

NOEUDS ET CERCLES TOPOLOGIQUES SUR LES SURFACES FERMÉES ORIENTABLES

par

G. CĂLUGĂREANU

à Cluj

Dans ce travail, nous reprenons des résultats de [1], en énonçant explicitement certaines conséquences de ces résultats, lesquelles, dans [1], sont passées inaperçues ou insuffisamment éclaircies. Nous renvoyons le lecteur à [1] pour le détail de certaines constructions géométriques et pour les figures à leur appui.

Soit N un noeud de type fini dans R^3 (noeud que l'on peut concevoir comme un polygone à un nombre fini de cotés, sans points multiples). En employant une projection de N sur un plan, nous avons indiqué une construction ([1], 393—394) qui permet de présenter N comme le bord d'un *doublet* ([1], 396). Un tel doublet, dans la terminologie de [1], consiste en deux disques dont les frontières ont un arc en commun (*bc* sur la fig. 6 de [1]), et qui se coupent suivant un nombre fini d'arcs, ces arcs ne rencontrant pas l'arc commun aux deux frontières. Pour le noeud N , l'arc commun aux frontières est donc une transversale KT de N qui décompose N en deux cercles¹⁾. Par une modification de la surface-doublet aux voisinages des arcs d'intersection des deux disques, nous avons obtenu une surface orientable sans singularités ([1], 397) dont le bord coïncide avec le noeud N . Ceci constitue donc une démonstration de l'existence des surfaces de Seifert pour un noeud quelconque.

De plus, par les modifications qui, à partir de la surface-doublet, conduisent à la surface orientable, sans singularités, ayant le bord N , la transversale KT n'aura subi aucun changement ; elle subsiste donc sur la surface finale sans singularités. Donc :

¹⁾ Transversale KT = transversale de Kinoshita-Terasaka.

THÉOREME 1. N étant un noeud quelconque, il existe une surface orientable S , sans singularités, ayant le bord N , cette surface portant aussi une transversale KT (au moins) du noeud N .

On doit remarquer que ceci ne démontre pas l'existence des transversales KT sur une surface de Seifert de N (donc surface orientable de genre minimum inscrite dans N) le genre de notre surface S pouvant dépasser le genre du noeud N . L'existence des transversales KT sur une surface de Seifert d'un noeud reste donc un problème ouvert.

Mais le Th. I conduit à d'autres conséquences.

Par un doublage de la surface S on obtient une surface fermée Σ , orientable, sans singularités, portant le noeud N , et N sépare Σ en deux domaines S, S' . Ceci ne change rien à la transversale KT qui reste sur S . La surface Σ est une sphère à un nombre fini d'anses, mais ces anses sont généralement nouées et enlacées entre elles. Nous avons indiqué ([1], 401–402) un procédé (aplatissement) qui permet de modifier Σ de manière à obtenir une surface fermée orientable Σ^* , portant un noeud isotope à N , et qui est en position normale dans R^3 ; ceci signifie que Σ^* sépare R^3 en deux domaines $\mathcal{J}$ et $\mathcal{S}$, chacun de ces domaines ayant un groupe libre comme groupe fondamental. Dans ces conditions, les anses de Σ^* ne seront ni nouées ni enlacées, mais leur nombre sera généralement supérieur au genre de Σ . Ajoutons à ce procédé d'aplatissement de la surface Σ les remarques suivantes :

1. Pendant l'aplatissement de Σ on peut déformer isotopiquement le noeud N sur Σ de manière que, sur la surface finale Σ^* , N sépare Σ^* en deux domaines; ceci arrive si, quand deux „tuyaux” de Σ viennent en contact ([1], 402), on a déformé N sur Σ de manière que un disque de S sur l'un des tuyaux se colle à un disque appartenant aussi à S sur l'autre tuyau. Mais on peut aussi déformer N sur Σ de manière que un disque de S sur l'un des tuyaux se colle à un disque sur S' , de l'autre tuyau; dans ce cas, N sera une non-séparatrice sur Σ^* .

2. Pendant l'aplatissement de Σ , la transversale KT de N , placée sur Σ , peut être déplacée au besoin sur Σ de manière qu'elle reste à l'écart des opérations d'aplatissement. Donc :

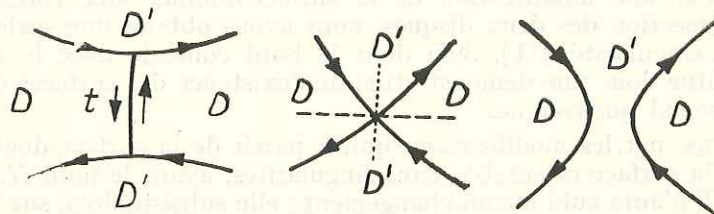


Fig. 1

^{a)} On a simplifié la notation, en remplaçant Σ^* par S .

THÉOREME 2. Chaque noeud N peut être placé sur une surface fermée orientable S (de genre suffisamment grand), sans singularités^{a)}, en position normale dans R^3 , et ceci de deux manières: comme séparatrice ou comme non-séparatrice de cette surface; dans les deux cas, il existe une transversale KT (au moins) de N , placée sur la même surface.



Fig. 2

Passons aux conséquences de ce théorème.

La transversale KT de N , placée sur S , est un arc t ayant ses extrémités sur N , et aucun autre point commun avec N . Si N sépare S en deux domaines D et D' , t se trouve dans l'un de ces domaines, extrémités exceptées. Par déformation isotope de N sur S , on peut raccourcir t en réduisant cet arc à un point P de S . Le noeud N devient alors une courbe C à un point double P , formée de deux cercles (topologiques) placés sur S . Mais nous verrons que, inversement, chaque noeud N tracé sur S peut être déduit d'un tel assemblage. Deux cas sont à distinguer :

a) N sépare S , $t \subset \bar{D}$. En choisissant un sens positif sur N , on voit que, après contraction de t en P , les quatre arcs de C sortant de P sont orientés alternativement autour de P . En coupant la courbe au point P (suivant le segment en pointillé sur la fig. 1) on peut la décomposer en deux cercles disjoints placés sur S , ces deux cercles divisant S en deux domaines D, D' . Et inversement, si C', C'' sont deux cercles disjoints sur S qui divisent S , on peut joindre un point de C' à un point de C'' par un arc dans D ou D' ; en contractant cet arc à un point P , puis en coupant la courbe obtenue en P (suivant l'arc en traits interrompus sur la fig. 1), on obtient un noeud qui sépare S en deux domaines.

b) N ne sépare pas S . Après contraction de t au point P , on ne peut obtenir que la configuration sur la fig. 2, sans quoi on serait dans le cas a). Les cercles C', C'' ainsi obtenus se traversent donc au point P . Autour du point P les orientations des quatre arcs se succèdent dans l'ordre $++--$. Inversement, si C' et C'' sont deux cercles sur S ayant en commun un seul point P où ils se traversent l'un l'autre, en coupant la courbe au point P (suivant le segment en pointillé sur la fig. 2) on obtient un noeud non-séparateur sur S .

Ceci nous donne un procédé de construction des noeuds à l'aide des cercles tracés sur une surface fermée orientable S en position normale dans R^3 , et pose les problèmes suivants :

I. Déterminer les classes d'homotopie de S qui contiennent des cercles topologiques.

II. Déterminer les paires de cercles disjoints sur S , et les cercles qui se traversent en un seul point de S .

Relativement au problème I, remarquons que la condition nécessaire

et suffisante pour qu'un noeud de R^3 soit un cercle est que son groupe soit cyclique infini. Or, nous avons indiqué ([2], [3]) un système de générateurs intrinsèques, liés à la surface S , qui permet de présenter le groupe d'un noeud N sur S si l'on connaît un automorphisme de S qui applique une coupure canonique de S sur N (conformément au théorème de Zieschang). Il reste à exprimer que ce groupe est cyclique infini, ce qui revient à dire que ce groupe est isomorphe à son groupe abélianisé, qui est cyclique infini. On sait que [4] le problème de l'isomorphisme de deux groupes, donnés par des générateurs et relations, est indécidable, même si l'un des groupes est cyclique infini, l'autre étant quelconque. Mais dans le cas qui intéresse ici, les relations du groupe du noeud N ont une forme spéciale (voir [2], [3]), ce qui laisse la possibilité d'obtenir une condition qui caractérise les cercles sur une surface S .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Călugăreanu G., *Considérations directes sur la génération des noeuds*. Revue roumaine de math. p. et appl., X, 389–403 (1965).
- [2] — *Sur un choix intrinsèque des générateurs du groupe d'un noeud*. Revue roum. de math. p. et appl., XIII, 19–23 (1968).
- [3] — *Sur les relations du groupe d'un noeud*. Revue roum. de math. p. et appl., XIV, 753–757 (1969).
- [4] Rabin M. O., *Recursive unsolvability of group theoretic problems*. Annals of math., 67, 172–194 (1958).

Reçu, 6. II. 1970.

STUDIA

UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 1

1971

SEPARATUM

C L U J