i+3} , ξ_1 gebildet. Man bemerkt, daß in $V(U_{p-3})$ nur noch die Variablen ξ_1, ξ_2, ξ_p mit X_1 durch Inzidenzbeziehungen verbunden sind. Wir bilden nun U_{p-2} durch Zusammensetzung von T_{p-2} und U_{p-3} an den Geradenpaaren $\varphi_{p-2}^{-1}(\alpha_p)$, $\varphi_{p-2}^{-1}(\alpha_1)$, $\varphi_{p-2}^{-1}(\alpha_2)$; ξ_p, ξ_1, ξ_2 . Im Schließungssatz $U_{p-2} \in [S]$, der dieselbe Folgerung $X_0 \in \xi_0$ wie T besitzt, kommt die Punktvariable X_1 nicht mehr vor. Wir werden jetzt zeigen, wie man gleichzeitig mit der Herstellung der Schließungssätze U_i auch solche Einsetzungen M_i für sie bilden kann, welche neben den Bildpunkten von M nur noch Punkte aus $\mathfrak{S}_{2m}$ benötigen. Es sei angenommen, daß die Einsetzung M_i dieser Art schon vorhanden sei. Zur Bildung von M_{i+1} versuchen wir zunächst — den Vorschriften der Operation V entsprechend — M_i dadurch zu ergänzen, daß wir zu den bei der Ausschließung einiger Ungleichungen aus $V(U_i)$ eventuell eintretenden Variablen neue Elemente lediglich aus $\mathfrak{S}_{2m}$ so zuordnen, daß die neu vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt sein sollen. Wir beachten dazu, daß die betreffenden Ungleichungen nur von einer der beiden Formen sind: $X_1 \neq X'$, wobei die Inzidenz $X' \in \xi_k$ für ein bestimmtes $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ in $V(U_i)$ vorhanden ist, oder aber $\xi_l \neq \xi_j$, $l, j \in \{1, 2, \dots, p\}$. Den Variablen X_1, X' entsprechen in der Einsetzung M_i die Punkte $A_1 = G(\alpha, \beta)$ und $A' \in \alpha_k$, $k \in \{1, 2, \dots, p\}$. Bezeichnet man die neuen Variablen mit ζ, ζ', Z , so sind die neuen Bedingungen $X_1 \in \zeta$, $Z \in \zeta$, $Z \in \zeta'$, $X' \in \zeta'$, $X' \neq Z$, $\zeta \neq \zeta'$, und diese sind sicher erfüllt, wenn man für ζ ein α_r ($r \neq k$, $r \in \{1, \dots, p\}$) setzt, für Z einen auf α_r liegenden Punkt $C \in \mathfrak{S}_{2m}$, welcher mit A' durch eine Gerade $\gamma \in \mathfrak{S}_{2m}$ verbindbar ist (ein solcher Punkt ist gemäß der Verbindbarkeitsvoraussetzung (B) vorhanden) und für ζ' die Gerade $\gamma(\alpha_r \neq \gamma$, weil α_r und α_k keinen Punkt in $\mathfrak{S}_{2m}$ gemeinsam haben, und darum ist auch $C \neq A'$). Im Falle der Ungleichung $\xi_l \neq \xi_j$, $l, j \in \{1, 2, \dots, p\}$, müssen wir die Punkte $P \in \alpha_l$ und $Q \in \alpha_j$ in $\mathfrak{S}_{2m}$ so bestimmen, daß die Gerade PQ in $\mathfrak{S}_{2m}$ vorhanden sein soll, was nach (B) wieder möglich ist; die nötigen Ungleichungen $P \neq Q$, $PQ \neq \alpha_j$ folgen sofort. Somit gelingt die gewünschte Ergänzung von M_i . Wir beenden jetzt die Herstellung von M_{i+1} , indem wir auf U_{i+1} die so ergänzte Einsetzung M_i und die natürliche Abbildung der von X_1 verschiedenen Variablen von T_{i+1} auf $\varphi_{i+1}^{-1}(T_{i+1})$ anwenden. Durch dieses Verfahren können wir die Einsetzungen M_i bis M_{p-3} herstellen. Durch ein ähnliches Verfahren kann auch eine Einsetzung M_{p-2} in U_{p-2} hergestellt werden, denn bei der Ausschließung der Variablen X_1 aus der Ungleichungsmenge braucht man nur solche Ungleichungen zu beseitigen wie oben. Gemäß den Vorschriften der Operation VI ist der Punkt A_1 in M_{p-2} nicht mehr vorhanden.

Wir wiederholen das ganze Verfahren für jeden Punkt aus M , welcher nicht in $\mathfrak{S}_{2m}$ liegt. Am Ende ergibt sich ein Schließungssatz U , welcher wie T zu $[S]$ gehört, dieselbe Folgerung hat und auch eine Einsetzung M' für U , in welcher den Folgerungsvariablen immer noch A_0 und α_0 entsprechen. Wesentlich ist es, daß in dieser Einsetzung, mit eventueller Ausnahme von A_0 , nur Punkte aus $\mathfrak{S}_{2m}$ vorkommen. Ist auch $A_0 \in \mathfrak{S}_{2m}$, so gilt $A_0 \in \alpha_0$, da in $\mathfrak{S}_{2m}$ der Schließungssatz $U \in [S]$ erfüllt ist.

Ist dagegen $A_0 \notin \mathfrak{S}_{2m}$, so können wir o. B. d. A. annehmen, daß U eine elementare Folgerung besitzt, denn widrigenfalls können wir auch an dieser Stelle das obige Verfahren zur Herstellung der U_i und M_i bis $i = p - 3$ anwenden. Weiter wollen wir noch die gleichfalls keine Einschränkung bedeutende Annahme machen, daß U

eine Konfiguration hervorruft (die dabei erfordernte Normalität kann dadurch gesichert werden, daß man nötigenfalls Gleichsetzungen von Variablen in U vornimmt). Wir betrachten diejenige von U hervorgerufene Konfiguration, welche man durch das Ausschließen des Punktes A aus M erhält. Einer der Träger ist α_0 ; die anderen zwei sollen mit α', α'' bezeichnet werden; sie sind diejenigen Geraden aus der Bildmenge von M' , welche durch A_0 gehen, es ist also $A_0 = G(\alpha', \alpha'')$. Aus $[\alpha_0, \alpha', \alpha'']$ folgt schließlich $\alpha_0 \in G(\alpha', \alpha'') = A_0$.

Damit ist der Induktionsschritt von $\mathfrak{S}_{2m}$ zu $\mathfrak{S}_{2m+1}$ vollendet. Der Schritt von $\mathfrak{S}_{2m+1}$ zu $\mathfrak{S}_{2m+2}$ wird durch Dualisierung gewonnen. Unser Satz ist somit bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] G. PICKERT, Projektive Ebenen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
- [2] F. RADÓ, Einbettung eines Halbgewebes in ein reguläres Gewebe und eines Halbgruppoids in eine Gruppe, Math. Z. 89, 395—410 (1965).

Eingegangen am 15. 8. 1968

Anschrift des Autors:

F. Radó

Universität Babes-Bolyai

Mathematische Fakultät

Cluj, Rumänien