

Darstellung nicht-injektiver Kollineationen eines projektiven Raumes durch verallgemeinerte semilineare Abbildungen

F. RADÓ

Einleitung

Wir bezeichnen mit V einen Linksvektorraum über einem Schiefkörper K vom Range größer oder gleich 3, und mit $\mathcal{S}(V)$ den zu V gehörigen projektiven Raum, d.h. den Verband der linearen Unterräume von V . Ein grundlegender Satz der projektiven Geometrie sagt aus, daß jede Kollineation von $\mathcal{S}(V)$ auf einen zweiten projektiven Raum $\mathcal{S}(V')$ durch eine semilineare Abbildung von V induziert werden kann [1]. Dabei wird unter einer Kollineation ein Isomorphismus des Verbandes $\mathcal{S}(V)$ auf $\mathcal{S}(V')$ verstanden, also eine bijektive Abbildung. Wir fragen nun: Kann man auch nicht-bijektive Kollineationen, d.h. Homomorphismen des Verbandes $\mathcal{S}(V)$ in $\mathcal{S}(V')$, durch irgendwelche Abbildungen des Vektorraumes V induzieren? Klingenberg hat diese Frage für Räume endlichen Ranges gelöst [2, 3]. Hier werden wir die Frage für den allgemeinen Fall bejahend beantworten. Die entsprechenden Abbildungen, die wir als VSL -Abbildungen bezeichnen, verallgemeinern die semilinearen in dem Sinne, daß sie nur auf einem Teil W von V definiert werden. Dieser Teil wird allerdings genügend umfassend sein, so daß jeder Unterraum von V vom Range 1 mehrere Vektoren aus W enthält.

Wenn ein Isomorphismus von $\mathcal{S}(V)$ auf $\mathcal{S}(V')$ existiert, so sind nach einem bekannten Struktursatz die entsprechenden Schiefkörper K und K' isomorph. Ist dagegen nur ein Homomorphismus von $\mathcal{S}(V)$ auf $\mathcal{S}(V')$ vorhanden, so gilt: Wenn K, K' Körper sind, dann ist K' isomorph zu dem Restklassenkörper einer Bewertung von K . Dieses Ergebnis kann auch für den Fall der Schiefkörper K, K' übertragen werden, wenn man nur den Bewertungsbegriff entsprechend erweitert.

Unsere Darstellung ergänzt das Klingenbergsche Ergebnis noch in den folgenden Hinsichten:

- 1) Die VSL -Abbildungen werden axiomatisch gekennzeichnet, also unabhängig von einer Koordinatendarstellung in V .
- 2) Statt eines Homomorphismus wird eine geeignet definierte Kollineation betrachtet, also eine nur auf den Unterräumen vom Range 1 erklärte Abbildung.
- 3) Jede der drei äquivalenten Kennzeichnungen des Bewertungsbegriffes wird verallgemeinert, wie wir das in [5] durchgeführt haben.

Der erste Paragraph der vorliegenden Arbeit enthält eine Zusammenfassung der Begriffe und Sätze aus [5], welche sich auf verallgemeinerte Bewertungen beziehen.

Wir stellen die Eigenschaften der *VSL*-Abbildungen im zweiten Paragraphen zusammen.

Der dritte Paragraph enthält zunächst die Definition der nicht-injektiven Kollineationen. Dann werden durch *VSL*-Abbildungen Kollineationen in natürlicher Weise induziert. Der Hauptsatz sagt aus, daß jede Kollineation Φ durch eine geeignete *VSL*-Abbildung induziert werden kann. Im Beweis erzeugen wir durch Φ je eine Abbildung eines Teiles der Translationsgruppe und der Streckungsgruppe mit derselben festen Hyperebene als Achse. In dieser Weise verallgemeinern wir diejenigen Methoden, welche Klingenberg [2] und Lüneburg [4] aus dem Artinschen Koordinatisierungsverfahren entwickelt haben.

§ 1. Verallgemeinerte Bewertungen eines Schiefkörpers

Hier stellen wir einige Begriffe und Sätze aus der nicht-kommutativen Bewertungstheorie (s. [6]) in einer verallgemeinerten Form zusammen, wie sie in der Arbeit [5] angegeben wurden. Für die Beweise verweisen wir auf diese Arbeit.

Die Bezeichnung „Verallgemeinerter Bewertungsring“, welche in den Arbeiten von Klingenberg in einem anderen Zusammenhang verwendet wurde, kommt hier nicht vor.

Definition 1.1. Es sei K ein Schiefkörper und $K^* = K \setminus \{0\}$. Als *abgeschlossenen Schiefkörper* $\bar{K}$ bezeichnen wir die algebraische Struktur, die aus K durch Hinzunahme eines neuen Elementes ∞ entsteht, für welches man

$$\begin{aligned} x + \infty &= \infty + x = \infty, & \forall x \in K \\ x \cdot \infty &= \infty \cdot x = \infty, & \forall x \in K^* \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

setzt ($\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$ bleiben unerklärt).

Definition 1.2. Ein Unterring $\mathcal{O}$ des Schiefkörpers K heißt *total* in K , wenn entweder $x \in \mathcal{O}$ oder $x^{-1} \in \mathcal{O}$ für alle $x \in K^*$.

Ist $\mathcal{O} \setminus \{0\}$ darüber hinaus ein invarianter Komplex der multiplikativen Gruppe K^* , so ist $\mathcal{O}$, wie wohl bekannt, ein Bewertungsring.

Definition 1.3. Sind $\bar{K}$, $\bar{K}'$ abgeschlossene Schiefkörper, so heißt die Abbildung $\psi: \bar{K} \rightarrow \bar{K}'$ ein *Homomorphismus des abgeschlossenen Schiefkörpers* $\bar{K}$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$, wenn die zwei Summen erklärt sind,
- $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$, wenn die zwei Produkte erklärt sind,
- $\psi(\bar{K})$ enthält wenigstens drei Elemente.

Definition 1.4. Es seien K, K' Schiefkörper und $\mathcal{O}$ ein totaler Unterring von K . Die Abbildung $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow K'$ heißt ein *partieller Homomorphismus von K* , wenn

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{O},$$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \forall x, y \in \mathcal{O},$$

$$\varphi(x) = 0, \text{ wenn } x \in \mathcal{O} \text{ und } x^{-1} \notin \mathcal{O},$$

$$\varphi(\mathcal{O}) \text{ enthält ein von } 0 \text{ verschiedenes Element.}$$

Es folgt: a) $1 \in \mathcal{O}$, $\varphi(1) = 1$; b) ist $x \in \mathcal{O}$ und $x^{-1} \in \mathcal{O}$, dann haben wir $\varphi(x) \neq 0$.

Definition 1.5. Es sei K ein Schiefkörper und S eine totalgeordnete Menge, welche mindestens zwei Elemente enthält. Eine Abbildung $v: K \rightarrow S$ heißt eine *verallgemeinerte Bewertung von K* , wenn

$$v(x) \leq v(y) \Rightarrow v(xz) \leq v(yz),$$

$$v(x+y) \geq \min(v(x), v(y)),$$

$$v(K) = S.$$

Es ist zu bemerken, daß wir in S keine innere Operation postulieren.

Es gelten die folgenden Sätze:

Satz 1.1. Ist $\psi: \bar{K} \rightarrow \bar{K}'$ ein Homomorphismus des abgeschlossenen Schiefkörpers $\bar{K}$, so ist $\mathcal{O}_\psi = \{x \mid \psi(x) \in K'\}$ ein totaler Unterring von K . Die Restriktion $\psi|_{\mathcal{O}_\psi}$ ist ein partieller Homomorphismus von K .

Satz 1.2. Jeder partielle Homomorphismus eines Schiefkörpers K kann zu einem Homomorphismus von $\bar{K}$ erweitert werden.

Satz 1.3. Zu jedem totalen Unterring $\mathcal{O}$ des Schiefkörpers K gibt es einen bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmten Homomorphismus ψ von $\bar{K}$, für welchen $\mathcal{O}_\psi = \mathcal{O}$. ψ wird in folgender Weise hergestellt: Die Nichteinheiten des Ringes $\mathcal{O}$ bilden ein maximales Ideal N in $\mathcal{O}$, der Restklassenring $\mathcal{O}/N$ ist also ein Schiefkörper. Die kanonische Abbildung $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/N$ ist ein partieller Homomorphismus von K , dessen Erweiterung gemäß dem Satz 1.2 die Abbildung ψ ergibt.

$\mathcal{O}/N$ heißt der Restklassenschiefkörper von $\mathcal{O}$, oder auch der entsprechenden verallgemeinerten Bewertung (s. Satz 1.4).

Satz 1.4. Ist v eine verallgemeinerte Bewertung des Schiefkörpers K , so ist die Menge $\mathcal{O}_v = \{x \mid x \in K, v(x) \geq v(1)\}$ ein totaler Unterring von K . Ist umgekehrt $\mathcal{O}$ ein totaler Unterring von K , dann gibt es eine verallgemeinerte Bewertung v von K mit $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}$. Dabei ist v bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt.

Satz 1.5. Es sei $\mathcal{O}$ ein totaler Unterring des Schiefkörpers K , $\mathcal{O}^* = \{x \mid x \in \mathcal{O}, x^{-1} \in \mathcal{O}\}$ die Menge der Einheiten im Ring $\mathcal{O}$, und $a_i \in K^*$, $i = 1, 2, \dots, n$. Dann kann man $\rho \in K^*$ so wählen, daß

$$\rho a_i \in \mathcal{O} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\rho a_i \in \mathcal{O}^* \quad \text{für wenigstens ein } i.$$

Wenn ρ_0 diesen Bedingungen genügt, so stellt

$$\rho = \tau \rho_0, \quad \text{wo } \tau \in \mathcal{O}^*$$

die Gesamtheit aller ρ der verlangten Art dar.

In [3] wurde ein Beispiel mit Hilfe von formellen Potenzreihen über einer nichtkommutativen totalgeordneten Gruppe konstruiert, welches zeigt, daß nichtinvariante totale Unterringe in gewissen Schiefkörpern existieren. Es liegt also hier eine echte Verallgemeinerung des Bewertungsbegriffes vor. Für Körper fallen offenbar die zwei Begriffe zusammen.

§ 2. Die verallgemeinerten semilinearen Abbildungen

Definition 2.1. Es seien V, V' Linksvektorräume über den Schiefkörpern K bzw. K' , $\mathcal{O} \subset K$ und $W \subset V$. Das Paar von Abbildungen $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow K'$, $f: W \rightarrow V'$ heißt eine *verallgemeinerte semilineare Abbildung* oder kürzer eine *VSL-Abbildung*, wenn

1. $s, t \in \mathcal{O}, x, y \in W \Rightarrow s+t \in \mathcal{O}, st \in \mathcal{O}, x+y \in W, sx \in W$.
2. $s \in K \setminus \mathcal{O} \Rightarrow s^{-1} \in \mathcal{O}, \varphi(s^{-1}) = 0$.
3. $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in W$.
4. $f(sx) = \varphi(s)f(x), \forall s \in \mathcal{O}, \forall x \in W$.
5. Es gibt ein $B \subset W$ derart, daß B eine Basis von V , $f(B)$ eine Basis von V' und die Einschränkung $f|B$ (von f auf B) injektiv ist.

Lemma 2.1. Die Abbildung $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow K'$ ist ein partieller Homomorphismus des Schiefkörpers K .

Beweis. Sei $a \in B$; dann ist $f(a) \neq 0$. Es ergibt sich für $s, t \in \mathcal{O}$:

$$\begin{aligned} \varphi(s+t)f(a) &= f((s+t)a) = f(sa+ta) \\ &= \varphi(s)f(a) + \varphi(t)f(a) = (\varphi(s) + \varphi(t))f(a), \end{aligned}$$

wonach

$$\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t); \quad (2.1)$$

und weiter

$$\varphi(st)f(a) = f((st)a) = f(s(ta)) = \varphi(s)f(ta) = \varphi(s)\varphi(t)f(a),$$

also

$$\varphi(st) = \varphi(s)\varphi(t). \quad (2.2)$$

Setzt man in 4. $s=1, x=a$ ein, so erhält man

$$\varphi(1) = 1. \quad (2.3)$$

Aus 2. folgt $-1 = (-1)^{-1} \in \mathcal{O}$, es gilt also: $s \in \mathcal{O} \Rightarrow -s \in \mathcal{O}$. Damit wird klar, daß $\mathcal{O}$ ein Unterring in K ist, und zwar nach 2. total in K . Die Beziehungen (2.1), (2.2), (2.3) und 2. zeigen dann, daß φ alle Forderungen der Definition 1.4 erfüllt.

Wir bezeichnen

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_0 &= \{s \mid \varphi(s) = 0\}, & \mathcal{O}^* &= \{s \mid \varphi(s) \in K'^*\}, \\ W_0 &= \{x \mid f(x) = 0\}, & W^* &= \{x \mid f(x) \neq 0\}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

$\mathcal{O}^*$ ist die Menge der Einheiten, $\mathcal{O}_0$ die Menge der Nichteinheiten im Ring $\mathcal{O}$.

Lemma 2.2. *Es gilt*

$$W = \left\{ \sum_{b \in B} s(b) b \mid s: B \rightarrow \mathcal{O}, \{b \mid s(b) \neq 0\} \text{ endlich} \right\}. \quad (2.5)$$

Beweis. Aus 5. und 1. ergibt sich sofort, daß die rechte Seite von (2.5) in der linken enthalten ist. Es sei nun $x \in W$. Wir stellen x in der Form

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i, \quad \lambda_i \in K^*, \quad b_i \in B, \quad b_i \neq b_k \text{ (für } i \neq k) \quad (2.6)$$

dar. Gemäß dem Satz 1.5 bestimmen wir ein $\rho \in K^*$ so, daß $\rho \lambda_i \in \mathcal{O}, i = 1, 2, \dots, n$, $\rho \lambda_j \in \mathcal{O}^*$ für ein j . Dann ist $\varphi(\rho \lambda_j) \neq 0, \rho x \in W$ und

$$f(\rho x) = \sum_{i=1}^n \varphi(\rho \lambda_i) f(b_i) \neq 0, \quad (2.7)$$

da die Vektoren $f(b_i)$ unabhängig sind. Wäre $\rho \in \mathcal{O}_0$, so wäre auch $f(\rho x) = \varphi(\rho) f(x) = 0$ im Widerspruch zu (2.7). Folglich ist $\rho^{-1} \in \mathcal{O}$. Aus $\rho \lambda_i \in \mathcal{O}$ folgt somit $\lambda_i \in \rho^{-1} \mathcal{O} \subset \mathcal{O}$. Dann zeigt aber (2.6), daß x in der rechten Seite von (2.5) enthalten ist.

Aus der Definition 2.1 und Lemma 2.2 folgt sofort

Lemma 2.3. *Es gibt für jedes $x \in W$ ein $s: B \rightarrow \mathcal{O}$ mit*

$$x = \sum_{b \in B} s(b) b, \quad f(x) = \sum_{b \in B} \varphi(s(b)) f(b). \quad (2.8)$$

Bemerkung. Es seien gegeben eine bijektive Abbildung $f: B \rightarrow B'$ einer Basis von V auf eine Basis von V' und ein partieller Homomorphismus $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow K'$. Dann definieren die Formeln (2.5) und (2.8) eine verallgemeinerte semilineare Abbildung $f: W \rightarrow V'$. Man sieht nämlich sofort, daß die Forderungen 1. – 5. erfüllt sind.

Lemma 2.4.

$$\begin{aligned}x, y \in W_0, s \in \mathcal{O} &\Rightarrow x + y \in W_0, s x \in W_0, \\ z \in W, s_0 \in \mathcal{O}_0 &\Rightarrow s_0 z \in W_0.\end{aligned}$$

Beweis. $f(x + y) = f(x) + f(y) = 0, f(s x) = \varphi(s) f(x) = 0. f(s_0 z) = \varphi(s_0) f(z) = 0.$

Definition 2.2. Eine nicht leere Teilmenge S aus W soll als $\mathcal{O}$ -abhängig bezeichnet werden, wenn es $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathcal{O}^*$ und n verschiedene $x_1, \dots, x_n \in S$ gibt mit

$$\sum_{i=1}^n \rho_i x_i \in W_0.$$

Im anderen Falle heißt S $\mathcal{O}$ -unabhängig.

Man bemerkt, daß eine $\mathcal{O}$ -unabhängige Menge kein Element aus W_0 enthalten kann.

Lemma 2.5. Eine $\mathcal{O}$ -unabhängige Teilmenge S aus W ist linear unabhängig.

Beweis. Nehmen wir an, daß folgendes gilt:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0, \quad \lambda_i \in K^*, \quad \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset S, \quad x_i \neq x_k \text{ für } i \neq k. \quad (2.10)$$

Wir bestimmen $\rho \in K^*$ nach Satz 1.5 derart, daß $\rho \lambda_i \in \mathcal{O}$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und $\rho \lambda_i \in \mathcal{O}^*$ für wenigstens ein i . Aus (2.10) und Lemma 2.4 folgern wir:

$$\sum_{i \in N} (\rho \lambda_i) x_i \in W_0, \quad \rho \lambda_i \in \mathcal{O}^* \text{ (für alle } i \in N),$$

wobei N eine gewisse nichtleere Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$ ist. Das widerspricht aber der $\mathcal{O}$ -Unabhängigkeit von S .

Lemma 2.6. Die Teilmenge S von W ist dann und nur dann $\mathcal{O}$ -unabhängig, wenn $f(S)$ linear unabhängig und $f|S$ injektiv ist.

Beweis. Ist S $\mathcal{O}$ -abhängig, so ergibt sich aus (2.9)

$$f\left(\sum_{i=1}^n \rho_i x_i\right) = 0, \quad \text{also} \quad \sum_{i=1}^n \varphi(\rho_i) f(x_i) = 0 \quad \text{mit} \quad \varphi(\rho_i) \neq 0;$$

bei injektiver Abbildung $f|S$ ist folglich $f(S)$ linear abhängig.

Sei nun $f(S)$ linear abhängig oder aber $f|S$ nicht injektiv; dann gibt es $\lambda_i \in K^*$ und n verschiedene $x_1, \dots, x_n \in S$ mit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) = 0. \quad (2.11)$$

Nach Lemma 2.2 kann man die Vektoren x_i mit Hilfe von m verschiedenen Vektoren $b_1, \dots, b_m \in B$ und Elementen $t_{ik} \in \mathcal{O}$ so ausdrücken:

$$x_i = \sum_{k=1}^m t_{ik} b_k \quad (i = 1, \dots, n);$$

nach Lemma 2.3 gilt dann

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^m a_{ik} f(b_k) \quad (i=1, \dots, n),$$

wobei $a_{ik} = \varphi(t_{ik})$ sein soll. Die Gl. (2.11) ist äquivalent mit dem Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ik} = 0 \quad (k=1, \dots, m), \quad (2.12)$$

da die Vektoren $f(b_k)$ linear unabhängig sind. Die Koeffizienten a_{ik} gehören zu $\varphi(\mathcal{O})$. Man prüft leicht nach, daß $\varphi(\mathcal{O})$ ein Unterschiefkörper von K' ist. Faßt man die λ_i in (2.12) als Unbekannte auf, so besitzt dieses lineare homogene Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung in K'^n . Da die Koeffizienten zu $\varphi(\mathcal{O})$ gehören, hat dieses System auch in $\varphi(\mathcal{O})^n$ eine nichttriviale Lösung $\lambda'_i \in \varphi(\mathcal{O})$. Es gibt also $s_i \in \mathcal{O}$ und ein j mit

$$s_j \in \mathcal{O}^*, \quad \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \varphi(s_i) a_{ik} \right) f(b_k) = 0,$$

also

$$\sum_{i=1}^n \varphi(s_i) f(x_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n s_i x_i \in \mathcal{O}_0,$$

d.h. S ist $\mathcal{O}$ -abhängig.

Bemerkung. Die Injektivität von $f|_S$ besagt insbesondere die Gleichmächtigkeit der Mengen $S, f(S)$; das wird im folgenden benutzt.

Definition 2.3. Sei L ein linearer Unterraum von V . Die Menge $S \subset L \cap W$ heißt eine $\mathcal{O}$ -Basis von L , wenn S eine maximale $\mathcal{O}$ -unabhängige Untermenge von $L \cap W$ ist.

Lemma 2.7. Jeder von $\{0\}$ verschiedene lineare Unterraum L von V besitzt eine $\mathcal{O}$ -Basis.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß die Menge $L \cap W^*$ nicht leer ist; denn stellt man ein Element aus L in der Form

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i, \quad \lambda_i \in K^*, \quad b_i \in B$$

dar und bestimmt man $\rho \in K^*$ nach Satz 1.5, so wird nach Lemma 2.2 $\rho x \in W$ und $f(\rho x) \neq 0$, also $\rho x \in W^*$, d.h. $\rho x \in L \cap W^*$. Dann ist natürlich die Menge $\mathcal{O}$ der $\mathcal{O}$ -unabhängigen Untermengen von $L \cap W$ nicht leer. Ordnet man die Menge $\mathcal{O}$ nach der Enthaltenseinrelation, so wird $\mathcal{O}$ induktiv, weil für eine totalgeordnete Untermenge Φ von $\mathcal{O}$ die Vereinigungsmenge aller Elemente aus Φ eine $\mathcal{O}$ -unabhängige Menge bildet, also ein Element aus $\mathcal{O}$. Nach dem Zornschen Lemma enthält $\mathcal{O}$ wenigstens ein maximales Element.

Es folgt leicht:

Lemma 2.8. *Ist eine $\mathcal{O}$ -Basis S des linearen Unterraumes L von V gegeben, so kann jedes Element $x \in L \cap W$ eindeutig in der Form*

$$x = \sum_{i=1}^n \rho_i x_i + w, \quad \{x_1, \dots, x_n\} \subset S, \quad x_i \neq x_k \text{ für } i \neq k, \quad \rho_i \in \mathcal{O}^*, \quad w \in W_0 \quad (2.13)$$

geschrieben werden.

Wir werden die folgende Bezeichnung benutzen: Ist $A \subset V$, so bezeichnet $[A]$ den durch A erzeugten Unterraum von V .

Lemma 2.9. *Ist S eine $\mathcal{O}$ -Basis von V , so ist $f(S)$ eine zu S gleichmächtige Basis von V' .*

Beweis. Jedes $x \in W$ kann in der Form (2.13) dargestellt werden. Dann ist

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \varphi(\rho_i) f(x_i),$$

also ist $f(x)$ in $[f(S)]$ enthalten. Folglich ist $f(B)$ in $[f(S)]$ enthalten. Da $f(B)$ wegen 5. eine Basis von V' ist, haben wir $[f(S)] = V'$. Andererseits ist $f(S)$ nach Lemma 2.6 linear unabhängig und zu S gleichmächtig; damit haben wir Lemma 2.9 bewiesen.

Lemma 2.10. *Hat V einen endlichen Rang und ist L ein linearer Unterraum von V , so ist eine $\mathcal{O}$ -Basis von L eine Basis von L .*

Beweis. Für $L = V$ folgt das aus Lemma 2.9, weil dann die Anzahl der Elemente der $\mathcal{O}$ -Basis mit dem Rang von V' und nach 5. auch mit dem von V übereinstimmt. Ist nun L ein echter Unterraum von V , so können wir die betrachtete $\mathcal{O}$ -Basis S von L zu einer $\mathcal{O}$ -Basis von V in üblicher Weise ergänzen. Die dabei hinzugefügte Menge $\bar{S}$ erzeugt einen Unterraum $\bar{L}$ von V , welcher keinen Vektor $\neq 0$ aus L enthält. Denn andernfalls würde eine lineare Beziehung zwischen den Elementen aus $S \cup \bar{S}$ folgen und daraus unter Berücksichtigung des Satzes 1.5 sogar eine lineare Beziehung mit Koeffizienten aus $\mathcal{O}$, welche nicht alle zu $\mathcal{O}_0$ gehören, was aber im Widerspruch mit der $\mathcal{O}$ -Unabhängigkeit von $S \cup \bar{S}$ steht. Da die Mengen $S, \bar{S}$ unabhängig sind, folgt

$$|S| \leq r(L), \quad |\bar{S}| \leq r(\bar{L}), \quad (2.14)$$

und weil $S \cup \bar{S}$ eine $\mathcal{O}$ -Basis von V ist, haben wir nach dem schon am Anfang des Beweises erledigten Fall

$$|S| + |\bar{S}| = r(V).$$

Wegen $r(L) + r(\bar{L}) \leq r(V)$ müssen also die Gleichheitszeichen in (2.14) gelten, und damit ist das Lemma bewiesen.

Lemma 2.11. *Hat der lineare Unterraum L von V einen endlichen Rang r , so ist jede $\mathcal{O}$ -Basis von L eine Basis von L .*

Beweis. Wir wählen eine Basis von L , welche zu $L \cap W$ gehört (dazu genügt es die Vektoren irgendeiner Basis von L mit passenden Faktoren zu multiplizieren). Wir stellen die Elemente dieser Basis nach Lemma 2.2 in der Form

$$b_i^* = \sum_{k=1}^p \rho_{ik} b_k, \quad i=1, 2, \dots, r, \quad b_k \in B, \quad \rho_{ik} \in \mathcal{O}$$

dar. Die Vektoren $b_1, b_2, \dots, b_p$ bzw. $f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_p)$ erzeugen je einen Unterraum in V bzw. V' , welche $\bar{V}$ bzw. $\bar{V}'$ heißen sollen. Die Abbildung $\tilde{f}: \bar{V} \cap W \rightarrow \bar{V}'$ werde durch

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \bar{V} \cap W$$

definiert. Es ist leicht zu sehen, daß das Paar von Abbildungen $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow K'$, $\tilde{f}: \bar{V} \cap W \rightarrow \bar{V}'$ eine VSL -Abbildung darstellt. Die $\mathcal{O}$ -Abhängigkeit einer Teilmenge von $\bar{V}$, kann jetzt auf zwei Arten aufgefaßt werden, je nachdem ob man die VSL -Abbildung (φ, f) oder $(\varphi, \tilde{f})$ zugrunde legt. Die zwei Arten der $\mathcal{O}$ -Abhängigkeit fallen aber zusammen. Ist nämlich $S \subset L$ in bezug auf (φ, f) eine $\mathcal{O}$ -unabhängige Menge, so besteht (2.9); $\sum_{i=1}^n \rho_i x_i$ ist aber in L enthalten, wir haben also

$$\sum_{i=1}^n \rho_i x_i \in W_0 \cap \bar{V} = (W \cap \bar{V})_0$$

und somit ist S in bezug auf $(\varphi, \tilde{f})$ $\mathcal{O}$ -unabhängig. Der Schluß in entgegengesetzter Richtung ergibt sich unmittelbar.

Ist nun S eine $\mathcal{O}$ -Basis von L bezüglich (φ, f) , so ist S nach dem obigen auch eine $\mathcal{O}$ -Basis von L bezüglich $(\varphi, \tilde{f})$ und aus Lemma 2.10 folgt jetzt Lemma 2.11.

Wir können nun leicht beweisen den

Satz 2.1. *Ist L ein linearer Unterraum von V vom endlichen Range r , so ist der Rang des Unterraumes $[f(L \cap W)]$ gleich r .*

Wählen wir nämlich eine $\mathcal{O}$ -Basis S von L , so hat S nach Lemma 2.11 genau r Elemente. Wegen Lemma 2.6 enthält $f(S)$ ebenfalls r Elemente und ist linear unabhängig, so daß der Rang von $[f(L \cap W)]$ nicht kleiner als r sein kann. Aus den Forderungen 3., 4. der Definition 2.1 ist aber ersichtlich, daß dieser Rang nicht größer als r ist.

Im Beweis von Lemma 2.6 haben wir bemerkt, daß $K'' = \varphi(\mathcal{O})$ ein Unterkörper von K' ist. Aus der Formel (2.8) folgt noch

Lemma 2.12. $f(W)$ ist ein Vektorraum über $K'' = \varphi(\mathcal{O})$.

§ 3. Die nichtinjektiven Kollineationen

Wir werden einen projektiven Raum als den Verband $\mathcal{S}(V)$ der linearen Unterräume eines Linksvektorraumes über dem Schiefkörper K , vom Range ≥ 3 , auffassen. Dadurch erfassen wir, nach einem der grundlegenden Sätze der projektiven Geometrie, bis auf Verbandsisomorphismen, alle Desarguesschen

projektiven Räume vom Range ≥ 3 . Wir wollen mit $\mathcal{P}(V)$ die Punktmenge von $\mathcal{S}(V)$ bezeichnen, d.h. die Menge der linearen Unterräume von V vom Range 1. Für $P_i \in \mathcal{P}(V)$, $i=1, 2, 3$ bezeichnet $\kappa(P_1, P_2, P_3)$ die Kollinearitätsbeziehung, die dann und nur dann besteht, wenn es eine Gerade G , also einen linearen Unterraum vom Range 2 gibt mit $P_i \in G$, $i=1, 2, 3$. Eine Punktmenge soll als fundamental bezeichnet werden, wenn die Wahl je eines von 0 verschiedenen Vektors aus den Punkten der gegebenen Menge eine Basis von V ergibt.

Wir werden den Kollineationsbegriff in einem allgemeineren Sinn als üblich benutzen:

Definition 3.1. Es seien V, V' Linksvektorräume über den Schiefkörpern K bzw. K' , jeder vom Range ≥ 3 . Eine Abbildung $\Phi: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V')$ soll als *Kollineation* bezeichnet werden, wenn:

- 1) $\kappa(P_1, P_2, P_3) \Rightarrow \kappa(\Phi(P_1), \Phi(P_2), \Phi(P_3))$.
- 2) Die Bildmenge $\Phi(\mathcal{P}(V))$ ist nicht in zwei Hyperebenen enthalten.
- 3) Die Bildmenge jeder Geraden enthält wenigstens drei Punkte.
- 4) Es existiert eine fundamentale Punktmenge, welche auf eine fundamentale Punktmenge injektiv abgebildet wird.

Bemerkung. Haben V und V' denselben endlichen Rang, so kann man zeigen, daß 3), 4) aus 1) und 2) folgen.

Wir betrachten nun eine VSL -Abbildung $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow K'$, $f: W \rightarrow V'$, wo $\mathcal{O} \subset K$, $W \subset V$, und erklären eine Abbildung $f^*: \mathcal{S}(V) \rightarrow \mathcal{S}(V')$ in folgender Weise: für $L \in \mathcal{S}(V)$ ist

$$f^*(L) = [\{f(x) \mid x \in L \cap W\}] \quad (3.1)$$

(wir erinnern daran, daß $[A]$ den durch die Menge A erzeugten Unterraum bezeichnet). Satz 2.1 ergibt, daß f^* einen Unterraum endlichen Ranges in einen von demselben Range überführt, also insbesondere Punkte in Punkte und Geraden in Geraden. Die Restriktion von f^* auf $\mathcal{P}(V)$, welche ohne Gefahr eines Mißverständnisses ebenfalls mit f^* bezeichnet werden soll, ist eine Kollineation. Denn 1) ist nach den obigen richtig, 2) und 4) folgen sofort aus der Forderung 5. der Definition 2.1, während 3) sich wie folgt ergibt: Gegeben sei eine Gerade G , d.h. ein linearer Unterraum vom Range 2; wir nehmen eine $\mathcal{O}$ -Basis von G , welche wegen Lemma 2.11 aus zwei Elementen, etwa a und b , besteht; dann überführt f^* die zu G gehörigen Punkte $Ka, Kb, K(a+b)$ bzw. in $K'f(a), K'f(b), K'(f(a)+f(b))$; diese sind aber nach Lemma 2.6 voneinander verschieden.

Definition 3.2. $f^*: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V')$ soll als die durch die VSL -Abbildung (φ, f) induzierte Kollineation bezeichnet werden.

Unser Ziel ist es zu zeigen:

Hauptsatz. Es seien V, V' Linksvektorräume über den Schiefkörpern K bzw. K' , jeder vom Rang ≥ 3 . Zu einer beliebigen Kollineation $\Phi: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V')$ läßt sich dann eine VSL -Abbildung von V in V' finden, welche Φ induziert.

Als Vorbereitung zum Beweis fassen wir einige wohlbekannte Tatsachen über zentrale Kollineationen in $\mathcal{P}(V)$ zusammen (eine ausführlichere Darstellung findet man z.B. in [4]).

Es sei H eine Hyperebene von V , Q ein Komplement von H in V , $q \in Q$ und $\psi: V \rightarrow K$ eine lineare Abbildung mit $\psi(H) = 0$, $\psi(q) = 1$. Ist $h \in H$, so nennt man die durch

$$\bar{\tau}_h(x) = x + \psi(x) h \quad (3.2)$$

erklärte Abbildung $\bar{\tau}_h: V \rightarrow V$ eine *Elation*. Diese induziert die *Translation* $\tau_h: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$, wobei

$$\tau_h(P) = \{\bar{\tau}_h(x) \mid x \in P\}. \quad (3.3)$$

Die Abbildung $h \rightarrow \tau_h$ ist ein Isomorphismus der additiven Gruppe von H auf die Translationsgruppe $\mathbf{T}_H$ von $\mathcal{P}(V)$ mit der Achse H ; es gilt:

$$\tau_{h'} \tau_h = \tau_{h+h'}. \quad (3.4)$$

Ist $\alpha \in K^*$, so nennt man die Abbildung $\bar{\delta}_\alpha: V \rightarrow V$, welche $x = \lambda q + u$ ($\lambda \in K$, $u \in H$) in

$$\bar{\delta}_\alpha(\lambda q + u) = \lambda \alpha^{-1} q + u \quad (3.5)$$

überführt, eine *Dilatation*, während die induzierte Abbildung $\delta_\alpha: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$

$$\delta_\alpha(P) = \{\bar{\delta}_\alpha(x) \mid x \in P\} \quad (3.6)$$

eine *Streckung* ist. Die Abbildung $\alpha \rightarrow \delta_\alpha$ ist ein Isomorphismus von K^* auf die Streckungsgruppe $\mathbf{D}_{H,Q}^*$ von $\mathcal{P}(V)$ mit der Achse H und dem Zentrum Q ; es ist

$$\delta_\beta \delta_\alpha = \delta_{\beta\alpha}, \quad (3.7)$$

$$\delta_\alpha \tau_h = \tau_{\alpha h} \delta_\alpha. \quad (3.8)$$

Wir wollen mit $\delta_0: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ diejenige Abbildung bezeichnen, welche den zu H nichtgehörigen Punkten stets Q zuordnet, während die in H enthaltenen Punkte invariant sind. Die Beziehungen (3.7) und (3.8) können für $\mathbf{D}_{H,Q}^* = \mathbf{D}_{H,Q}^* \cup \{\delta_0\}$ ausgedehnt werden:

$$\delta_0 \delta_\alpha = \delta_\alpha \delta_0 = \delta_0, \quad (3.7')$$

$$\delta_0 \tau_h = \tau_0 \delta_0, \quad (3.8')$$

wo τ_0 mit der identischen Abbildung gleich ist.

Die Translationen und die Streckungen sind Kollineationen von $\mathcal{P}(V)$ in sich. Außer δ_0 , sind sie alle bijektiv.

$\mathbf{T}_H$ operiert scharf transitiv auf $\mathcal{P}(V) \setminus H$, d. h.

$$A, B \in \mathcal{P}(V) \setminus H \Rightarrow \exists! \tau_h \in \mathbf{T}_H, \tau_h(A) = B.$$

Es gilt eine ähnliche Eigenschaft für $\mathbf{D}_{H,Q}^*$:

$$A, B \in \mathcal{P}(V) \setminus H, A \neq Q, \kappa(Q, A, B) \Rightarrow \exists! \delta_\alpha \in \mathbf{D}_{H,Q}^*, \delta_\alpha(A) = B.$$

Die entsprechenden Bezeichnungen in $\mathcal{P}(V')$ werden H' , Q' , q' , $\mathbf{T}'_{H'}$ und $\mathbf{D}'_{H', Q'}$ sein.

Beweis des Hauptsatzes. Es ist die Kollineation $\Phi: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V')$ gegeben. Wir können eine Hyperebene H in $S(V)$ so wählen, daß die Bilder der in H enthaltenen Punkte in einer Hyperebene H' liegen sollen. Es genügt dazu eine fundamentale Punktmenge gemäß der Forderung 4) der Definition 3.1 zu betrachten, davon einen Punkt A_1 zu entfernen und aus den übrigen Punkten je einen von Null verschiedenen Vektor zu wählen; diese Vektoren erzeugen dann offenbar eine mit V/A_1 isomorphe Hyperebene der gewünschten Art. Es sei ferner Q ein festes Element aus $\mathcal{P}(V)$, für welches $Q' = \Phi(Q) \notin H'$ gilt. Wir wählen einen Punkt A wieder so, daß

$$\Phi(A) \notin H'; \quad (3.9)$$

dann ist $A \notin H$. Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} W_H^0 &= \{h \mid \tau_h \in \mathbf{T}_H, \Phi \tau_h(A) = \Phi(A)\} \\ W_H &= \{h \mid \tau_h \in \mathbf{T}_H, \Phi \tau_h(A) \notin H'\} \\ W_H^* &= W_H \setminus W_H^0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Es gilt:

$$\forall h \in H \setminus \{0\}, \quad \exists \rho \in K, \quad \rho h \in W_H^*. \quad (3.11)$$

Denn nach Forderung 3) der Definition 3.1 läßt sich auf der Geraden $A + \tau_h(A)$ ein Punkt A_1 finden, für welchen $\Phi(A_1) \neq \Phi(A)$, $\Phi(A_1) \notin H'$. Man kann aber schreiben: $A_1 = \tau_{\rho h}(A)$ mit $\rho \in K$, wonach dann $\rho h \in W_H^*$.

Es sei nun $h \in W_H^*$. Wir können einen Punkt $B \in \mathcal{P}(V)$ bestimmen, für welchen

$$\Phi(B) \notin H' \quad (3.12)$$

$$\Phi(A), \quad \Phi \tau_h(A), \quad \Phi(B) \text{ nicht kollinear sind.} \quad (3.13)$$

Denn im entgegengesetzten Falle würden die Bilder aller Punkte von $\mathcal{P}(V)$ im Widerspruch zur Forderung 2) der Definition 3.1 auf H' und auf einer Geraden liegen. Wir definieren das Element $f(h) \in H'$ durch: $\tau_{f(h)} \in \mathbf{T}'_{H'}$ und

$$\tau_{f(h)} \Phi(A) = \Phi \tau_h(A). \quad (3.14)$$

Da $\mathbf{T}'_{H'}$ auf der nicht zu H' gehörigen Punktmenge scharf transitiv operiert, ist $\tau_{f(h)}$, und damit $f(h)$, mittels (3.14) eindeutig bestimmt. Da die Abbildung Φ kollineare Punkte in kollineare und die auf H liegenden Punkte in Punkte in H' überführt, ist es unter Beachtung von (3.13) ersichtlich, daß dem Punkt $\Phi(B)$ bei der Translation $\tau_{f(h)}$ der Punkt $\Phi \tau_h(B)$ entspricht; es gilt daher

$$\tau_{f(h)} \Phi(B) = \Phi \tau_h(B). \quad (3.15)$$

Dasselbe kann aber für jeden Punkt P gefolgert werden, welcher nur die Bedingungen (3.12) und (3.13) mit P an der Stelle von B erfüllt:

$$\tau_{f(h)} \Phi(P) = \Phi \tau_h(P). \quad (3.16)$$

Läßt man noch B an die Stelle von A treten, was wegen (3.12) und (3.15) durchaus möglich ist, so sieht man, daß (3.16) jedesmal gilt, wenn $\Phi(P) \notin H'$. Ist $\Phi(P) \in H'$ so unterscheidet man zwei Fälle, je nachdem $\Phi(P)$ mit $[\Phi(A) + \Phi \tau_h(A)] \cap H'$ übereinstimmt oder nicht. In beiden Fällen sieht man leicht, daß $\Phi \tau_h(P) = \Phi(P)$. Es gilt also (3.16) allgemein:

$$\tau_{f(h)} \Phi = \Phi \tau_h. \quad (3.17)$$

Es sei jetzt $h \in W_H^0$. Wir setzen $f(h) = 0$. Die Beziehung (3.17) gilt auch in diesem Falle, denn es ist ja $\Phi(A) = \Phi \tau_h(A)$, woraus sich wie oben $\Phi = \Phi \tau_h$ oder $\tau_0 \Phi = \Phi \tau_h$ ergibt.

Bemerkung. Nach (3.17) ist es klar, daß in der für die Definition von $f(h)$ benutzten Gl. (3.14) an die Stelle von A jeder Punkt P treten kann, für welchen nur $\Phi(P) \notin H'$ gilt. Die Abbildung $h \rightarrow f(h)$ und die Mengen W_H^0, W_H^* hängen also von der Wahl des Punktes A nicht ab, insofern nur (3.9) erfüllt ist.

Nehmen wir wieder einen festen Punkt A , für welchen diesmal $\Phi(A) \notin H' \cup Q'$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_0 &= \{\alpha \mid \delta_\alpha \in \mathbf{D}_{H, Q}, \Phi \delta_\alpha(A) = Q'\}, \\ \mathcal{O} &= \{\alpha \mid \delta_\alpha \in \mathbf{D}_{H, Q}, \Phi \delta_\alpha(A) \notin H'\}, \\ \mathcal{O}^* &= \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Beachtet man, daß $\kappa(Q', \Phi(A), \Phi \delta_\alpha(A))$ gilt und $\mathbf{D}'_{H', Q'}$ auf den durch Q' gehenden Geraden scharf transitiv operiert, so sieht man, daß es genau eine Abbildung $\delta_{\varphi(\alpha)} \in \mathbf{D}'_{H', Q'}$ gibt, für welche

$$\delta_{\varphi(\alpha)} \Phi(A) = \Phi \delta_\alpha(A). \quad (3.19)$$

Für $\alpha \in \mathcal{O}^*$ ergibt sich wie oben

$$\delta_{\varphi(\alpha)} \Phi = \Phi \delta_\alpha. \quad (3.20)$$

Für $\alpha \in \mathcal{O}_0$ folgt $\varphi(\alpha) = 0$, und es gilt:

$$\forall \alpha \in \mathcal{O}_0, \quad \forall P \in \mathcal{P}(V), \quad \Phi \delta_\alpha(P) = Q' \quad \text{oder} \quad \Phi(P) \in H'. \quad (3.21)$$

Denn ist $\Phi(P) \notin H'$, so nehmen wir zunächst an, daß $\Phi(P) \notin Q' + \Phi(A)$, setzen $(A + P) \cap H = \tilde{P}$ und bemerken, daß $\Phi \delta_\alpha(P) \in Q' + \Phi(\tilde{P})$, $\Phi \delta_\alpha(P) \in Q' + \Phi(P)$ und daß hier auf den rechten Seiten verschiedene Geraden stehen. Es ergibt sich daraus $\Phi \delta_\alpha(P) = Q'$. Ist nun $\Phi(P) \in Q' + \Phi(A)$, aber $\Phi(P) \neq Q'$, so wählen wir gemäß der Forderung 2) der Definition 3.1 einen Punkt B , für welchen $\Phi(B)$ weder auf H' noch auf $Q' + \Phi(A)$ liegt; dann ist, wie wir eben bewiesen haben, $\Phi \delta_\alpha(B) = Q'$. Wiederholt man diesen Beweis mit B an Stelle von A , so ergibt sich (3.21) auch in diesem Fall. Ist endlich $\Phi(P) = Q'$ und nimmt man $\Phi \delta_\alpha(P) \neq Q'$ an, so kann man o.B.d.A. auch $\Phi \delta_\alpha(P) \notin Q' + \Phi(A)$ voraussetzen; es folgt $\Phi(\tilde{P}) = H' \cap [Q' + \Phi(A)]$ und $\Phi(\tilde{P}) = H' \cap [Q' + \Phi \delta_\alpha(P)]$, was unmöglich ist. Damit ist (3.21) bewiesen.

Nun zeigen wir einige Eigenschaften der Abbildungen $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow K'$ und $f: W_H \rightarrow H'$.

1) Es gilt: $\alpha \in K \setminus \mathcal{O} \Rightarrow \alpha^{-1} \in \mathcal{O}_0$.

Denn aus (3.18) folgt $\Phi \delta_\alpha(A) \subset H$. Man kann wegen Definition 3.1, Forderung 2) den Punkt B aus $\mathcal{P}(V)$ so bestimmen, daß

$$\Phi(B) \notin H' \cup (Q' + \Phi(A)). \quad (3.22)$$

Es sei nun $C = (B + \delta_\alpha(A)) \cap H$. Die Punkte der Geraden $B + \delta_\alpha(A)$ werden durch Φ in $\Phi(B) + \Phi \delta_\alpha(A)$ abgebildet, woraus sich $\Phi(C) = \Phi \delta_\alpha(A)$ ergibt. Φ bildet die Punkte der Geraden $A + C$ in $\Phi(A) + \Phi \delta_\alpha(A) = Q' + \Phi(A)$ und die der Geraden $Q + B$ in $Q' + \Phi(B)$ ab; folglich wird der Schnittpunkt dieser Geraden, welcher ja $\delta_{\alpha^{-1}}(B)$ ist, in Q' abgebildet:

$$\Phi \delta_{\alpha^{-1}}(B) = Q'. \quad (3.23)$$

Bezeichnet man $(A + B) \cap H = E$, so ist

$$(E + \delta_{\alpha^{-1}}(B)) \cap (Q + A) = \delta_{\alpha^{-1}}(A). \quad (3.24)$$

Aus (3.22) folgt, daß die Punkte $\Phi(A)$, $\Phi(B)$, $\Phi \delta_\alpha(A)$ nicht kollinear sind; also ist $\Phi(E) \neq \Phi \delta_\alpha(A)$. Folglich liegt das Bild der Geraden $E + \delta_{\alpha^{-1}}(B)$ nicht in $Q' + \Phi(A)$. Hieraus und aus (3.23), (3.24) folgt: $\Phi \delta_{\alpha^{-1}}(A) = Q'$. Nach (3.18) ist somit $\alpha^{-1} \in \mathcal{O}_0$.

2) Aus $h, h' \in W_H$ folgt $h + h' \in W_H$ und $f(h + h') = f(h) + f(h')$.

Unter Benutzung von (3.4) und (3.17) erhält man nämlich:

$$\Phi \tau_{h+h'} = \Phi \tau_h \tau_{h'} = \tau_{f(h)} \Phi \tau_{h'} = \tau_{f(h)} \tau_{f(h')} \Phi = \tau_{f(h)+f(h')} \Phi$$

und daraus für den der Bedingung (3.9) genügenden Punkt A :

$$\Phi \tau_{h+h'}(A) \notin H',$$

was nach (3.10) $h + h' \in W_H$ bedeutet. Es gilt weiter:

$$\tau_{f(h+h')} \Phi = \Phi \tau_{h+h'} = \tau_{f(h)+f(h')} \Phi;$$

es ist nun sofort zu sehen:

$$\tau_{f(h+h')} = \tau_{f(h)+f(h')},$$

was $f(h + h') = f(h) + f(h')$ ergibt.

3) Aus $\alpha \in \mathcal{O}$, $h \in W_H$ folgt $\alpha h \in W_H$ und $f(\alpha h) = \varphi(\alpha) f(h)$.

Um das einzusehen, sei zunächst $\alpha \in \mathcal{O}^*$. Aus (3.20) erhält man: $\Phi \delta_\alpha^{-1} = \delta_{\varphi(\alpha)}^{-1} \Phi$. Unter Berücksichtigung dieser Beziehung und (3.8), (3.20) können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \Phi \tau_{\alpha h} &= \Phi \delta_\alpha \tau_h \delta_\alpha^{-1} = \delta_{\varphi(\alpha)} \Phi \tau_h \delta_\alpha^{-1} = \delta_{\varphi(\alpha)} \tau_{f(h)} \Phi \delta_\alpha^{-1} \\ &= \delta_{\varphi(\alpha)} \tau_{f(h)} \delta_{\varphi(\alpha)}^{-1} \Phi = \tau_{\varphi(\alpha) f(h)} \Phi, \end{aligned}$$

wonach dann $\Phi \tau_{\alpha h}(A) \not\subset H$, also $\alpha h \in W_H$ folgt und

$$\tau_{f(\alpha h)} \Phi = \Phi \tau_{\alpha h} = \tau_{\varphi(\alpha) f(h)} \Phi;$$

somit ist

$$f(\alpha h) = \varphi(\alpha) f(h).$$

Sei nun $\alpha \in \mathcal{O}_0$. Es gilt: $\Phi \tau_h(Q) = \tau_{f(h)} \Phi(Q) = \tau_{f(h)}(Q') \not\subset H'$. Wendet man (3.21) mit $P = \tau_h(Q)$ an, so ergibt sich: $\Phi \delta_\alpha(\tau_h(Q)) = Q'$ und wir können schreiben

$$\Phi \tau_{\alpha h}(Q) = \Phi \tau_{\alpha h} \delta_\alpha(Q) = \Phi \delta_\alpha \tau_h \delta_{\alpha^{-1}} \delta_\alpha(Q) = \Phi \delta_\alpha \tau_h(Q) = Q' = \Phi(Q).$$

Folglich ist nach (3.10) (mit Q statt A) $\alpha h \in W_H^0$, also $f(\alpha h) = 0$. Andererseits ist in diesem Falle $\varphi(\alpha) = 0$. Somit ist die Behauptung 3) bewiesen.

4) Aus $h \in W_H^*$ und $\alpha h \in W_H$ folgt $\alpha \in \mathcal{O}$.

Denn aus $\alpha \in K \setminus \mathcal{O}$ würde folgen $\alpha^{-1} \in \mathcal{O}_0$ und weiter, nach den obigen, $h = \alpha^{-1} \cdot (\alpha h) \in W_H^0$.

5) Aus $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ folgt $\alpha + \beta \in \mathcal{O}$ und $\alpha \beta \in \mathcal{O}$.

Zum Beweis wählen wir aus der nichtleeren Menge W_H^* (s. (3.11)) ein Element h . Aus den Eigenschaften 2) und 3) folgt

$$(\alpha + \beta)h = \alpha h + \beta h \in W_H, \quad (\alpha \beta)h = \alpha(\beta h) \in W_H,$$

wonach dann unter Beachtung von 4) $\alpha + \beta \in \mathcal{O}$ und $\alpha \beta \in \mathcal{O}$ sich ergibt.

Nun wollen wir die Abbildung $f: W_H \rightarrow H'$ erweitern. Wir setzen

$$W = \mathcal{O}q + W_H \tag{3.25}$$

und weiter für

$$x = \alpha q + w, \quad \alpha \in \mathcal{O}, \quad w \in W_H \tag{3.26}$$

$$\tilde{f}(x) = \varphi(\alpha)q' + f(w). \tag{3.27}$$

Unter Benutzung der Eigenschaften 1)–5) und $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, $\varphi(\alpha \beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$ für $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$, welche wie Lemma 2.1 folgen, können wir sehen, daß aus $s \in \mathcal{O}$, $x, y \in W$ immer $x + y \in W$, $sx \in W$ und

$$\tilde{f}(x + y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y),$$

$$\tilde{f}(sx) = \varphi(s)\tilde{f}(x)$$

folgt. Daraus und aus den Eigenschaften 1) und 5) wird ersichtlich:

Das Abbildungspaar $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow K'$ und $\tilde{f}: W \rightarrow V'$ erfüllt die Forderungen 1. bis 4. der Definition 2.1.

Wir zeigen nun:

6) Aus $h \in W_H$, $x \in W$ folgt $\bar{\tau}_h x \in W$.

Stellt man nämlich x in der Form (3.26) dar, so wird nach (3.2)

$$\bar{\tau}_h x = x + \psi(x)h = x + \alpha \psi(q)h = x + \alpha h, \tag{3.28}$$

also $\bar{\tau}_h x \in W$.

7) Es gilt für $h \in W_H$, $x \in W$: $\bar{\tau}_{f(h)} \tilde{f}(x) = \tilde{f} \bar{\tau}_h(x)$.

Denn wir können unter Berücksichtigung von (3.26), (3.27), (3.2) und (3.28) schreiben:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{f(h)} \bar{f}(x) &= \bar{\tau}_{f(h)} \bar{f}(\alpha q + w) = \bar{\tau}_{f(h)} (\varphi(\alpha) q' + f(w)) \\ &= \bar{f}(x) + \psi(\varphi(\alpha) q) f(h) = \bar{f}(x) + \varphi(\alpha) f(h) = \bar{f}(x + \alpha h) = \bar{f} \bar{\tau}_h(x).\end{aligned}$$

Wir setzen

$$W_0 = \bar{f}^{-1}(0), \quad W^* = W \setminus W_0.$$

8) Jeder Punkt $P \in \mathcal{P}(V)$ kann in der Form $P = Kx$, $x \in W^*$ dargestellt werden.

Denn ist $P = Kv$, $v \in V$ so haben wir

$$v = \alpha q + w,$$

wo $\alpha \in K$, $w \in H$. Wir können wegen (3.11) $w = \rho w_1$ mit $\rho \in K$, $w_1 \in W_H^*$ schreiben. Von den Elementen $\rho^{-1}\alpha$ und $\alpha^{-1}\rho$ gehört gemäß der Eigenschaft 1) wenigstens das eine, sagen wir das erste, zu $\mathcal{O}$. Dann ist

$$v = \rho(\rho^{-1}\alpha q + w_1) = \rho x, \quad x \in W$$

und $\bar{f}(x) = \varphi(\rho^{-1}\alpha) q' + f(w_1) \neq 0$, d. h. $x \in W^*$.

Die Abbildung $\bar{f}: W \rightarrow V'$ induziert $f^*: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V')$, wenn man für $P \in \mathcal{P}(V)$

$$P = Kx, \quad x \in W^*, \quad f^*(P) = K\bar{f}(x)$$

setzt. Man sieht leicht, daß $f^*(P)$ von der Wahl des Elements x in W^* nicht abhängt. Berücksichtigt man, daß $\bar{f}$ die Bedingungen 3. und 4. der Definition 2.1 erfüllt, so erhält man

$$\kappa(P_1, P_2, P_3) \Rightarrow \kappa(f^*(P_1), f^*(P_2), f^*(P_3)). \quad (3.29)$$

Wir haben jetzt zu zeigen, daß die Abbildungen f^* und Φ übereinstimmen. Aus der Eigenschaft 7) ergibt sich:

$$\forall h \in W_H, \quad \tau_{f(h)} f^* = f^* \tau_h. \quad (3.30)$$

Wir erinnern noch an die Formel (3.17)

$$\forall h \in W_H, \quad \tau_{f(h)} \Phi = \Phi \tau_h. \quad (3.17)$$

Aus $f^*(Q) = Q' = \Phi(Q)$ und (3.30), (3.17) folgt für $h \in W_H$

$$f^* \tau_h(Q) = \tau_{f(h)} f^*(Q) = \tau_{f(h)} \Phi(Q) = \Phi \tau_h(Q).$$

Läßt man nun h in W_H variieren, so ergibt sich

$$f^*(P) = \Phi(P) \quad (3.31)$$

für jeden Punkt $P \in \mathcal{P}(V)$, dessen Bild $\Phi(P)$ nicht in H liegt. Denn genau diese Punkte sind es, welche laut (3.10) (mit Q an der Stelle von A) die Form $\tau_h(Q)$, $h \in W_H$ haben. Um (3.31) noch für die übriggebliebenen Punkte zu beweisen,

nehmen wir durch einen solchen Punkt zwei nicht in H liegende Geraden, deren Bilder bei Φ voneinander verschieden sind, und auf diesen je zwei Punkte welche durch Φ nicht in H abgebildet werden, welche also bei Φ und f^* dasselbe Bild haben (das alles ist möglich wegen der Forderungen 2) und 3) der Definition 3.1). Dann ergibt sich (3.31) aus der Eigenschaft der Abbildungen Φ und f^* kollineare Punkte wieder in kollineare Punkte zu überführen, was für Φ laut Definition und für f^* gemäß (3.29) richtig ist.

Die gegebene Kollineation Φ wird also durch f induziert. Um zu zeigen, daß (φ, f) eine VSL -Abbildung ist, brauchen wir nur noch die Forderung 5. der Definition 2.1 nachzuweisen. Es genügt dafür eine fundamentale Punktmenge Σ gemäß der Definition 3.1 zu betrachten, welche durch Φ in eine ebensolche abgebildet wird, und jeden Punkt von Σ in der Form Kx , $x \in W^*$ darzustellen. Bezeichnet man die Menge dieser Vektoren x mit B , so ist es klar, daß die Forderung 5. erfüllt ist.

Damit ist unser Satz bewiesen.

Zum Schluß sollen noch drei Folgerungen angegeben werden.

Folgerung 1. Die Bildmenge $\Phi(\mathcal{P}(V)) = \{\Phi(P) | P \in \mathcal{P}(V)\}$ stimmt mit der Punktmenge eines projektiven Raumes $\mathcal{P}(V'')$ überein.

Nach Lemma 2.12 ist nämlich $\tilde{f}(W)$ ein Vektorraum über dem Schiefkörper $K'' = \varphi(\mathcal{O})$.

Folgerung 2. Es seien V, V' Linksvektorräume über den Schiefkörpern K bzw. K' , jeder vom Range ≥ 3 . Ist $\Phi: \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}(V')$ eine surjektive Kollineation, so ist K' isomorph zu dem Restklassenschiefkörper einer verallgemeinerten Bewertung.

Man braucht nur Satz 1.3 auf den totalen Unterring $\mathcal{O}$ von K anzuwenden.

Ist Φ eine bijektive Kollineation, so geht diese Folgerung in den wohl-bekannten Struktursatz über, wonach K' zu K isomorph ist.

Folgerung 3. Ist eine Kollineation eines projektiven Raumes vom Range ≥ 3 in einem Punkt injektiv, so ist sie injektiv.

Beweis. Wir zeigen zunächst: Ist die Kollineation $f^* = \Phi$ in einem Punkt injektiv, so ist der partielle Homomorphismus φ injektiv. Im entgegengesetzten Falle würde es nämlich ein $s_0 \in \mathcal{O}_0$, $s_0 \neq 0$ geben; wäre dann Kx ein beliebiger Punkt aus $\mathcal{P}(V)$ und x, y unabhängige Vektoren aus W^* , so würde f^* die voneinander verschiedenen Punkte Kx und $K(x + s_0 y)$ in demselben Punkt $K\tilde{f}(x)$ abbilden.

Wir haben noch zu zeigen: Werden die Punkte Kx und Ky , wo $x, y \in W^*$ linear unabhängig sind, durch f^* in demselben Punkt abgebildet, so ist φ nicht injektiv. Dafür beobachten wir, daß $\tilde{f}(x) = s\tilde{f}(y)$, $s \in K^*$ gilt, und o.B.d.A. können wir $s \in \mathcal{O}$ annehmen (denn anderenfalls ist $s^{-1} \in \mathcal{O}$ und $\tilde{f}(y) = s^{-1}\tilde{f}(x)$). Also wird $z = x - sy \neq 0$ durch $\tilde{f}$ in 0 abgebildet. Wir wählen in Kz einen Vektor $v \in W^*$; aus $z = \lambda v$, $\tilde{f}(z) = \varphi(\lambda)\tilde{f}(v)$, $\tilde{f}(v) \neq 0$, $\tilde{f}(z) = 0$ ergibt sich $\varphi(\lambda) = 0$. Da $\lambda \neq 0$, ist die Behauptung bewiesen.

Literatur

1. Baer, R.: Linear algebra and projective geometry. New York: Academic Press Inc. 1952.
2. Klingenberg, W.: Projektive Geometrien mit Homomorphismus. Math. Ann. **132**, 180–200 (1956).
3. — Projektive Geometrie und lineare Algebra über verallgemeinerten Bewertungsringen. Oxford: Proc. Coll. Utrecht, 1959: Algebraical and topological foundations of geometry. 99–107 (1962).
4. Lüneburg, H.: Über die Struktursätze der projektiven Geometrie. Arch. Math. **17**, 206–209 (1966).
5. Radó, F.: Non-injective collineations on some sets in Desarguesian projective planes and extension of non-commutative valuations. Aequationes Math. (wird erscheinen).
6. Schilling, O. F. G.: The theory of valuations. Math. Surveys IV. New York: American Mathematical Society 1950.

Prof. Dr. F. Radó
Babes-Bolyai Universität
Cluj (Rumänien)

(Eingegangen am 23. Juni 1968)