

AV 17

Die Folge der Betaoperatoren

Von der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr.rer.nat.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
A l e x a n d r u L u p a ş
geboren zu Arad (Rumänien)

Hauptberichter: Prof.Dr.W.Meyer-König
Mitberichter: Prof.Dr.F.Lösch
Tag der Einreichung: 5. April 1972
Tag der mündlichen Prüfung: 28. April 1972

1972

nee

Mit herzlichem Gruß,
Fhr
Alexander.

AV

Die Folge der Betaoperatoren

Von der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr.rer.nat.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von
A l e x a n d r u L u p a ş
geboren zu Arad (Rumänien)

Hauptberichter: Prof.Dr.W.Meyer-König
Mitberichter: Prof.Dr.F.Lösch
Tag der Einreichung: 5. April 1972
Tag der mündlichen Prüfung: 28. April 1972

1972

I N H A L T

Zusammenfassung	5
I. Einleitung	7
Literatur zur Einleitung	13
II. Charakteristische Eigenschaften von linearen positiven Operatoren	18
III. Die Betaoperatoren	31
IV. Inhaltstreue Operatoren	68
Literatur	73

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Approximation durch lineare positive Operatoren. Eine Einführung in den Gegenstand findet sich in der Einleitung. Aus der grossen Zahl von Veröffentlichungen über dieses Gebiet greifen wir eine begrenzte Zahl wichtiger Arbeiten heraus, um dem Leser einen allgemeinen Überblick zu verschaffen. Die auf die Einleitung bezügliche Literatur ist auf S.13 bis S.17 besonders zusammengestellt. Ein weiteres Literaturverzeichnis, zu den in der Arbeit behandelten speziellen Fragen, findet sich am Ende der Arbeit.

Das erste Kapitel bringt einige Ergebnisse über Approximationsprozesse durch lineare positive Operatoren. Wir beweisen verschiedene Ungleichungen, die später benötigt werden und alle auf der Jensen-Ungleichung basieren. So zeigen wir z.B., dass für jeden linearen positiven Operator $L: C[a,b] \rightarrow C[a,b]$, der lineare Funktionen invariant lässt, und für jede nicht-konkave Funktion, die Beziehung $f \leq Lf$ besteht. Mit dieser einfachen Ungleichung lassen sich mehrere Sätze beweisen, die im Zusammenhang mit Resultaten von T. Popoviciu über die Form des Restgliedes stehen.

Im folgenden Kapitel wird eine spezielle Folge linearer positiver Integraloperatoren untersucht, deren Konstruktion auf einer Analogie zwischen gewissen Limitierungsverfahren einerseits und gewissen Dichtefunktionen klassischer Wahrscheinlichkeitsverteilungen andererseits beruht. Einer solchen Methode bedienen sich unter anderen W. Meyer-König

und K.Zeller, V.A.Baskakov, M.W.Müller, usw. Diese Operatoren bezeichnen wir als „Betaoperatoren“, entsprechend der Analogie zwischen ihrem Kern und der Betaverteilung. In Zusammenhang damit beweisen wir einige Ungleichungen und Identitäten, so eine Verschärfung der Gautschi- und Rao-Ungleichungen für die Gammafunktion und einige in der Statistik nützliche Identitäten zur Berechnung der mittleren Abweichung. Ferner wird eine asymptotische Formel für eine beliebige Folge linearer positiver Operatoren auf verschiedenen Räumen aufgestellt. Schliesslich wird auf die Approximationseigenschaften der Betaoperatoren eingegangen, ausserdem werden einige Modifikationen dieser Operatoren untersucht.

Im letzten Kapitel wird eine gewisse Klasse linearer positiver Operatoren eingeführt und untersucht. Es handelt sich um Operatoren, die den Flächeninhalt erhalten. Eine Folge symmetrischer Operatoren dieser Art lässt sich mit Hilfe von Betaoperatoren konstruieren.

Zum Schluss möchte ich meinen besonderen Dank an Herrn Prof. Dr. W. Meyer-König ausdrücken für sein fortwährendes grosses Interesse während der Anfertigung dieser Arbeit.

Mein Dank richtet sich auch an Herrn Dr. M. W. Müller für wertvolle Diskussionen und an die Herren G. Schmid und H. Widmann für ihre Hilfe bei der Übersetzung der Arbeit.

Diese Arbeit wurde zum Teil unterstützt von der Rumänischen Akademie der Wissenschaften und zum Teil von der Alexander von Humboldt -Stiftung.

I. EINLEITUNG

Als Einführung geben wir einen kurzen Überblick über die Ergebnisse und Fragestellungen, an die die vorliegende Arbeit anknüpft. Es sei $(Y, \|\cdot\|)$ ein normierter linearer Raum und $\mathcal{M}$ eine Klasse von Operatoren, die Y in sich abbilden. Ist H ein linearer Teilraum von Y , so verstehen wir unter der abgeschlossenen Hülle von H bzgl. der Klasse $\mathcal{M}$ den Teilraum $H(\mathcal{M})$ derjenigen Elemente $f \in Y$ welche die folgende Eigenschaft besitzen: Für jede Folge $(L_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h - L_n h\| = 0$ für jedes $h \in H$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n f\| = 0.$$

Probleme folgender Art werden untersucht :

(A) Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen muss $H \subset Y$ erfüllen, damit für die vorgegebene Klasse $\mathcal{M}$ die Aussage

(*) $H(\mathcal{M}) = Y$ besteht ?

(B) Ist $Y \setminus H(\mathcal{M}) \neq \emptyset$, so stellt sich die Frage nach einer Charakterisierung der Elemente von $H(\mathcal{M})$.

(C) Ist $H(\mathcal{M}) = Y$, so fragen wir nach konkreten Operatorfolgen aus $\mathcal{M}$ und studieren anschliessend Approximationseigenschaften solcher Folgen wie z.B.:

- Ordnung der Approximation;
- Abschätzung und Darstellung des Restgliedes;
- Konvergenz auf speziellen Teilräumen;
- Erhaltung spezieller Teilräume .

1. Im folgenden bezeichnen wir mit $C(X)$ bzw. $M(X)$, $X=[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$, den linearen Raum aller stetigen bzw. beschränkten auf X reellwertigen Funktionen. Unter $\langle f_0, f_1, \dots, f_s \rangle$ verstehen wir den linearen Teilraum von $C(X)$ bzw. $M(X)$, der durch die Funktionen $f_j, j=0,1,\dots,s$, erzeugt wird. Für die folgenden Operatorklassen wurde das Problem (A) gelöst:

- Menge der linearen positiven Operatoren $C(X) \rightarrow C(X)$ oder $C(X) \rightarrow M(X)$. Hiermit haben sich T. Popoviciu [30,32], H. Bohman [6], P. P. Korovkin [17-18], V. I. Volkov [43], R. Sine [41], C. Franchetti [13] beschäftigt. Diese Autoren haben hinreichende Bedingungen diskutiert, die H erfüllen muss. So ist der Fall $H = \langle e_0, e_1, e_2 \rangle$, $e_k(x) = x^k$, wohlbekannt. Eine vollständige Behandlung des Problems findet man bei M. I. Brodskij [7] und Ju. A. Šaškin [33-34, 36]. Für andere Funktionalräume wurden hinreichende Bedingungen von V. K. Dzjaduk [9], P. V. Ermakov [10], Bl. Sendov [40], P. M. Anselone [2], M. W. Müller [29], H. Walk [45], W. Schempp [37] angegeben.

- Operatorklasse S_m (gemäß P. P. Korovkin). S_m ist folgendermassen definiert: Sei $g \in C(X)$ eine Funktion mit m Nullstellen, sei ferner $\varepsilon_{x_0}(f) = f(x_0)$, $f \in M(X)$. Genau dann gehört $F \in C(X)^{\mathbb{R}}$ zu $S(m, g)$, wenn für jedes $f \in C(X)$ mit $\text{sign } f = \text{sign } g$ die Ungleichung $F(f) \geq 0$ gilt. Ein linearer Operator $L: C(X) \rightarrow M(X)$ ist in S_m , falls es zu jedem $x_0 \in X$ ein $g_{x_0} \in C(X)$ so gibt, dass $L_{x_0} \in S(m, g_{x_0})$ ist, wobei $L_{x_0}(f) := \varepsilon_{x_0}(Lf)$, $f \in C(X)$, ist. Demnach ist S_0 die Menge der positiven Operatoren und

$$S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_m \subset \dots$$

Ein Beispiel, bei dem (*) erfüllt ist, findet man in P. P. Korovkin [19]. Eine vollständige Lösung in diesem Fall

wurde von R. M. Minkova und Ju. A. Šaškin [25] angegeben; vgl. auch R. M. Minkova [24].

- Menge der linearen Operatoren $L: B \rightarrow B$, $(B, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum mit einem „festen“ Kegel K , die positiv bzgl. K sind, d.h. für die

$$f \in K \implies Lf \in K$$

gilt. V. S. Klimov, M. A. Krasnoselskiĭ und E. A. Lifschitz [16] haben hinreichende Bedingungen untersucht, denen $H \subset B$ genügen muss. Detaillierten Ausführungen finden sich bei M. A. Krasnoselskiĭ und E. A. Lifschitz [20].

- Menge der linearen Kontraktionsoperatoren $L: C(X) \rightarrow C(X)$, für die $\|L\| \leq 1$ ist. Hinreichende Bedingungen stammen von V. I. Andreev [1] und von D. Wulbert [46]. Eine vollständige Behandlung geht auf Ju. A. Šaškin [35] zurück.

- Menge der Multiplikationsoperatoren $L: C(X) \rightarrow M(X)$, für die also $L(fg) = L(f)L(g)$ gilt für $f, g \in C(X)$; vgl. V. I. Volkov [44].

2. Das Problem (B) wurde von V. A. Baskakov [4] und unabhängig von ihm von H. Bauer [5] gelöst für den Fall positiver linearer Operatoren $C(X) \rightarrow M(X)$. A. Lupas [22] behandelte das Problem für die Operatorklasse S_m .

3. Fast nicht möglich ist ein umfassender Überblick über die Untersuchungen zum Problem (C). Wir begnügen uns mit einigen Hinweisen. Verschiedene Beispiele linearer positiver Operatoren wurden unter Bezugnahme auf die Limitierungstheorie und die Wahrscheinlichkeitstheorie konstruiert vgl. W. Meyer-König und Zeller [23], V. A. Baskakov [3], F. Schurer [39], J. P. King [15], M. W. Müller [28], R. Schnabl [38], D. D. Stancu [42], H. Walk [45], P. Kesava Menon [14], Gr. Moldovan [27], A. Lupas [21],

usw. Fragen im Zusammenhang mit dem Studium des Restgliedes wurden von T. Popoviciu [31] und E. Moldovan [26] bearbeitet.

Im weiteren gehen wir auf die Frage der Approximationsordnung ein. Sei $(B, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und $L_n: B \rightarrow B$, $n=1, 2, \dots$, eine Folge linearer Operatoren mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n f\| = 0, \quad f \in B.$$

Dann liegt es nahe, Fragen folgender Art zu untersuchen:

(I) Direkte Sätze. Für eine feste Teilmenge $\mathcal{F} \subset B$ suchen wir Abschätzungen für die Norm des Restgliedes $\|f - L_n f\|$, $f \in \mathcal{F}$. Im Fall einer Folge linearer Operatoren $L_n: C(X) \rightarrow C(X)$, $X \subseteq \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, hat dieses Problem zwei Aspekte, einen lokalen und einen globalen. Das soll heissen, wir haben die Möglichkeit für jedes $f \in \mathcal{F}$ den Ausdruck

$$|f(x) - (L_n f)(x)|, \quad x \in X_1 \subset X,$$

zu berechnen (selbstverständlich kann $X_1 = \{x_0\}$ sein), oder aber den Ausdruck $\|f - L_n f\| := \max_{t \in X} |f(t) - (L_n f)(t)|$.

Ist $w: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ eine monoton wachsende Funktion mit $\lim_{t \rightarrow 0} w(t) = 0$, so hat der Approximationsprozess, der durch eine Folge linearer Operatoren $(L_n)_{n=1}^\infty$ bestimmt ist, die Approximationsordnung $O(w(\frac{1}{n}))$ bzgl. $\mathcal{F}$, wenn

$$\|f - L_n f\| = O(w(\frac{1}{n})) \quad , \quad f \in \mathcal{F}, \quad n \rightarrow \infty,$$

ist. Oft kann die Norm des Restgliedes durch Verwendung des Stetigkeitsmodulus $\omega(f; \delta)$ berechnet werden, d.h. es sind Abschätzungen von der Form

$$\|f - L_n f\| \leq C \cdot \omega(f; r(\frac{1}{n})), \quad f \in \mathcal{F}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r(\frac{1}{n}) = 0,$$

möglich.

Gleichzeitig damit wurden in der Literatur asymptotische Formeln für das Restglied bekannt, wobei es sich um die Bestimmung von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z(n) [f(x) - (L_n f)(x)]$$

mit $f \in \mathcal{F}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} z(n) = \infty$ handelt.

(II) Umkehrsätze. Für eine feste Funktion w mit obigen Eigenschaften bestimme man eine Klasse $\mathcal{F} \subset B$, oder z.B. im Falle $C(X)$ eine Teilmenge von $C(X)$, derart, dass aus

$$\|f_0 - L_n f_0\| = O(w(\frac{1}{n})), \quad n \rightarrow \infty,$$

die Beziehung

$$f_0 \in \mathcal{F}$$

folgt. Eine Aussage dieser Art bezeichnen wir als einen Umkehrsatz.

(III) Äquivalenzsätze. Man suche ein Paar $(\mathcal{F}, w)$ für das zugleich ein direkter Satz und ein Umkehrsatz gilt. Dabei kann folgender Spezialfall auftreten:

(III₁) Die Approximationsordnung $O(w(\frac{1}{n}))$ sei „optimal“ für eine gewisse Teilmenge $\mathcal{K}$ aus $\mathcal{F}$, d.h. für das Paar $(\mathcal{K}, w)$ gelte neben dem Äquivalenzsatz, nämlich

$$\|f - L_n f\| = O(w(\frac{1}{n})) \iff f \in \mathcal{K},$$

noch zusätzlich: Aus

$$\|f - L_n f\| = O(w(\frac{1}{n}))$$

folgt, dass L_n die Funktion f invariant lässt, d.h. dass

$$L_n f = f \quad \text{für} \quad n \geq n_0$$

ist. In diesem Fall nennt man $\mathcal{K}$ eine Saturationsklasse

oder eine Favard-Klasse, und anstatt Äquivalenzsatz gebrauchen wir den Begriff Sättigungssatz. Die folgende Definition der Sättigungsordnung (gemäss J.Favard [11-12]) findet man in der Monographie von P.L.Butzer und H.Berens [8]: „Sei $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge linearer Operatoren, die auf einem Banach-Raum $(B, \|\cdot\|)$ definiert sind, und die auf B (z.B. punktweise) gegen den Identitätsoperator konvergiert. Für $\mathcal{F} \subset B$ gelte

- (i) aus $\|f - L_n f\| = O(w(\frac{1}{n}))$ folgt $f = L_n f$ für $n \geq n_0$,
- (ii) aus $\|f - L_n f\| = O(w(\frac{1}{n}))$ folgt $f \in \mathcal{F}$ und umgekehrt,
- (iii) aus $f \in \mathcal{F}$ folgt $\|f - L_n f\| = O(w(\frac{1}{n}))$,
- (iv) $\mathcal{F}$ enthält mindestens ein Element, das nicht invariant ist bezüglich $(L_n)_{n=1}^{\infty}$.

Dann sagt man, dass das durch die Operatorenfolge $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ gegebene Approximationsverfahren optimale Approximationsordnung $O(w(\frac{1}{n}))$ besitzt und dass dieses Verfahren in B saturiert ist mit einer Sättigungsordnung $O(w(\frac{1}{n}))$. Weiter nennt man $\mathcal{F}$ die Sättigungs-klasse des Verfahrens.

(IV) Negative Resultate. Zu einer gegebenen Klasse $\mathcal{M}$ von linearen Operatoren $B \rightarrow B$ beschreibe man eine Unterklasse $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ und eine Teilmenge B_1 von B derart, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - A_n f\| \neq 0, \quad f \in B_1, \quad A_n \in \mathcal{M}_1, \quad n=1, 2, \dots,$$

ist. Einen Satz dieser Art nennen wir einen Satz mit negativem Charakter. Oft erhält man negative Resultate über das Prinzip von der gleichmässigen Beschränktheit.

LITERATUR ZUR EINLEITUNG.

- [1] Andreev V.I., The operator of the identity transformation in the space $C(0,1)$ (Russian), Kalinin.Gos.Ped.Inst. Ucen.Zap., 52 (1967), 1-8.
- [2] Anselone P.M., Abstract Riemann integrals, Monotone Approximation and generalizations of Korovkin's Theorem. Proc. of Colloq. on Numerical Methods in Approximation Theory, Oberwolfach, June 1969, ISNM vol. 15.
- [3] Baskakov V.A., An instance of a sequence of positive linear operators in the space of continuous functions. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 113 (1957), 249-251.
- [4] Baskakov V.A., Some conditions of convergence for linear positive operators. (Russian) Uspehi Mat. Nauk XVI, 1, (1961), 131-134.
- [5] Bauer H., Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 11 (1961), 89-136.
- [6] Bohman H., On approximation of continuous and of analytic functions. Ark. Mat., 2 (1952), 43-56.
- [7] Brodskij M.L., On a necessary and sufficient condition for a system of functions for which Korovkin's theorem is valid. Studies of Modern Problems of Constructive Theory of Functions (Russian), Fizmatgiz, Moscow, 1961, 318-323.
- [8] Butzer P.L.; Berens H., Semi-groups of operators and approximation. Springer-Verlag Berlin, Band 145, 1967.

- [9] Dzjadik V.K., Approximation of functions by positive linear operators and singular integrals.(Russian) Mat.Sb.(N.S.),70(112) (1966),508-517.
- [10] Ermakov P.V., On the conditions of convergence of linear positive operators on unbounded sets.(Russian) Studies of Contemporary Problems of Constructive Theory of Functions,Baku,1965,146-151.
- [11] Favard J., Sur l'approximation dans les espaces vectoriels. Ann.Mat.Pura Appl.,29 (1949),259-291.
- [12] Favard J., Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Analyse Harmonique,Coll.Int.du Centre Nat.de le Rech.Sci., 15,Paris,1949,97-110.
- [13] Franchetti C., Diseguaglianza e teoremi del tipo di Korovkin sugli operatori positivi in $C[0,1]$. Boll.U.M.I.(4),2 (1969), 642-647.
- [14] Kesava Menon P., A class of linear positive operators . J.Indian Math.Soc., 26 (1962) , 77-80.
- [15] King J.P., A class of positive linear operators. Canadian Math.Bull.,II,1 (1968), 51-61 .
- [16] Klimov V.S.; Krasnoselskiĭ M.A.; Lifschitz E.A., Smooth points of a cone and the convergence of linear positive functionals and operators.(Russian), Trudy Moskov.Mat.Obšč.,15 (1966), 55-69 .
- [17] Korovkin P.P., Convergence of linear positive operators in the space of continuous functions.(Russian) Dokl.Akad.Nauk.SSSR 90 (1953), 961-964 .
- [18] Korovkin P.P., Linear operators and approximation theory. Fizmatgiz,Moskow 1959 (Russian) (vgl. Delhi 1960)

- [19] Korovkin P.P., Convergent sequences of linear operators. (Russian) Uspehi Mat.Nauk, 17,4(106) (1962) , 147-152.
- [20] Krasnoselskiĭ M.A.;Lifschitz E.A., The principle of the convergence of the sequences of linear positive operators.(Russian) Studia Math.,31(1968)455-468.
- [21] Lupaş A., On Bernstein power series.Mathematica (Cluj), 8(31),2,(1966),287-296.
- [22] Lupaş A., On the approximation by linear operators of the class S_m . Analele ştiin.Univ."Al.I.Cuza" Iaşi,Secţ. I,XVII (1971),133-137. .
- [23] Meyer-König W.; Zeller K., Bernsteinsche Potenzreihen . Studia Math.,19 (1960),89-94 .
- [24] Minkova R.M., On the convergence of linear operators of the class S_m .(Russian) Proc.of the Conf.on Appl. of Functional Analysis in Approximation Theory,Kalinin 1970,99-103.
- [25] Minkova R.M.; Šaškin Ju.A., On the convergence of linear operators of the class S_m .(Russian) Mat.Zametki 6, 5,(1969),591-598.
- [26] Moldovan E., Observations sur la suite des polynomes de S.N.Bernstein d'une fonction continue. Mathematica (Cluj),4(27),2,(1962),289-292.
- [27] Moldovan Gr., Sur la convergence de certains opérateurs convolutifs. C.R.Acad.Sci.Paris,272(1971),Série A, 1311-1313.
- [28] Müller W.M., Die Folge der Gammaoperatoren. Dissertation,Stuttgart 1967.

- [29] Müller W.M., Approximation durch lineare positive Operatoren bei gemischter Norm.
Habilitationsschrift, Stuttgart 1970 .
- [30] Popoviciu T., Asupra demonstrației teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare. Lucrările Sesiunii Generale Științifice, Acad. RPR, 1950, 1664-1667.
- [31] Popoviciu T., Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse.
Mathematica (Cluj), 1(24), 1, (1959), 95-143.
- [32] Popoviciu T., Über die Konvergenz von Folgen linearer positiver Operatoren. Analele științ. Univ. "Al.I. Cuza" Iași, Sect. I, XVII, 1, (1971), 123-132.
- [33] Šaškin Ju.A., Korovkin systems in the space of continuous functions. (Russian)
Izv. Akad. Nauk SSSR, 26, 4, (1962), 495-512.
- [34] Šaškin Ju.A., The Choquet-Millman's boundary and the approximation theory. (Russian) Funkt. Analiz. i Priložen., 1, 2, (1967), 95-96.
- [35] Šaškin Ju.A., On the convergence of contractive operators. (Russian) Mathematica (Cluj), 11(34), 2, (1969) , 352-360.
- [36] Šaškin Ju.A., On the convergence of linear operators. (Russian) Proc. of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, 1970 (to appear).
- [37] Schempp W., A note on Korovkin Test Families. (to appear).
- [38] Schnabl R., Eine Verallgemeinerung der Bernsteinpolynome. Math. Ann., 179, (1968), 74-82.

- [39] Schurer F., On linear positive operators in approximation theory. Thesis, Uitgeverij Waltman, Delft, 1965.
- [40] Sendov Bl., On the theorems of P.P. Korovkin for convergence of sequences of linear positive operators. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, 177, (1967), 518-520.
- [41] Sine R., Geometric theory of a single Markov operator. Pacific J. Math., 27, 1, (1968), 155-166.
- [42] Stancu D.D., Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 13, 8, (1968), 1173-1194.
- [43] Volkov V.I., Conditions for convergence of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. (Russian) Kalinin Gos. Ped. Inst. Uč. Zap., 26, (1958), 27-40.
- [44] Volkov V.I., Conditions for the convergence of sequences of multiplicative operators. (Russian) Kalinin. Gos. Ped. Inst. Uč. Zap., 52, (1967), 32-41.
- [45] Walk H., Approximation unbeschränkter Funktionen durch lineare positive Operatoren.
Habilitationsschrift, Stuttgart 1970 .
- [46] Wulbert D.E., Convergence of operators and Korovkin's theorem. J. Approximation Theory 1, (1968), 381-390.

II. CHARAKTERISTISCHE EIGENSCHAFTEN VON LINEAREN POSITIVEN OPERATOREN

1. Dieses Kapitel können wir durch die Existenz einiger Folgen positiver linearer Operatoren $L_n: C(K) \rightarrow C(K), n=1,2,\dots$, $K=[a,b]$ mit $-\infty < a < b < +\infty$, motivieren, die die folgenden Eigenschaften haben:

- Sie erhalten lineare Funktionen;
- Auf $C(K)$ konvergiert die Folge $(L_n)_{n=1}^\infty$ punktweise gegen die Identität;
- Die Approximationsordnung bzgl. $C^{(2)}(K)$ ist vollständig bestimmt durch den Teilraum der Polynome zweiten Grades;
- Für jedes nicht-konkave $\ast$) $f \in C(K)$ gilt

$$f \leq L_n f, \quad n=1,2,\dots$$

Probleme dieser Art wurden schon verschiedentlich, jeweils für sich, behandelt ([3], [5], [15], [17], [19], [26], [29]). Eine einheitliche Behandlung findet man bei T. Popoviciu [24], der die sogenannte „einfache Form“ des Restgliedes entwickelt. Hierzu betreibt er zunächst ein gründliches Studium der dividierten Differenzen. Einen neuen Beweis seiner Resultate erhalten wir unter ausschliesslicher Verwendung der Jensen-Ungleichung, die eine wichtige Rolle in der Approximationstheorie spielt. Darüber hinaus gelangen wir zu zusätzlichen

$\ast$) Eine Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ heisst nicht-konkav auf K genau dann, wenn für jedes Tripel von Knoten $x_j \in K, j=1,2,3$, gilt

$$[x_1, x_2, x_3; f] \geq 0$$

Ergebnissen.

Zur Veranschaulichung des Resultats von Jensen beweisen wir zuerst, eine ähnliche Ungleichung unter schwächeren Voraussetzungen:

HILFSSATZ 1.1. Ist $f: K \rightarrow \mathbb{R}, K=[a,b]$, zweimal differenzierbar und gilt $2m_f \leq f''(x) \leq 2M_f, x \in K$, dann gelten für jedes System $x_0, x_1, \dots, x_n$ von Punkten aus K und für jedes System von Funktionen $w_j: K \rightarrow [0, +\infty), j=0,1,\dots,n$, $\sum_{j=0}^n w_j(x) = 1, x \in K$, die Ungleichungen

$$(1.1) \quad \begin{aligned} m_f \sum_{0 \leq i < j \leq n} w_i(x) w_j(x) (x_i - x_j)^2 &\leq J_x(f) \leq \\ M_f \sum_{0 \leq i < j \leq n} w_i(x) w_j(x) (x_i - x_j)^2 &\end{aligned} \quad (x \in K),$$

wobei

$$J_x(f) := \sum_{k=0}^n w_k(x) f(x_k) - f\left(\sum_{k=0}^n w_k(x) x_k\right).$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass aus $0 \leq w_k \leq 1, x_k \in K, k=0,1,\dots,n$, folgt

$$\sum_{k=0}^n w_k(x) x_k \in K, \quad x \in K.$$

Die Jensen-Ungleichung gewährleistet für beliebiges $x \in K$

$$J_x(g) \geq 0$$

für jedes nicht-konkave g auf K . Da die Funktionen $f_1 := f - m_f e_2, f_2 := M_f e_2 - f, e_2(t) = t^2$ nicht-konkav sind, erhalten wir

$$J_x(f_k) \geq 0, \quad k=1,2,$$

was für $k=1$ die linke, für $k=2$ die rechte Ungleichung liefert. In der Tat haben wir für $k=1$

$$J_x(f_1) = \sum_{k=0}^n w_k(x) f(x_k) - f\left(\sum_{k=0}^n w_k(x) x_k\right) - m_f \left\{ \sum_{k=0}^n w_k(x) x_k^2 - \left(\sum_{k=0}^n w_k(x) x_k\right)^2 \right\} \geq 0.$$

Durch Anwendung der Binet-Cauchy Identität

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k c_k\right) \left(\sum_{k=0}^n b_k d_k\right) - \left(\sum_{k=0}^n a_k d_k\right) \left(\sum_{k=0}^n b_k c_k\right) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i) (c_i d_j - c_j d_i)$$

mit $a_k = a_k(x) := w_k(x) x_k$, $c_k := x_k$, $d_k := 1$, $b_k = b_k(x) := w_k(x)$, $k=0,1,\dots,n$, ergibt sich

$$\sum_{k=0}^n w_k(x) x_k^2 - \left(\sum_{k=0}^n w_k(x) x_k\right)^2 = \sum_{0 \leq i < j \leq n} w_i(x) w_j(x) (x_i - x_j)^2,$$

womit die linke Seite der Ungleichung bewiesen ist. Analog verfährt man bei der rechten Seite.

ANWENDUNG 1.2. Sei $B_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $n=1,2,\dots$, die Folge der Bernstein Operatoren, definiert durch

$$(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (x \in [0,1], f \in C[0,1]),$$

dann gilt in der sup-Norm :

$$\begin{aligned} 1. \quad \|f - B_n f\| &= O\left(\frac{1}{n}\right), \quad f \in C^{(2)}[0,1], \\ 2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n f\| &= 0, \quad f \in C[0,1], \end{aligned}$$

sowie

$$3. \quad f \leq B_n f \quad \text{auf} \quad [0,1]; \quad n=1,2,\dots, \quad \text{für jede nicht-konkave Funktion aus} \quad C[0,1].$$

Beweis. Sei $e_k(t) = t^k$, $k=0,1,\dots$. Wir setzen in (1.1)

$w_k(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, $x_k := \frac{k}{n}$, $k=0,1,\dots,n$. Unter Verwendung von (1.2) erhalten wir die Ungleichungen

$$(1.3) \quad m_f(B_n e_2 - e_2) \leq B_n f - f \leq M_f(B_n e_2 - e_2).$$

Hierbei haben wir vorausgesetzt, dass $f \in C^{(2)}[0,1]$ mit $2m_f \leq f''(x) \leq 2M_f$, $x \in [0,1]$, ist. Nun gilt aber

$$\|B_n e_2 - e_2\| \leq \frac{1}{4n}, \quad n=1,2,\dots,$$

so dass wir auf $\|f - B_n f\| \leq \frac{M}{n}$, $n=1,2,\dots$, schliessen können, mit $M \in (0, +\infty)$.

Die Funktionen e_k , $k=3,4,\dots$, sind aus $C^{(2)}[0,1]$, ferner ist

$$B_n e_0 = e_0, \quad B_n e_1 = e_1, \quad B_n e_2 = e_2 + \frac{e_1 - e_2}{n}.$$

Daher folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_k - B_n e_k\| = 0, \quad k=0,1,\dots.$$

Berücksichtigen wir, dass $\|B_n\| = 1$ ist, so ergibt sich mit dem Satz von Banach-Steinhaus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n f\| = 0, \quad f \in C[0,1].$$

Schliesslich kann (1.1) auch für Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ mit beschränkten dividierten Differenzen zweiter Ordnung,

$$m_f \leq [x_1, x_2, x_3; f] \leq M_f, \quad x_i \in K, \quad i=1,2,3,$$

bewiesen werden. Ist speziell $m_f = 0$, so folgt aus (1.3)

$$f \leq B_n f, \quad n=1,2,\dots.$$

2. Es sei $M(J)$ der lineare Raum der beschränkten Funktionen, definiert auf einer beliebigen Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}$.

Wie üblich sei dieser Raum mit der Norm $\|f\| := \sup_J |f|$, $f \in M(J)$, versehen.

SATZ 1.3. Sei $L: M(J_1) \rightarrow M(J_2)$ ein linearer Operator mit der Eigenschaft

$$(Le_0)(x) \geq m > 0, \quad x \in J_2.$$

L ist genau dann positiv, wenn der Operator $\hat{L}: M(J_1) \rightarrow M(J_2)$ definiert durch

$$\hat{L}f = \frac{1}{Le_0} \cdot Lf, \quad f \in M(J_1),$$

beschränkt mit $\|\hat{L}\| = 1$ ist.

Beweis. Sei L positiv. $f \in M(J_1)$, $|f(t)| \leq \|f\|$, $t \in J_1$, impliziert

$$|(\hat{L}f)(x)| \leq (\hat{L}|f|)(x) \leq \|f\| \cdot (Le_0)(x) = \|f\|, \quad x \in J_2.$$

Daher gilt

$$\|\hat{L}(\frac{f}{\|f\|})\| \leq 1,$$

d.h. $\|\hat{L}\| = \|Le_0\| = 1$.

Zum Beweis der Umkehrung wählen wir eine positive Funktion $f_0 \in M(J_1)$. Wegen

$$0 \leq \frac{f_0}{\|f_0\|} \leq 1$$

ist

$$0 \leq e_0 - \frac{f_0}{\|f_0\|} \leq 1,$$

woraus $\|e_0 - \frac{f_0}{\|f_0\|}\| \leq 1$ folgt.

Für $\|\hat{L}\| = 1$ gelten die Ungleichungen

$$\hat{L}(e_0 - \frac{f_0}{\|f_0\|}) \leq \|\hat{L}(e_0 - \frac{f_0}{\|f_0\|})\| \leq 1.$$

Hieraus schliessen wir auf

$$\hat{L}e_0 - \frac{\hat{L}f_0}{\|f_0\|} \leq 1,$$

was äquivalent mit $\hat{L}f_0 \geq 0$ ist.

KOROLLAR 1.4. Ist $L_n: M(J_1) \rightarrow M(J_2)$, $n=1,2,\dots$, eine Folge linearer Operatoren mit $L_n e_0 = e_0$, $n=1,2,\dots$, und $\|L_n\| = 1$, $n=1,2,\dots$; dann ist $(L_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge positiver Operatoren.

Ein weiteres Ergebnis, das die wohlbekannte Bedeutung der positiven linearen Operatoren ebenfalls unterstreicht, ist der

SATZ 1.5. Sei $L_n: C(K) \rightarrow C(K)$, $n=1,2,\dots$, $K=[a,b]$, eine Folge linearer Operatoren mit der Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n f\| \leq \|f\|, \quad f \in C(K), \quad \|\cdot\| := \max_K |\cdot|.$$

Gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_0 - L_n e_0\| = 0,$$

so existiert zu jeder positiven Funktion p , $p \in C(K)$, eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(p)$ so, dass $L_n p > 0$ ist für alle $n \geq n_0$.

Beweis. Wir setzen $\mu := \min_{x \in K} p(x)$ und $q := e_0 - \frac{p}{\|p\|}$.

Da $\mu > 0$ ist, folgt

$$\|q\| = 1 - \frac{\mu}{\|p\|} < 1$$

und

$$(1.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n q\| < 1.$$

Wir nehmen an, es gäbe eine Folge $(x_k)_{k=1}^\infty \subset K$ sowie eine Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k=1}^\infty$ mit

$$(L_{n_k} p)(x_k) \leq 0, \quad k=1,2,\dots$$

O.B.d.A. sei $(x_k)_{k=1}^\infty$ konvergent. Dann ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L_{n_k} q\| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} (L_{n_k} q)(x_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} (L_{n_k} e_0)(x_k) = 1,$$

im Widerspruch zu (1.4).

Zu diesem Satz wurden wir durch ein Resultat von V.I. Andreev [2] inspiriert, der für die Folge $(L_n)_{n=1}^\infty$ die erweiterte Voraussetzung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_k - L_n e_k\| = 0, \quad e_k(t) = t^k, \quad k=0,1,2,$$

macht.

3. Im folgenden betrachten wir zwei lineare Räume $X(I)$, $Y(J)$ reeller Funktionen, die auf I bzw. J definiert sind. Dabei sind I, J endliche oder unendliche Intervalle der reellen Achse. Ferner ist L ein linearer positiver Operator $X(I) \rightarrow Y(J)$, wobei $I \subseteq J$ ist; und schliesslich gelte $e_0, e_1 \in X(I)$, $e_0, e_1 \in Y(J)$, $Le_k = e_k|_J$, $k=0,1$.

Wir bemerken, dass in diesem Fall $\bar{I} \supseteq J$ gelten muss. In der Tat, ist $I = (c, d)$, so folgt aus $c < e_1(t) < d$, dass

$$(1.5) \quad c(Le_0)(x) < (Le_1)(x) < d(Le_0)(x), \quad x \in J,$$

d.h. $c < x < d$, $x \in J$, oder $J \subseteq \bar{I}$ gilt.

Gilt zusätzlich $Le_0 = e_0$, so ist für jedes $f \in X(I)$ die Funktion $f \circ Le_1$ wohl definiert. Dies kann durch die Tatsache motiviert werden, dass in Folge (1.5) $c < Le_1 < d$ ist, d.h., $(Le_1)(x) \in I$, $x \in J$.

4. Wir beweisen nun einen einfachen Satz, der zahlreiche Anwendungen gestattet. Wie oben seien I, J Intervalle von $\mathbb{R}$ mit $I \subseteq J$. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-konkave Funktion erster Ordnung (s. T. Popoviciu [23]). Der Epigraph von f ist definiert durch

$$\text{epi } f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}.$$

Bekanntlich ist eine Funktion $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann nicht-konkav (von erster Ordnung), wenn $\text{epi } g$ eine konvexe Teilmenge von $I \times \mathbb{R}$ ist ([27], S. 25).

SATZ 1.6. Es sei $L: X(I) \rightarrow Y(J)$ ein linearer positiver Operator mit $Le_0 = e_0$. Ist $f \in X(I)$ eine stetige nicht-konkave Funktion auf I , so gilt

$$(1.6) \quad f \circ Le_1 \leq Lf.$$

Beweis. Für $x_0 \in J$ setzen wir

$$\alpha_{x_0} := ((Le_1)(x_0), (Lf)(x_0)) \in I \times \mathbb{R}.$$

Der Beweis ist sofort erbracht, wenn $\alpha_{x_0} \in \text{epi } f$ gezeigt ist. $\text{epi } f$ ist eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^2$. Der Satz von Ascoli-Mazur (s. [8], S. 55) sichert die Existenz einer Hyperebene (H) mit der Gleichung

$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad c_k \in \mathbb{R},$$

so dass $\text{epi } f$ auf einer Seite von (H) liegt; nehmen wir an, es sei

$$c_1 x + c_2 y + c_3 \geq 0, \quad \text{für } (x, y) \in \text{epi } f.$$

Andererseits gilt für jedes $t \in I$: $(t, f(t)) \in \text{epi } f$, woraus folgt

$$c_1 t + c_2 f(t) + c_3 \geq 0, \quad t \in I.$$

Unter Berücksichtigung der Eigenschaften von L erhalten wir

$$c_1 (Le_1)(x_0) + c_2 (Lf)(x_0) + c_3 \geq 0$$

d.h. α_{x_0} liegt auf derselben Seite von (H) wie $\text{epi } f$; das ist jedoch nur für $\alpha_{x_0} \in \text{epi } f$ möglich.

KOROLLAR 1.7. $L_n: X(I) \rightarrow Y(I)$, $n=1,2,\dots$, sei eine Folge linearer positiver Operatoren, die lineare Funktionen invariant lassen. Ist f eine stetige nicht-konkave Funktion aus $X(I)$, dann gilt

$$f \leq L_n f, \quad n=1,2,\dots$$

Beweis. Da $L_n e_1 = e_1$, $n=1,2,\dots$, ist, folgt aus dem obigen Satz

$$f(x) \leq (L_n f)(x), \quad x \in I,$$

für jede stetige nicht-konkave Funktion f .

DEFINITION. Mit $D_2(J)$ bezeichnen wir den linearen Raum aller reellwertigen Funktionen f auf J , für die ein m_f und ein M_f existiert mit

$$m_f \leq [x_1, x_2, x_3; f] \leq M_f$$

für alle Punkte x_1, x_2, x_3 aus J . Hierbei ist $[x_1, x_2, x_3; f]$ die dividierte Differenz zweiter Ordnung.

Eigenschaften von $D_2(J)$ wurden von T. Popoviciu diskutiert [22]. Bekanntlich ist jedes $f \in D_2(J)$, $J = [a, b]$, stetig und genügt überdies einer Lipschitz-Bedingung.

Mit der üblichen Bezeichnung $e_k(t) = t^k$, $k=0,1,2$, setzen wir

$$(1.7) \quad \Delta(L) := \frac{L_0 L_2 - (L_1)^2}{L_0}.$$

Hierbei müssen wir beachten, dass $L_0 \neq 0$. Diese Einschränkung mag durch die Tatsache motiviert werden, dass es lineare positive Operatoren L gibt, für die $(L_0)(\xi) = 0$ ist für ein bestimmtes ξ . Es sei z.B. $L: C(K) \rightarrow C(K)$ der Operator definiert durch

$$(Lf)(x) = (x - \xi_0)^2 f(x), \quad x \in K,$$

wobei $\xi_0 \in K$ ist.

SATZ 1.8. Sei $K \subseteq I$ und $X(K)$, $Y(I)$ je ein linearer Raum reeller Funktionen auf K bzw. I . Sei ferner $D_2(K) \subseteq X(K)$. Weiter sei $L: X(K) \rightarrow Y(I)$ ein linearer Operator mit $L_0 \neq 0$. Für jedes $f \in D_2(K)$ gilt dann

$$(1.8) \quad m_f \cdot \Delta(L) \leq Lf - f\left(\frac{L_1}{L_0}\right)L_0 \leq M_f \cdot \Delta(L)$$

in jedem Punkt von K .

Beweis. Wegen

$$a \leq e_1(t) \leq b, \quad t \in K = [a, b],$$

erhalten wir

$$a(L_0)(x) \leq (L_1)(x) \leq b(L_0)(x), \quad x \in I.$$

Da ferner $L_0 > 0$ ist, gilt

$$\frac{(L_1)(x)}{(L_0)(x)} \in K \quad \text{für jedes } x \in I.$$

Ebenso ist $\Delta(L) \geq 0$, was durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung gezeigt wird. Sei

$$(Tf)(x) := \frac{1}{(L_0)(x)} \cdot (Lf)(x), \quad x \in I,$$

und

$$g_1 := f - m_f e_2, \quad g_2 := M_f e_2 - f.$$

Die Transformation $T: X(K) \rightarrow Y(I)$ ist ein linearer positiver Operator mit $Te_0 = e_0$. Überdies sind g_1 und g_2 nicht-konkav, denn

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3; g_1] &= [x_1, x_2, x_3; f] - m_f [x_1, x_2, x_3; e_2] = \\ &= [x_1, x_2, x_3; f] - m_f \geq 0 \end{aligned}$$

und

$$[x_1, x_2, x_3; g_2] = M_f - [x_1, x_2, x_3; f] \geq 0$$

für jedes Tripel (x_1, x_2, x_3) aus K^3 .

Bei den obigen Ungleichungen haben wir $[x_1, x_2, x_3; e_2] = 1$ verwendet, d.h. $e_2 \in D_2(K)$. Mit (1.6) gilt

$$(1.9) \quad g_k \circ Te_1 \leq Tg_k, \quad k=1,2.$$

Für $k=1$ in (1.9) erhalten wir die linke Ungleichung, für $k=2$ die rechte Ungleichung in (1.8). Aus

$$Te_1 = \frac{Le_1}{Le_0}, \quad Tg_1 = Tf - m_f \cdot Te_2 = \frac{Lf - m_f \cdot Le_2}{Le_0},$$

$$g_1 \circ Te_1 = f\left(\frac{Le_1}{Le_0}\right) - m_f \cdot \left(\frac{Le_1}{Le_0}\right)^2$$

folgt nämlich

$$f\left(\frac{Le_1}{Le_0}\right)Le_0 - m_f \frac{(Le_1)^2}{Le_0} \leq Lf - m_f \frac{Le_0 Le_2}{Le_0}$$

Ebenso zeigt man

$$Tg_2 = \frac{M_f Le_2 - Lf}{Le_0}, \quad g_2 \circ Te_1 = M_f \left(\frac{Le_1}{Le_0}\right)^2 - f\left(\frac{Le_1}{Le_0}\right)$$

womit der Satz bewiesen ist.

Dieser Satz gestattet uns die Darstellung einer gewissen Klasse von Operatoren.

DEFINITION. Sei $K \subseteq I$; $i_0, i_1, i_2 \in Y(I)$. $\mathcal{M}_2(i_0, i_1, i_2)$ ist die Klasse der linearen positiven Operatoren $L: D_2(K) \rightarrow Y(I)$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} (Le_0)(x) &= i_0(x) > 0 \\ (Le_1)(x) &= i_0(x)i_1(x), \quad x \in I, \\ (Le_2)(x) &= i_2(x) + i_0(x)i_1^2(x) \end{aligned}$$

KOROLLAR 1.9. Sei $L \in \mathcal{M}_2(i_0, i_1, i_2)$. Dann gibt es zu jedem $x \in K$ ein lineares Funktional $\theta_x: D_2(K) \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} m_f &\leq \theta_x(f) \leq M_f \\ (Lf)(x) &= (f \circ i_1)(x)i_0(x) + \theta_x(f)i_2(x) \end{aligned}$$

jeweils für $f \in D_2(K)$.

Beweis. Aus (1.8) folgt

$$m_f i_2(x) \leq (Lf)(x) - (f \circ i_1)(x)i_0(x) \leq M_f i_2(x), \quad x \in K.$$

Daher gibt es eine Zahl $\theta_x(f), \theta_x(f) \in [m_f, M_f]$ so dass

$$(Mf)(x) := (Lf)(x) - (f \circ i_1)(x)i_0(x) = \theta_x(f)i_2(x)$$

ist. Die Linearität von $M: D_2(K) \rightarrow Y(I)$ zeigt, dass die Transformation $f \rightarrow \theta_x(f)$ ebenfalls linear ist. Sei $a_k, b_k \in K$, $k=1, 2, 3$, und

$$m_f = [a_1, a_2, a_3; f], \quad M_f = [b_1, b_2, b_3; f].$$

Dann gibt es zu jedem $x \in K$ ein Tripel (r_{1x}, r_{2x}, r_{3x}) aus K^3 mit

$$\theta_x(f) = [r_{1x}, r_{2x}, r_{3x}; f]$$

(s. T. Popoviciu [22], S. 8).

KOROLLAR 1.10. Für jedes $n=1, 2, \dots$ sei $L_n: C(K) \rightarrow C(K)$ ein beschränkter linearer Operator, der linearen Funktionen invariant lässt. Dann gilt:

1. Für jedes $n=1, 2, \dots$, ist L_n positiv.
2. Das Restglied $f - L_n f$ ist nicht positiv für jede nicht-konkave Funktion f ;
3. Die Ordnung des Approximationsprozesses bzgl. $D_2(K)$ ist die Ordnung bzgl. $e_2(t) = t^2$.

Beweis. Die erste Behauptung ist eine Folgerung aus Satz 1.3., die zweite folgt aus dem Korollar 1.7, die letzte folgt aus der Tatsache, dass zu jedem $g \in D_2(K)$ ein $\theta_g \in [m_g, M_g]$ existiert mit

$$\|g - L_n g\| = \theta_g \cdot \|e_2 - L_n e_2\|, \quad n=1, 2, \dots$$

Diese letzte Gleichung folgt unmittelbar aus Korollar 1.9, mit $i_0 = e_0, i_1 = e_1, i_2 = L_n e_2 - e_2$.

5. Obige Sätze können auf die folgenden bekannten Spezialfälle angewandt werden:

*) mit $\|L_n\| = 1$

a) Bernstein-Operatoren.

b) Meyer-König und Zeller Operatoren $M_n: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$
 $n=1,2,\dots$, definiert durch (siehe [17] und [5])

$$(M_n f)(x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+k}\right)$$

$$(x \in [0,1], f \in C[0,1], (M_n f)(1) := f(1))$$

c) Szász-Mirakjan Operatoren $S_n: M[0,+\infty) \longrightarrow M[0,+\infty)$,
 $n=1,2,\dots$, wobei

$$(S_n f)(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$(x \in [0,+\infty); f \in M[0,+\infty)) .$$

Wir bemerken, dass die obigen Operatoren auch auf allgemeineren Räumen definiert werden können. Ebenso können diese Ergebnisse zum Teil auf die von M.W.Müller [19] eingeführten Gamma-Operatoren angewandt werden.

III. DIE BETAOPERATOREN

1 Von einer eindimensionalen, stetigen Zufallsvariablen X auf dem Intervall $(0,1)$ sagt man, sie besitze eine Beta-Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den positiven Parametern p und q , wenn die Frequenzfunktion definiert ist durch

$$b_{p,q}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\infty, 0] \\ \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}}{B(p,q)} & \text{für } x \in (0,1) \\ 0 & \text{für } x \in [1,+\infty) . \end{cases}$$

Ist $\mu := E(X)$ der Erwartungswert und $\sigma^2 := E\{(X-\mu)^2\}$ die Varianz von X , dann weist man leicht nach, dass gilt

$$\mu = \frac{p}{p+q} \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} .$$

Wir definieren die Beta-Kerne $\beta_n: K \times K \longrightarrow [0,+\infty)$, $n=1,2,\dots$,
 $K := [0,1]$, durch

$$(2.1) \quad \beta_n(t,x) = b_{\bar{p},\bar{q}}(t) \quad ; \quad \bar{p} = \bar{p}(n,x) := nx+1; \quad \bar{q} = \bar{q}(n,x) := n+1-nx .$$

Es sei nun $f \in C(K)$ und $\bar{X}_n$ eine Zufallsvariable mit der Verteilung definiert nach (2.1). Wir fragen: Wie verhält sich die Differenz

$$f(E(\bar{X}_n)) - E(f(\bar{X}_n)) = f\left(\frac{nx+1}{n+2}\right) - \int_0^1 \beta_n(t,x) f(t) dt$$

für $n \rightarrow +\infty$? Da f stetig ist, handelt es sich im wesentlichen um die Untersuchung der Differenz

$$f(x) - \int_0^1 \beta_n(t,x) f(t) dt .$$

Allgemein studieren wir in diesem Kapitel die auf gewissen Funktionenräumen definierte lineare Transformation

$$f \longrightarrow \int_0^1 \beta(t, \cdot) f(t) dt$$

Dazu schicken wir einige Hilfsmittel voraus.

2. Im folgenden gebrauchen wir die Bezeichnungen

$$(a)_0 = 1, (a)_n := a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), \quad n \geq 1.$$

$F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z)$ ist die hypergeometrische Reihe mit der Variablen z und den Parametern a, b, c , d.h. es ist

$$F(a, b; c; z) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} & \text{für } c \neq -n, \\ z^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+n+1)_k (b+n+1)_k}{(n+2)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} & \text{für } c = -n, \end{cases}$$

wobei $n=0, 1, 2, \dots$. Diese Reihen sind für $|z| < 1$ absolut konvergent.

HILFSSATZ 2.1. Für $\beta \in (0, 1], (p, q) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, $x \in (-1, 1)$ gilt

$$(2.2) \quad \int_0^\beta b_{p,q}(t) dt = \frac{\beta^p}{pB(p, q)} F(p, 1-q; p+1; \beta)$$

$$(2.3) \quad cF(a, b-1; c; x) = cF(a-1, b; c; x) - x(a-b)F(a, b; c+1; x)$$

$$(2.4) \quad F(a, b; c; x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; x).$$

Diese Formeln sind in [7], S.87, S.58 bzw. S.64 bewiesen.

SATZ 2.2. Ist $(p, q) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ und $\lambda \in \overset{\circ}{K} := (0, 1)$, dann gilt

$$(2.5) \quad \int_0^1 b_{p,q}(t) |t-\lambda| dt = (\mu - \lambda) + \frac{2\lambda^a (1-\lambda)}{p} b_{p,q}(\lambda) \left[1 - \frac{p+q}{p+1} (\mu - \lambda) F(1, p+q+1; p+2; \lambda) \right]$$

wobei $\mu = \frac{p}{p+q}$.

Beweis. Offensichtlich ist

$$I := \int_0^1 b_{p,q}(t) |t-\lambda| dt =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^\lambda b_{p,q}(t) (\lambda - t) dt - \int_0^1 b_{p,q}(t) (\lambda - t) dt = \\ &= 2\lambda \int_0^\lambda b_{p,q}(t) dt - 2\mu \int_0^\lambda b_{p+1,q}(t) dt + (\mu - \lambda). \end{aligned}$$

Mit (2.2)-(2.4) erhält man

$$\begin{aligned} I &= (\mu - \lambda) + \frac{2\lambda^{p+1}}{pB(p, q)} \left[F(p, 1-q; p+1; \lambda) - \frac{p}{p+1} F(p+1, 1-q; p+2; \lambda) \right] = \\ &= (\mu - \lambda) + \frac{2\lambda^{p+1}}{pB(p, q)} \left[F(p+1, -q; p+1; \lambda) - \frac{p+q}{p+1} (\mu - \lambda) F(p+1, 1-q; p+2; \lambda) \right] = \\ &= (\mu - \lambda) + \frac{2\lambda^{p+1} (1-\lambda)^q}{pB(p, q)} \left[F(0, p+q+1; p+1; \lambda) - \frac{p+q}{p+1} (\mu - \lambda) F(1, p+q+1; p+2; \lambda) \right] = \\ &= (\mu - \lambda) + \frac{2\lambda^2 (1-\lambda)}{p} b_{p,q}(\lambda) \left[1 - \frac{p+q}{p+1} (\mu - \lambda) F(1, p+q+1; p+2; \lambda) \right], \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist.

Man beachte, dass im Fall $\lambda = \mu$ die Gleichung (2.5) übergeht in

$$E(|X-\mu|) = \frac{2}{p+q} \mu(1-\mu) b_{p,q}(\mu),$$

wo X eine Zufallsvariable mit Beta-Verteilung ist. Gleichungen dieser Art für gewisse diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen waren in letzter Zeit Gegenstand verschiedener Untersuchungen. Einen zusammenfassenden Überblick findet man in [10].

SATZ 2.3. Für $y \in \mathbb{K}$ und $\delta > 0$, gilt

$$(2.6) \quad \int_{|t-y| \geq \delta} b_{p,q}(t) |t-y| dt = (\mu - y) + \\ + \frac{y}{p} \left[\varepsilon_1(1-\varepsilon_1)b_{p,q}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2(1-\varepsilon_2)b_{p,q}(\varepsilon_2) \right] + \\ + \left[\varepsilon_1^2(1-\varepsilon_1)F(\varepsilon_1)b_{p,q}(\varepsilon_1) + \varepsilon_2^2(1-\varepsilon_2)F(\varepsilon_2)b_{p,q}(\varepsilon_2) \right] \frac{y-\mu}{\mu(p+1)},$$

wobei

$$\varepsilon_1 = \max(0, y-\delta), \quad \varepsilon_2 = \min(1, y+\delta) \\ F(z) = F(1, p+q+1; p+2; z), \quad \mu = \frac{p}{p+q}$$

Beweis. Mit

$$i(w) := \int_0^w b_{p,q}(t)(y-t)dt \\ J := \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} b_{p,q}(t) |t-y| dt$$

erhalten wir

$$(2.7) \quad \int_{|t-y| \geq \delta} b_{p,q}(t) |t-y| dt = \int_0^1 b_{p,q}(t) |t-y| dt - J$$

und weiter

$$\int_0^1 b_{p,q}(t) |t-y| dt = 2i(y) - i(1), \\ J = \int_{\varepsilon_1}^y b_{p,q}(t)(y-t)dt - \int_y^{\varepsilon_2} b_{p,q}(t)(y-t)dt = \\ = 2i(y) - i(\varepsilon_1) - i(\varepsilon_2).$$

Wegen (2.7) ist

$$(2.8) \quad \int_{|t-y| \geq \delta} b_{p,q}(t) |t-y| dt = i(\varepsilon_1) + i(\varepsilon_2) - i(1).$$

Aus Hilfssatz 2.1 folgt

$$i(1) = y - \mu,$$

und für $w \in \mathbb{K}$

$$i(w) = y \int_0^w b_{p,q}(t) dt - \mu \int_0^w b_{p+1,q}(t) dt = \\ = \frac{w^p y}{pB(p,q)} \left[F(p, 1-q; p+1; w) - \frac{wp}{(p+1)y} F(p+1, 1-q; p+2; w) \right] = \\ = \frac{w(1-w)y}{p} b_{p,q}(w) \left[F(1, p+q; p+1; w) - \frac{wp}{(p+1)y} F(1, p+q+1; p+2; w) \right] = \\ = \frac{w(1-w)y}{p} b_{p,q}(w) + \frac{w^2(1-w)(y-\mu)}{\mu(p+1)} F(w) b_{p,q}(w).$$

Zusammen mit (2.8) folgt daraus die Behauptung.

Formel (2.6) ist nützlich in der Statistik, da sich die Wahrscheinlichkeit $P(|X-y| \geq \delta)$ in expliziter Form allein unter Verwendung des Mittelwertes, der Dichtefunktion und der gegebenen Parameter y, δ darstellen lässt. Man erkennt, dass die Formel (2.6) für diese Wahrscheinlichkeit sehr einfach wird, wenn y mit dem Mittel μ übereinstimmt.

SATZ 2.4. Ist $(x, \theta) \in (0, +\infty) \times \mathbb{K}$, dann gilt

$$(2.9) \quad \left[(x+1)(x+\theta) \right]^{\frac{\theta-1}{2}} \sqrt{\frac{x+1}{x+\theta}} \leq \frac{F(x+\theta)}{F(x+1)} \leq \left[x(x+\theta) \right]^{\frac{\theta-1}{2}}.$$

Beweis. Für $\theta=0$ oder $\theta=0$ hat man Gleichheit. Es sei nun $\theta \in \mathbb{K}$. Bekanntlich ist

$$\text{sign} \left\{ \frac{d^j}{dx^j} (\ln \Gamma(x)) \right\} = (-1)^j, \quad j=2,3,\dots,$$

(siehe E. Artin [4]). Mit $j=3$ und $F(x) := \ln \Gamma(x)$ erhalten wir

$$F^{(3)}(x) < 0, \quad x \in (0, +\infty).$$

Diese Ungleichung liefert uns

$$(2.10) \quad [x_1, x_2, x_3, x_4; F] < 0,$$

wo $[x_1, x_2, x_3, x_4; F]$ die dividierte Differenz der Ordnung 3

auf den Punkten $x_j, x_j \in (0, +\infty), j=1,2,3,4$, ist.

Setzen wir in (2.10) nun

$$x_1 = x, \quad x_2 = x+\theta, \quad x_3 = x+1, \quad x_4 = x+1+\theta,$$

so bekommen wir

$$\frac{\Gamma(x+\theta)}{\Gamma(x+1)} < [x(x+\theta)]^{\frac{\theta-1}{2}}$$

für jeden Punkt (x, θ) aus $(0, +\infty) \times \overset{\circ}{K}$, und daher ist

$$\frac{\Gamma(t+s)}{\Gamma(t+1)} < [t(t+s)]^{\frac{s-1}{2}}, \quad (t, s) \in (0, +\infty) \times \overset{\circ}{K}.$$

Für $t := x+1-s, \theta := 1-s$ erhalten wir daraus

$$\frac{\Gamma(x+1)}{(x+\theta)\Gamma(x+\theta)} < [(x+\theta)(x+1)]^{-\frac{\theta}{2}},$$

womit auch die linke Seite der Ungleichung (2.9) bewiesen ist.

Die Ungleichung (2.9) ist eine Verbesserung der Resultate von W. Gautschi [9] bzw. B. Raja Rao [25], welche besagen

$$(n+1)^{\theta-1} \leq \frac{\Gamma(n+\theta)}{\Gamma(n+1)} \leq n^{\theta-1}, \quad n=1,2,\dots; \theta \in K,$$

bzw.

$$(2.9') \quad (x+\theta)^{\theta-1} \leq \frac{\Gamma(x+\theta)}{\Gamma(x+1)} \leq x^{\theta-1}, \quad x \in (0, +\infty); \theta \in K.$$

3. Wir untersuchen nun die Approximationseigenschaften gewisser Folgen von linearen positiven Operatoren, deren Kerne die Beta-Kerne (2.1) sind. Neben den Räumen $C(K), L^p(K), M(K)$ -d.h. Raum der beschränkten Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, $R(K)$ -d.h. Raum der reellwertigen Riemann-integrierbaren Funktionen -, betrachten wir den folgenden Raum $W(p, r)$. Es sei (p, r) ein fester Punkt in $(0, 1) \times (0, 1)$ und

$$(2.11) \quad w(t) := t^p(1-t)^r, \quad t \in K,$$

dann bezeichne $W(p, r)$ die Menge der Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt

$$|f(t)| \leq \frac{M_f}{w(t)}, \quad t \in \overset{\circ}{K},$$

mit einer gewissen Konstanten M_f . Auf dem Raum $W(p, r)$ definieren wir die Halbnorm

$$\|f\|_w = \sup_{t \in \overset{\circ}{K}} |w(t)f(t)|, \quad f \in W(p, r).$$

DEFINITION. Unter dem n-ten Betaoperator verstehen wir die Abbildung $f \rightarrow B_n f$ mit

$$\begin{aligned} (B_n f)(x) &:= \int_0^1 \beta_n(t, x) f(t) dt = \\ &= \frac{1}{B(nx+1, n+1-nx)} \int_0^1 t^{nx}(1-t)^{n(1-x)} f(t) dt, \quad x \in K, \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass für jedes $x \in K$, $f(\cdot) \beta_n(\cdot, x)$ aus $R(K)$ ist.

HILFSSATZ 2.5. Die Funktionen $b_n: K \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$b_n(x) = \frac{B(nx+1-p, n-nx+1-r)}{B(nx+1, n+1-nx)}, \quad x \in K; n=1,2,\dots,$$

gehören zum Raum $W(p, r)$, genauer gilt

$$(2.12) \quad \frac{e^{-\frac{1}{4nx(1-x)}}}{w(x)} < b_n(x) < \frac{e^{\frac{4}{3n}}}{w(x)}, \quad x \in \overset{\circ}{K}; n=1,2,\dots$$

wobei w durch (2.11) definiert ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass für $n=1,2,\dots$

$$(2.13) \quad n^{p+r} < \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+2-p-r)} < e^{\frac{4}{3n}} \cdot n^{p+r}$$

gilt. Dazu verwenden wir (2.9') und die Ungleichungen

$$(2.14) \quad e^{\frac{ab}{c+\frac{b}{2}}} < (1+\frac{b}{c})^a < e^{\frac{ab}{c}}, \quad a,b,c \in (0, \infty)$$

(zum Beweis von (2.14) siehe z.B.D.S.Mitrinović [18], S.267).

Weiter haben wir

$$\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+2-p-r)} = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+1+1-p)} \cdot \frac{\Gamma(n+1-p+1)}{\Gamma(n+1-p+1-r)} > \\ > (n+1)^{p(n+1-p)^r} > n^{p+r}.$$

Analog gilt

$$\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+2-p-r)} < (n+2-p)^{p(n+2-p-r)^r} = n^{p+r} \left(1+\frac{2-p}{n}\right)^{p \left(1+\frac{2-p-r}{n}\right)^r} < \\ < n^{p+r} \cdot e^{\frac{(2-p)p+(2-p-r)r}{n}} < n^{p+r} \cdot e^{\frac{4(2-p)p+(2-p)^2}{4n}} < \\ < n^{p+r} \cdot e^{\frac{4}{3n}}$$

woraus (2.13) folgt. Weiter ist nun

$$b_n(x) = \frac{\Gamma(nx+1-p)}{\Gamma(nx+1)} \cdot \frac{\Gamma(n-nx+1-r)}{\Gamma(n-nx+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+2-p-r)} < \\ < (nx)^{-p(n-nx)^{-r}} \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+2-p-r)}$$

und wegen (2.13)

$$b_n(x) < \frac{e^{\frac{4}{3n}}}{w(x)}, \quad x \in \overset{\circ}{K}.$$

Andererseits folgt aus

$$b_n(x) > \frac{\Gamma(nx+1-p)}{\Gamma(nx+1)} \cdot \frac{\Gamma(n-nx+1-r)}{\Gamma(n-nx+1)} \cdot n^{p+r} >$$

$$> \frac{n^{p+r}}{(nx+1-p)^{p(n-nx+1-r)^r}} = \frac{1}{w(x) \left(1+\frac{1-p}{nx}\right)^p \left(1+\frac{1-r}{n-nx}\right)^r}$$

mit der rechten Seite von (2.14) die Abschätzung

$$b_n(x) > \frac{e^{-\frac{1}{4nx(1-x)}}}{w(x)}, \quad x \in \overset{\circ}{K}.$$

SATZ 2.6. Die Folge der Betaoperatoren stellt eine gleichmässig beschränkte Folge von Operatoren zwischen folgenden Räumen dar :

- a) $C(K) \longrightarrow C(K)$,
- b) $L^1(K) \longrightarrow L^1(K)$,
- c) $R(K) \longrightarrow C(K)$,
- d) $W(p,r) \longrightarrow W(p,r)$.

Beweis. Da die Beta-Kerne stetig auf $K \times K$ sind, gilt offensichtlich a)- c). Zum Nachweis der gleichmässigen Beschränktheit der Folge $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ benutzen wir für a), b) die Beziehung (siehe [12], S.108)

$$\|B_n\| = \max_{x \in K} \int_0^1 \beta_n(t,x) dt = 1, \quad n=1,2,\dots,$$

für c) die Beziehung

$$\|B_n\| = \max_{(t,x) \in K \times K^n} \beta(t,x) = 1, \quad n=1,2,\dots$$

Für den Fall $f \in W(p, r)$, d.h. wenn

$$|f(t)| \leq \frac{M_f}{w(t)}, \quad t \in \overset{\circ}{K},$$

ist, gilt

$$|(B_n f)(x)| \leq (B_n |f|)(x) \leq M_f \cdot \int_0^1 \frac{\beta_n(t, x)}{w(t)} dt =$$

$$= M_f \cdot b_n(x),$$

wobei b_n wie in Hilfssatz 2.5 definiert ist.

Daher folgt aus (2.12)

$$|(B_n f)(x)| < M_{B_n f} \cdot \frac{1}{w(x)}, \quad x \in \overset{\circ}{K},$$

mit

$$M_{B_n f} := M_f \cdot e^{\frac{4}{3n}}.$$

Zum Nachweis von $\|B_n\|_W \leq C < +\infty$, $n=1, 2, \dots$, benützen wir noch folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|B_n f\|_W &= \sup_{x \in \overset{\circ}{K}} \left| w(x) \int_0^1 \beta_n(t, x) w(t) f(t) \frac{dt}{w(t)} \right| \leq \\ &\leq \|f\|_W \cdot \sup_{x \in \overset{\circ}{K}} \left[w(x) \int_0^1 \frac{\beta_n(t, x)}{w(t)} dt \right] = \\ &= \|f\|_W \sup_{x \in \overset{\circ}{K}} [w(x) b_n(x)] < e^{\frac{4}{3n}} \cdot \|f\|_W, \end{aligned}$$

d.h. für $n \geq 3$ und $g \in W(p, r)$, $\|g\|_W \leq 1$,

haben wir

$$\|B_n g\|_W < 2, \quad n=3, 4, \dots,$$

und daher

$$\|B_n\|_W < 2, \quad n=3, 4, \dots$$

Wir bemerken, dass $e_0 \in W(p, r)$; allgemeiner gilt sogar mit $e_h(t) := t^h$, $h \geq 0$, die Ungleichung

$$|e_h(t)| \leq M_{e_h} \cdot \frac{1}{w(t)}, \quad t \in \overset{\circ}{K},$$

wo

$$M_{e_h} := \frac{(p+h)^{p+h} r^r}{(p+h+r)^{p+h+r}}.$$

SATZ 2.7 (Die Approximation von e_h). Für $h \geq 0$ sei $e_h(t) = t^h$, $t \in K$. Für $x \in K$, $x \neq 0$, gilt dann

$$(2.15) \quad e_h(x) \cdot \exp\left(-\frac{h(h+2)}{n}\right) \leq (B_n e_h)(x) \leq e_h(x) \cdot \exp\left(\frac{h(h+1)}{nx}\right)$$

$n=1, 2, \dots$

Zum Beweis benützen wir die Identität

$$(B_n e_h)(x) = \frac{B(nx+h+1, n+1-nx)}{B(nx+1, n+1-nx)} = \frac{\Gamma(nx+h+1)}{\Gamma(nx+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+h+2)}$$

und die Ungleichungen

$$(2.16) \quad (nx)^h \leq \frac{\Gamma(nx+h+1)}{\Gamma(nx+1)} \leq (nx)^h \cdot e^{\frac{h(h+1)}{nx}}$$

$$(2.17) \quad n^{-h} \cdot \exp\left(-\frac{h(h+2)}{n}\right) \leq \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+h+2)} \leq n^{-h} \cdot \exp\left(-\frac{h}{n+2}\right).$$

Da die Gammafunktion eine logarithmisch konvexe Funktion auf $(0, +\infty)$ ist, gilt

$$[\Gamma(b)]^{c-a} \leq [\Gamma(a)]^{c-b} \cdot [\Gamma(c)]^{b-a}$$

wo $0 < a \leq b \leq c < +\infty$. Setzen wir $a=nx$, $b=nx+1$, $c=nx+h+1$ so ergibt sich die linke Seite von (2.16); da Γ eine positive Funktion auf $(0, +\infty)$ ist, ist die Ungleichung auch für $x=0$ erfüllt. Mit $a=nx+1$, $b=nx+h+1$, $c=nx+h+2$, haben wir

$$(2.18) \quad \frac{\Gamma(nx+h+1)}{\Gamma(nx+1)} \leq (nx+h+1)^h.$$

Für $x \neq 0$ ist

$$\frac{\Gamma(nx+h+1)}{\Gamma(nx+1)} \leq (nx)^h \left(1 + \frac{h+1}{nx}\right)^h \leq (nx)^h \cdot \exp\left(\frac{h(h+1)}{nx}\right).$$

Wählen wir $a=n+2, b=n+h+2, c=n+h+3$, und dann $a=n+1, b=n+2, c=n+h+2$, so erhalten wir

$$(n+h+2)^{-h} \leq \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+h+2)} \leq (n+1)^{-h},$$

und aus (2.14) die Ungleichungen (2.17). Aus (2.16) und (2.17) folgt schliesslich (2.15).

Auf Grund von (2.18) gelten die Ungleichungen (2.15) auch für $x = 0$, nämlich

$$0 \leq (B_n e_h)(0) \leq \frac{(h+1)^h}{n^h}, \quad n=1, 2, \dots$$

Weitere Approximationseigenschaften der Funktionen $e_h (h > 2)$ liefert uns Satz 1.8. Durch einfache Rechnung erhalten wir für $\Delta(B_n)$, definiert nach (1.7),

$$0 < \Delta(B_n) = \frac{(nx+1)(n+1-nx)}{(n+2)^2(n+3)} \leq \frac{1}{4(n+3)}$$

so dass

$$0 \leq (B_n e_h)(x) - \left(\frac{nx+1}{n+2}\right)^h \leq \frac{h(h-1)}{8(n+3)}, \quad n=1, 2, \dots$$

Satz 2.8. Ist $b_{p,q}$ die Dichtefunktion der Betaverteilung, so gilt

$$b_{p,q}(t) < \frac{1}{t(1-t)} \sqrt{\frac{pq}{2\mathfrak{S}(p+q)}} e^{\frac{1}{12(p+q)}}, \quad t \in \overset{\circ}{K}.$$

Beweis. Nach den Stirlingschen Formel gibt es ein $\theta = \theta(x)$ mit $\theta \in (0, 1)$ derart, dass

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \frac{\theta}{12x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Für $t \in \overset{\circ}{K}$ gilt ferner

$$b_{p,q}(t) = \frac{1}{t(1-t)} \cdot \frac{t^p(1-t)^q}{B(p,q)} \leq \frac{1}{t(1-t)} \cdot \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}} \cdot \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} < \\ < \frac{1}{t(1-t)} \sqrt{\frac{pq}{2\mathfrak{S}(p+q)}} e^{\frac{1}{12(p+q)}}.$$

HILFSSATZ 2.9. Die folgende Ungleichung gilt:

$$(2.19) \quad \int_0^1 b_{p,q}(t) \left|t - \frac{p}{p+q}\right| dt < \frac{1}{p+q} \sqrt{\frac{2pq}{\mathfrak{S}(p+q)}} e^{\frac{1}{12(p+q)}}.$$

Beweis. Wegen Satz 2.2 ist

$$\int_0^1 b_{p,q}(t) \left|t - \frac{p}{p+q}\right| dt = \frac{2}{p+q} \cdot \frac{p}{p+q} \left(1 - \frac{p}{p+q}\right) b_{p,q}\left(\frac{p}{p+q}\right),$$

woraus mit Hilfssatz 2.8 die Ungleichung (2.19) folgt.

HILFSSATZ 2.10. Für jedes $n=1, 2, \dots$, und $x \in K$ gilt

$$(2.20) \quad \int_0^1 \beta_n(t, x) |t-x| dt < \frac{|1-2x|}{n+2} + \frac{-\frac{4}{9}}{\sqrt{\mathfrak{S}(n+2)}}.$$

Beweis. Aus (2.5) mit $\lambda = \mu = \frac{nx+1}{n+2}$ erhalten wir

$$\beta_n(t, x) \left|t - \frac{nx+1}{n+2}\right| dt = \frac{2(nx+1)(n+1-nx)}{(n+2)^3} \beta_n\left(\frac{nx+1}{n+2}, x\right),$$

und aus (2.19)

$$\int_0^1 \beta_n(t, x) \left|t - \frac{nx+1}{n+2}\right| dt \leq \frac{1}{n+2} \sqrt{\frac{2(nx+1)(n+1-nx)}{\mathfrak{S}(n+2)}} e^{\frac{1}{12(n+2)}} < \\ < \frac{1}{\sqrt{2\mathfrak{S}(n+2)}} e^{\frac{1}{12(n+2)}} < \frac{-\frac{4}{9}}{\sqrt{\mathfrak{S}(n+2)}}.$$

Aus

$$|t - x| \leq \left| t - \frac{nx+1}{n+2} \right| + \left| \frac{nx+1}{n+2} - x \right|$$

folgt dann schliesslich

$$\int_0^1 \beta_n(t, x) |t-x| dt \leq \frac{2^{-\frac{4}{9}}}{\sqrt[9]{3(n+2)}} + \frac{|1-2x|}{n+2}$$

Für beliebiges $x \in K$ und $\delta > 0$ sei

$$I_{1,x} := \{t; t \in K, |t-x| < \delta\}$$

$$I_{2,x} := K \setminus I_{1,x}$$

Da

$$\int_{I_{1,x}} \beta_n(t, x) |t-x| dt + \int_{I_{2,x}} \beta_n(t, x) |t-x| dt = \int_0^1 \beta_n(t, x) |t-x| dt$$

ist, gelten auch die Ungleichungen

$$\int_{I_{j,x}} \beta_n(t, x) |t-x| dt < \frac{|1-2x|}{n+2} + \frac{2^{-\frac{4}{9}}}{\sqrt[9]{3(n+2)}}, \quad j=1, 2.$$

SATZ 2.11. Sei $e_k(t) = t^k, k=0, 1, \dots$, und $\Omega_j(t, x) = |t-x|^j, j=1, 2, \dots$, dann gelten auf dem Intervall K folgende Gleichungen

$$(B_n e_0)(x) = e_0(x)$$

$$(B_n e_1)(x) = e_1(x) + \frac{1-2x}{n+2}$$

$$(B_n e_2)(x) = e_2(x) + \frac{2(1-2x)(1-x)}{n+2} + \frac{(2-3x)(3x-1)}{n+3}$$

$$(B_n e_3)(x) = e_3(x) + \frac{(1-x)(1-2x)(3-x)}{n+2} + \frac{3(1-x)(2-3x)(3x-1)}{n+3} + \frac{2(3-4x)(2x-1)(4x-1)}{n+4}$$

$$(B_n e_4)(x) = e_4(x) + \frac{2(1-x)(1-2x)(3-x)(2-x)}{3(n+2)} + \frac{3(1-x)(2-3x)(3x-1)(4-3x)}{2(n+3)} + \frac{8(3-4x)(2x-1)(4x-1)(1-x)}{n+4}$$

$$+ \frac{-455x^3 + 710x^2 - 343x + 48}{n+5}$$

$$(B_n \Omega_1)(x) = \text{siehe (2.6)}$$

$$(B_n \Omega_2)(x) = \frac{-x^2(n-6) + x(n-6) + 2}{(n+2)(n+3)} \leq \frac{1}{4(n+3)}$$

$$(B_n \Omega_4)(x) = \frac{(3n^2 - 86n + 120)Y^2 + (26n - 120)Y + 24}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)} <$$

$$< \frac{3}{16n^2} - \frac{1}{n^3} \quad (n > 27),$$

wobei

$$Y := x(1-x).$$

SATZ 2.12. Die Folge der Betaoperatoren, betrachtet als Abbildungen $C(K) \rightarrow C(K)$ oder $L^1(K) \rightarrow L^1(K)$, konvergiert punktweise gegen den Identitätsoperator $C(K) \rightarrow C(K)$ bzw. $L^1(K) \rightarrow L^1(K)$.

Beweis. Gemäss dem Konvergenzsatz von Korovkin [14] ist der Fall $C(K) \rightarrow C(K)$ klar wegen der punktweisen Konvergenz auf dem Teilraum $\langle e_0, e_1, e_2 \rangle$. Man erhält dieses Resultat auch aus Satz 2.11 oder Satz 2.7. Die Behauptung unseres Satzes ist auch für die Operatoren $B_n: L^1(K) \rightarrow L^1(K), n=1, 2, \dots$, gültig, wie sich aus dem zum Korovkinschen analogen Konvergenzsatz von V.K.Dzjadyk [6] ergibt.

HILFSSATZ 2.13. Es sei w definiert wie in (2.11). Dann gilt für jedes $x \in K$ und $n > 6$ die Ungleichung

$$(2.21) \quad \int_0^1 \frac{\beta_n(t, x)}{w(t)} |t-x| dt < \frac{1}{w(x)} \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt[9]{3n}} \right).$$

Beweis. Nehmen wir im Satz 2.9 $nx+1-p$ anstatt p und $n+1-r-nx$ anstatt q , so bekommen wir

$$V := \int_0^1 \left| \frac{\beta_n(t,x)}{w(t)} \right| \left| t - \frac{nx+1-p}{n+2-p-r} \right| dt < \\ < \frac{b_n(x)}{n+2-p-r} \sqrt{\frac{2(nx+1-p)(n+1-r-nx)}{\mathfrak{B}(n+2-p-r)}} e^{\frac{1}{12(n+2-p-r)}},$$

wobei b_n nach Hilfssatz 2.5 definiert ist. Aus (2.12) folgt weiter

$$V < \frac{1}{w(x)\sqrt{2\mathfrak{B}n}} e^{\frac{17}{12n}} < \frac{1}{w(x)\sqrt{\mathfrak{B}n}}.$$

Wegen

$$|t-x| \leq \left| t - \frac{nx+1-p}{n+2-p-r} \right| + \left| \frac{1-p-x(2-p-r)}{n+2-p-r} \right| \leq \\ \leq \left| t - \frac{nx+1-p}{n+2-p-r} \right| + \frac{1}{n}$$

erhalten wir

$$\int_0^1 \left| \frac{\beta_n(t,x)}{w(t)} \right| |t-x| dt < V + \frac{1}{n} b_n(x) < \frac{1}{w(x)\sqrt{\mathfrak{B}n}} + \frac{2}{nw(x)}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

SATZ 2.14. Sei $B_n: W(p,r) \rightarrow W(p,r), n=1,2,\dots$. Dann gilt für jede Funktion $f \in W(p,r)$, für die alle Punkte des festen Intervalls $[x_1, x_2]$ ($0 < x_1 \leq x_2 < 1$) zweiseitige Stetigkeitspunkte sind

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n f\|_{w, [x_1, x_2]} = 0,$$

wo

$$\|g\|_{w, [x_1, x_2]} := \sup_{[x_1, x_2]} w|g|, \quad g \in W(p,r).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein von $x \in [x_1, x_2]$ unabhängiges $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1)$ derart, dass

$$|f(t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\|w\|} \quad \text{für } |t-x| \leq \delta,$$

wobei

$$\|w\| = \frac{p^p r^r}{(p+r)^{p+r}} > 0.$$

Weil f aus $W(p,r)$, d.h. $|f(t)| \leq \frac{M_f}{w(t)}, t \in \overset{\circ}{K}$, ist, gilt für $|t-x| > \delta$

$$|f(t) - f(x)| < \frac{M_f}{\delta} \left[\frac{|t-x|}{w(t)} + \frac{|t-x|}{w(x)} \right],$$

so dass für $(t,x) \in \overset{\circ}{K} \times \overset{\circ}{K}$ gilt

$$|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\|w\|} + \frac{M_f}{\delta} \left[\frac{|t-x|}{w(t)} + \frac{|t-x|}{w(x)} \right].$$

Aufgrund der Positivität des Betaoperators und der Tatsache, dass $e_0 \in W(p,r)$, $B_n e_0 = e_0$ ist, haben wir

$$w(x) |f(x) - (B_n f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M_f}{\delta} w(x) \int_0^1 \left| \frac{\beta_n(t,x)}{w(t)} \right| |t-x| dt + \\ + \frac{M_f}{\delta} \int_0^1 \beta_n(t,x) |t-x| dt.$$

Mit (2.20) und (2.21) für $n \geq n_0 := 1 + [\delta^{-4}]$ erhalten wir

$$w(x) |f(x) - (B_n f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4}{\sqrt{n}}, \quad x \in [x_1, x_2].$$

Deshalb ist für $n \geq n_1(\varepsilon) := \max(n_0, 1 + [\frac{2^{12}}{\varepsilon^4}])$

$$\|f(x) - (B_n f)(x)\|_{w, [x_1, x_2]} \leq \varepsilon,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Wegen $w(x) > 0, x \in \overset{\circ}{K}$, und $w \in C[x_1, x_2]$ liefern die obigen Ungleichungen

$$\max_{[x_1, x_2]} |f(x) - (B_n f)(x)| < \varepsilon_0 \quad \text{für } n \geq n_1,$$

$$\text{wo } \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{m}, \quad 0 < m \leq \min_{[x_1, x_2]} w(x).$$

KOROLLAR 2.15. Sei $B_n: W(p, r) \rightarrow W(p, r), n=1, 2, \dots$. Dann gilt für jede Funktion $f \in W(p, r)$, für die alle Punkte des festen Intervalls $[x_1, x_2]$ ($0 < x_1 \leq x_2 < 1$) zweiseitige Stetigkeitspunkte sind

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{[x_1, x_2]} |f(x) - (B_n f)(x)| = 0.$$

4. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein. Sei J ein Intervall und s eine natürliche Zahl, dann bezeichne $\mathcal{K}_s^+(J)$ den Raum der reellwertigen Funktionen, die nicht-konkav der Ordnung s auf J sind. Ebenso sagen wir, dass $f \in \mathcal{K}_s^-(J)$ ist, genau dann wenn $-f \in \mathcal{K}_s^+(J)$. Dabei nennt man $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-konkav der Ordnung s , wenn für jedes System von $s+2$ Knoten $x_0, x_1, \dots, x_{s+1}$ aus J die dividierten Differenzen der Ordnung $s+1$ nichtnegativ sind, d.h. wenn

$$[x_0, x_1, \dots, x_{s+1}; f] \geq 0$$

ist. Im weiteren setzen wir zusätzlich voraus, dass $\mathcal{K}_s^+(J) \subset C(J)$ für $x \in K$ ein Punkt $y_{x,n}$, $y_{x,n} \in K$, so dass

Der folgende Satz liefert uns einige Eigenschaften der Betaoperatoren auf dem Raum $\mathcal{K}_1^+$.

SATZ 2.16. Für $f \in \mathcal{K}_1^+(K)$ gilt

$$(2.22) \quad f(x) + \frac{1-2x}{n+2} \leq (B_n f)(x), \quad x \in K.$$

Beweis. Nach Satz 1.6 ist

$$f[(B_n e_1)(x)] \leq (B_n f)(x), \quad x \in K,$$

und nach Satz 2.11

$$(B_n e_1)(x) = x + \frac{1-2x}{n+2}, \quad x \in K.$$

Der im folgenden Satz vorkommende Raum $D_2(K)$ wurde auf S.26 definiert.

SATZ 2.17 (Darstellung der Restriktionen von B_n auf dem Raum $D_2(K)$). Für jedes $x, x \in K$, gibt es ein lineares Funktional $\theta_{x,n}: D_2(K) \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass für jedes $f \in D_2(K)$ mit $m_f \leq [x_1, x_2, x_3; f] \leq M_f$, $x_j \in K$, gilt

$$a) \quad (B_n f)(x) = f\left(\frac{nx+1}{n+2}\right) + \theta_{x,n}(f) j_n(x), \quad n=1, 2, \dots,$$

wobei

$$j_n(x) := \frac{2(1-2x)^2}{n+2} - \frac{(1-2x)^2}{(n+2)^2} + \frac{(2-3x)(3x-1)}{n+3}, \quad x \in K.$$

$$b) \quad m_f \leq \theta_{x,n}(f) \leq M_f, \quad n=1, 2, \dots$$

Beweis. Benutzen wir die Formeln von Satz 2.11, so erkennt man, dass $B_n \in \mathcal{M}_2(j'_0, j'_1, j'_2)$, wo

$$j'_0(x) = 1, \quad j'_1(x) = \frac{nx+1}{n+2}, \quad j'_2(x) = j_n(x), \quad x \in K.$$

Daraus folgt aber mit Folgerung 1.9 die obige Darstellung.

KOROLLAR 2.17'. Sei $f \in C^{(2)}(K)$. Dann gibt es zu jedem

$$(2.23) \quad (B_n f)(x) - f\left(\frac{nx+1}{n+2}\right) = \frac{x(1-x)}{2n} f''(y_{x,n}) + z_n(x), \quad x \in K,$$

wobei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n z_n(x) = 0, \quad x \in K.$$

5. In diesem Paragraphen wollen wir einige asymptotische Formeln aufstellen. Es ist bekannt, dass das asymptotische Verhalten einer Folge linearer positiver Operatoren durch Eigenschaften auf einem gewissen Teilraum, nämlich dem Teilraum

der Polynome, bestimmt ist. Die Ergebnisse die unten erzielt werden, gehen aus von Arbeiten von P.P.Korovkin [14], R.G.Mamedov [16], M.W.Müller [20], M.W.Müller und H.Walk [21], F.Schurer [28] und H.Walk [30].

Wir benützen die folgenden Familien von Funktionen. Für eine natürliche Zahl k , x beliebig aus K , $\delta \in (0,1)$, definieren wir die folgenden Funktionen für $t \in K$:

$$(2.24) \quad \left[\begin{aligned} Q_k(t,x) &= (t-x)^k, \quad \Omega_k(t,x) = |Q_k(t,x)| \\ \lambda_\delta(t,x) &= \begin{cases} 1 & \text{für } |t-x| \geq \delta \\ 0 & \text{für } |t-x| < \delta \end{cases} \\ \text{Wenn } f \in W(p,r) \text{ und } f^{(2m-1)}(x), f^{(2m)}(x) \text{ existieren} \\ \text{dann sei} \\ (Tf)(t,x) &:= f(t) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} Q_k(t,x) - \\ &\quad - \left[\frac{f^{(2m)}(x) - f^{(2m)}(x)}{2} \right] \frac{\Omega_{2m-1}(t,x)}{(2m)!} \\ \text{Wenn } f \in W(p,r) \text{ und } f^{(2m)}(x), f^{(2m+1)}(x) \text{ existieren} \\ \text{dann sei} \\ (Zf)(t,x) &:= f(t) - \sum_{k=0}^{2m} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} Q_k(t,x) - \\ &\quad - \left[\frac{f^{(2m+1)}(x) + f^{(2m+1)}(x)}{2} \right] \frac{Q_{2m+1}(t,x)}{(2m+1)!} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

DEFINITION. Ein linearer Operator $L: W(p,r) \rightarrow W(p,r)$ wird ein Integraloperator genannt, genau dann wenn:

1. $(Lf)(x) = \int_0^1 C(t,x) f(t) dt$ mit C stetig auf $K \times K$
2. $(Le_0)(x) = e_0(x)$, $x \in K$;
3. Für jedes $x \in K$ und $f \in W(p,r)$, $f(\cdot) \subset (\cdot, x)$ aus $R(K)$ ist.

Im folgenden Satz werden einige Eigenschaften des Raumes $W(p,r)$ ausgegeben.

HILFSSATZ 2.18. 1. Mit f, g aus $W(p,r)$ sind auch $|f|$, fg , $f \pm g$ aus $W(p,r)$.

2. Die Familien von Funktionen

$Q_k(\cdot, x)$, $\Omega_k(\cdot, x)$, $\lambda_\delta(\cdot, x)$, $(Tf)(\cdot, x)$, $(Zf)(\cdot, x)$, $x \in K$, definiert nach (2.24), gehören $W(p,r)$ an.

3. Sei $W_x: K \rightarrow [0, +\infty)$, $W_x(t) \in W(p,r)$, $t \in K$, eine Funktion, die nur für $t=x$ verschwindet, dann gibt es eine positive Konstante C_0 derart, dass für jeden positiven Integraloperator $L: W(p,r) \rightarrow W(p,r)$

$$(2.25) \quad (LW_x)(x) \geq C_0 (L \lambda_\delta)(x), \quad x \in K,$$

gilt, wobei λ_δ nach (2.24) definiert ist und w die Gewichtsfunktion ist, die den Raum $W(p,r)$ festlegt.

Beweis. Die erste Behauptung lässt sich einfach beweisen.

Zum Beweis der zweiten beachten wir, dass jede beschränkte Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ zu $W(p,r)$ gehört. Genauer: Ist $f \in M(K)$ und $|f| \leq M$, so gilt

$$|f(t)| \leq \frac{M_f}{w(t)}, \quad t \in K,$$

$$M_f := \frac{p^{p,r}}{(p+r)^{p+r}} M.$$

Da

$$w(t)W_x(t) \geq C_\delta \lambda_\delta(t,x), \quad C_\delta := \inf_{|t-x| \geq \delta} [w(t)W_x(t)],$$

d.h.

$$W_x(t) \geq C_\delta \frac{\lambda_\delta(t,x)}{w(t)}, \quad t \in K,$$

ist, erhalten wir nach Anwendung des Operators L die Abschätzung (2.25) mit $C_0 := C_\delta$.

HILFSSATZ 2.19. Es sei $F_{x_0} \in C(K)$ für ein $x_0 \in \overset{\circ}{K}$ gegeben mit der Eigenschaft

$$F_{x_0} \geq 0, F_{x_0}(t) = 0 \iff t = x_0,$$

und $L_n: W(p, r) \rightarrow W(p, r), n=1, 2, \dots, (L_n F_{x_0})(x_0) \neq 0$, eine Folge von positiven Integraloperatoren. Für $f \in W(p, r), f(x_0) = 0$, existiere

$$(2.26) \quad \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f(t)}{F_{x_0}(t)} =: A < +\infty.$$

Dann gilt:

I. f ist stetig in x_0 ;

II. Aus (2.26) folgt genau dann

$$(2.27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L_n f)(x_0)}{(L_n F_{x_0})(x_0)} = A,$$

wenn für jedes $\delta, \delta \in (0, 1)$,

$$(2.28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L_n \frac{\lambda_\delta}{w})(x_0)}{(L_n F_{x_0})(x_0)} = 0$$

ist.

Beweis. Ein ähnliches Resultat für den Raum der beschränkten Funktionen, erhielt P.P. Korovkin in seiner Monographie [1].

Es gelte (2.26); für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $\delta > 0$ derart, dass

$$(2.29) \quad (A - \varepsilon) F_{x_0}(t) < f(t) < (A + \varepsilon) F_{x_0}(t) \quad \text{für } |t - x_0| < \delta$$

ist. Setzen wir

$$M := \sup_{|t - x_0| \geq \delta} w(t) |f(t)|$$

und

$$m_\delta := \inf_{|t - x_0| \geq \delta} F_{x_0}(t) > 0$$

so gilt für $t \in \overset{\circ}{K}, |t - x_0| \geq \delta, \delta \in (0, 1)$,

$$(2.30) \quad -\frac{M}{m_\delta} F_{x_0}(t) \leq w(t)f(t) \leq \frac{M}{m_\delta} F_{x_0}(t).$$

(2.29) und (2.30) liefern uns die Ungleichung

$$|f(t)| \leq \frac{MF_{x_0}(t)}{m_\delta t^p (1-t)^r} + (A + \varepsilon) F_{x_0}(t), \quad t \in \overset{\circ}{K},$$

d.h. es gilt

$$\lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = f(x_0) = 0.$$

Wir nehmen an, dass (2.28) nicht erfüllt ist. Dann gibt es ein $\delta, \delta \in (0, 1)$, und eine Folge $(n_k)_{k=1}^\infty$ von natürlichen Zahlen derart, dass

$$(2.31) \quad \frac{(L_{n_k} \frac{\lambda_\delta}{w})(x_0)}{(L_{n_k} F_{x_0})(x_0)} \geq c > 0, \quad k=1, 2, \dots$$

Die Funktion g sei definiert durch $g := F_{x_0}^2$. Offensichtlich ist $g \in W(p, r)$. Aus Hilfssatz 2.18 folgt daher, dass es eine Konstante $C_1 > 0$ gibt mit

$$(L_{n_k} g)(x_0) \geq C_1 (L_{n_k} \frac{\lambda_\delta}{w})(x_0).$$

Wegen (2.31) zieht dies

$$\frac{(L_{n_k} g)(x_0)}{(L_{n_k} F_{x_0})(x_0)} \geq \frac{C}{C_1} > 0$$

nach sich, im Widerspruch zu

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \frac{g(t)}{F_{x_0}(t)} = \lim_{t \rightarrow x_0} F_{x_0}(t) = 0.$$

Aus (2.26) und (2.28) folgt: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ und eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ derart, dass

$$(A - \frac{\varepsilon}{2})F_{x_0}(t) < f(t) < (A + \frac{\varepsilon}{2})F_{x_0}(t) \quad \text{für } |t - x_0| < \delta$$

und

$$\left| \frac{(L_n \frac{\lambda_g}{w})(x_0)}{(L_n F_{x_0})(x_0)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M_f} \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Weiter haben wir

$$-M_f \frac{\lambda_g(t)}{w(t)} + (A - \frac{\varepsilon}{2})F_{x_0}(t) < f(t) < (A + \frac{\varepsilon}{2})F_{x_0}(t) + M_f \frac{\lambda_g(t)}{w(t)}, \quad t \in \overset{\circ}{K}$$

Daher folgt

$$-M_f \frac{(L_n \frac{\lambda_g}{w})(x_0)}{(L_n F_{x_0})(x_0)} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{(L_n f)(x_0)}{(L_n F_{x_0})(x_0)} - A < \frac{\varepsilon}{2} + M_f \frac{(L_n \frac{\lambda_g}{w})(x_0)}{(L_n F_{x_0})(x_0)}$$

so dass für $n \geq n_0$

$$\left| \frac{(L_n f)(x_0)}{(L_n F_{x_0})(x_0)} - A \right| < \varepsilon$$

ist. Im Beweis haben wir $\frac{\lambda_g}{w} \in W(p, r)$ benutzt, was aufgrund der Ungleichung

$$\left| \frac{\lambda_g(t, x_0)}{w(t)} \right| \leq \frac{1}{w(t)}, \quad t \in \overset{\circ}{K},$$

stets gilt.

Wir machen nun eine Bemerkung, die nützlich ist bei der Aufstellung von asymptotischen Formeln für die Approximation durch lineare positive Operatoren. Wir schicken dazu folgende Ungleichung voraus: Für jede natürliche Zahl s gilt

$$\frac{\lambda_g(t, x_0)}{w(t)} \leq \delta^{-s} \frac{\Omega_s(t, x_0)}{w(t)}, \quad t \in \overset{\circ}{K},$$

und daher

$$(2.32) \quad (L_n \frac{\lambda_g}{w})(x_0) \leq \delta^{-s} (L_n \frac{\Omega_s}{w})(x_0), \quad x_0 \in \overset{\circ}{K}.$$

HILFSSATZ 2.20. $L_n: W(p, r) \rightarrow W(p, r), n=1, 2, \dots$, besitze die gleichen Eigenschaften wie im Hilfssatz 2.19, und (m_1, m) , (m_2, m) seien zwei Paare natürlicher Zahlen mit $m_j \geq m+1, j=1, 2$. Dann sind folgende Beziehungen äquivalent:

$$(A) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L_n \frac{\lambda_g}{w})(x_0)}{(L_n \Omega_m)(x_0)} = 0$$

$$(B) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L_n \frac{\Omega_{m_1}}{w})(x_0)}{(L_n \Omega_m)(x_0)} = 0, \quad x_0 \in \overset{\circ}{K}, \quad \Omega_j(t, x_0) = |t - x_0|^j$$

$$(C) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L_n \frac{\Omega_{m_2}}{w})(x_0)}{(L_n \Omega_m)(x_0)} = 0.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass (A) äquivalent zu (B) ist.

Sei nun (A) erfüllt, dann erhalten wir (B) wegen

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \frac{\frac{\Omega_{m_1}(t, x_0)}{w(t)}}{\Omega_m(t, x_0)} = \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{\Omega_{m_1-m}(t, x_0)}{w(t)} = 0$$

und unter Anwendung von Hilfssatz 2.19. Sei nun umgekehrt (B) erfüllt; dann schliessen wir auf (A) mit (2.32), d.h.

$$0 \leq \frac{(L_n \frac{\lambda_g}{w})(x_0)}{(L_n \Omega_m)(x_0)} \leq \delta^{-m_1} \frac{(L_n \frac{\Omega_{m_1}}{w})(x_0)}{(L_n \Omega_m)(x_0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Bei praktischen Anwendungen wird man in (C) das Paar $(m+2, m)$ wählen. Die gleichen Untersuchungen können für Operatoren $L_n: M(K) \rightarrow M(K)$ oder $C(K) \rightarrow C(K)$ angestellt werden, wobei wir anstatt w eine positive Konstante zu schreiben haben.

SATZ 2.21. Sei $L_n: W(p, r) \rightarrow W(p, r), n=1, 2, \dots$, eine Folge positiver Integraloperatoren. Sind für $f, g \in W(p, r)$ die Transformationen T_f und T_g (siehe (2.24)) definiert, dann folgt

für $x_0 \in \overset{\circ}{K}$ aus

$$(2.33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L_n \frac{\Omega_{2m+2}}{w})(x_0)}{(L_n \Omega_{2m})(x_0)} = 0$$

die Beziehung

$$(2.34) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L_n T f)(x_0)}{(L_n T g)(x_0)} = \frac{f_+^{(2m)}(x_0) + f_-^{(2m)}(x_0)}{g_+^{(2m)}(x_0) + g_-^{(2m)}(x_0)}$$

Dabei setzen wir noch voraus, dass $f_+^{(2m)}(x_0) + f_-^{(2m)}(x_0) \neq 0$ ist, wenn $g_+^{(2m)}(x_0) + g_-^{(2m)}(x_0) = 0$ ist, in welchem Falle wir die rechte Seite von (2.34) je nach dem Vorzeichen des Zählers als $+\infty$ oder $-\infty$ auffassen.

Beweis. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{(T f)(t, x_0)}{\Omega_{2m}(t, x_0)} &= \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f^{(2m-1)}(t) - f^{(2m-1)}(x_0) - \frac{f_+^{(2m)}(x_0) - f_-^{(2m)}(x_0)}{2} (t - x_0)}{(2m)! (t - x_0)} \\ &= \frac{f_+^{(2m)}(x_0) + f_-^{(2m)}(x_0)}{2(2m)!} \end{aligned}$$

Hilfssatz 2.19 zusammen mit 2.20 liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L_n T f)(x_0)}{(L_n \Omega_{2m})(x_0)} = \frac{f_+^{(2m)}(x_0) + f_-^{(2m)}(x_0)}{2(2m)!},$$

so dass (2.34) erfüllt ist.

Für einen Funktionenraum mit anderer „Wachstumsbedingung“ hat diesen Satz R.G.Mamedov [16] aufgestellt.

Auf analoge Weise kann man beweisen:

SATZ 2.22. Sei $L_n: W(p, r) \rightarrow W(p, r), n=1, 2, \dots$, eine Folge von positiven Integraloperatoren. Für die Funktionen $f, g \in W(p, r)$ sei Zf, Zg definiert, dann folgt für $x_0 \in \overset{\circ}{K}$ aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L_n \frac{\Omega_{2m+2}}{w})(x_0)}{(L_n \Omega_{2m})(x_0)} = 0$$

die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(L_n Z f)(x_0)}{(L_n Z g)(x_0)} = \frac{f_+^{(2m+1)}(x_0) - f_-^{(2m+1)}(x_0)}{g_+^{(2m+1)}(x_0) - g_-^{(2m+1)}(x_0)},$$

vorausgesetzt, dass nicht zugleich $f_+^{(2m+1)}(x_0) = f_-^{(2m+1)}(x_0)$ und $g_+^{(2m+1)}(x_0) = g_-^{(2m+1)}(x_0)$ ist.

Wir wenden nun einige der obigen Resultate auf die Betaoperatoren $B_n: W(p, r) \rightarrow W(p, r), n=1, 2, \dots$, an. Dazu schicken wir folgenden Hilfssatz voraus.

HILFSSATZ 2.23. Es gibt eine von n unabhängige positive Zahl C so, dass

$$(2.35) \quad (B_n \frac{\Omega_4}{w})(x) \leq \frac{C}{w(x)n^2}, \quad x \in \overset{\circ}{K}.$$

Beweis. Mit b_n wie in Hilfssatz 2.5 gilt

$$(B_n \frac{\Omega_4}{w})(x) = \frac{b_n(x)}{B(nx+1-p, n+1-r-nx)} \int_0^1 t^{nx-p} (1-t)^{n(1-x)-r} (t-x)^4 dt,$$

woraus folgt

$$(2.36) \quad (B_n \frac{\Omega_4}{w})(x) \leq \frac{2}{w(x)} J_{n,x}, \quad n \geq 3, \quad x \in \overset{\circ}{K};$$

dabei ist

$$\begin{aligned} J_{n,x} &= \sum_{k=0}^4 (-1)^k \binom{4}{k} \frac{\Gamma(nx+1+k-p) \Gamma(n+2-p-r)}{\Gamma(nx+1-p) \Gamma(n+2+k-p-r)} x^{4-k} = \\ &= \frac{A_4 n^4 + A_3 n^3 + A_2 n^2 + \dots}{B_4 n^4 + B_3 n^3 + B_2 n^2 + \dots} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A_4 &= x^4 - 4x^4 + 6x^4 - 4x^4 + x^4 = 0 \\ A_3 &= 2(7-2p-2r)x^4 - 4x^3(1-p) - 12(4-p-r)x^4 + 6(3-2p)x^3 + \\ &\quad + 6(9-2p-2r)x^4 - 12x^3(2-p) - 4(5-r-p)x^4 + 2(5-2p)x^3 = 0 \end{aligned}$$

und $B_4=1$. Es gibt daher eine positive Konstante C derart, dass

$$J_{n,x} \leq \frac{C}{n^2}$$

ist, woraus mit (2.36) die Behauptung (2.35) folgt.

SATZ 2.24. Es sei $B_n:W(p,r) \rightarrow W(p,r)$, $n=1,2,\dots$; Für eine Funktion $f \in W(p,r)$ mit einer beschränkten Ableitung zweiter Ordnung auf $[x_1, x_2]$ ($0 < x_1 \leq x_2 < 1$) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [f(x) - (B_n f)(x)] = (2x-1)f'(x) - \frac{x(1-x)}{2} f''(x), \quad x \in [x_1, x_2]$$

Beweis. Für $m=1$, $g(t) = \Omega_2(t, x)$ (x beliebig aus $[x_1, x_2]$ und Tf definiert nach (2.24) erhalten wir aus Satz 2.21

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(B_n Tf)(x)}{(B_n \Omega_2)(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+3)}{n(nx(1-x)+6x^2-6x+2)} \lim_{n \rightarrow \infty} n(B_n Tf)(x) = \\ &= \frac{1}{x(1-x)} \lim_{n \rightarrow \infty} n [(B_n f)(x) - f(x) + \frac{2x-1}{n+2} f'(x)] \end{aligned}$$

Wegen Hilfssatz 2.23 und Satz 2.11 können wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(B_n \frac{\Omega_4}{w})(x)}{(B_n \Omega_2)(x)} = 0,$$

und mit Satz 2.21

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(B_n Tf)(x)}{(B_n \Omega_2)(x)} = \frac{f''(x)}{2},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

6. In [15] hat M.W.Müller zusammen mit dem Verfasser gezeigt, dass für eine Folge $L_n: C(K) \rightarrow C(K)$, $L_n e_0 = e_0$, $n=1,2,\dots$ von linearen positiven Operatoren gilt

$$\|f - L_n f\| \leq \inf_{m=1,2,\dots} \{1 + \delta^{-2m} \|L_n \Omega_{2m}\|\} \omega(f; \delta), \quad \delta > 0,$$

wobei $\omega(f; \delta)$ der Stetigkeitsmodul und Ω_{2m} nach (2.24) definiert ist.

Satz 2.11 liefert für die Betaoperatoren

$$\|B_n \Omega_4\| < \frac{3}{16n^2} - \frac{1}{n^3}, \quad n > 27.$$

Wir erhalten daher mit $m=2$ und $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$

SATZ 2.25. Für $n > 27$ und $f \in C(K)$ gilt

$$\|f - B_n f\| < (\frac{19}{16} - \frac{1}{n}) \omega(f; \frac{1}{\sqrt{n}}).$$

SATZ 2.26. Für $f \in C^{(1)}(K)$ und $n > 27$ gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\|f - B_n f\| < \frac{\|f'\|}{n} + \frac{11}{16\sqrt{n}} \omega(f'; \frac{1}{\sqrt{n}})$$

und

$$\|f - B_n f\| < \frac{\|f'\|}{n} + \frac{23}{80} \omega(f'; \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}).$$

Beweis. Es gibt sicher ein $\theta, \theta = \theta(x, t)$, derart, dass

$$f(x) - f(t) = (x-t)f'(x) + (x-t)[f'(\theta) - f'(x)].$$

Für $x \in K$ gilt also

$$f(x) - (B_n f)(x) = \frac{2x-1}{n+2} f'(x) + (B_n F)(x),$$

wo

$$F(t, x) := (x-t)[f'(\theta) - f'(x)].$$

Ferner ist

$$(2.37) \quad |f(x) - (B_n f)(x)| < \frac{\|f'\|}{n} + \|B_n F\|, \quad x \in K.$$

Wie im Beweis von Satz 2.4 aus [15] schliessen wir, dass für jedes positive δ gilt

$$\|B_n F\| < \omega(f'; \delta) \left\{ \|B_n \Omega_2\|^{\frac{1}{2}} + \delta^{-3} \|B_n \Omega_4\| \right\}, \quad n=1,2,\dots$$

Unter Verwendung von Satz 2.11 mit $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ finden wir

$$\|B_n F\| < \left\{ \frac{1}{2\sqrt{n+3}} + \frac{3}{16\sqrt{n}} - \frac{1}{n\sqrt{n}} \right\} \omega(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{11}{16\sqrt{n}} \omega(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}), \quad n > 27.$$

Ebenso, mit $\delta = n^{-\frac{2}{3}}$, können wir schreiben

$$\|B_n F\| < \left\{ \frac{1}{2\sqrt{n+3}} + \frac{3}{16} - \frac{1}{n} \right\} \omega(f'; n^{-\frac{2}{3}}) < \frac{23}{80} \omega(f'; n^{-\frac{2}{3}}), \quad n > 2 \quad (2.40)$$

Verwenden wir in (2.37) diese Abschätzungen für $\|B_n F\|$, so erhalten wir die gesuchten Ungleichungen.

7. Wir zeigen nun weiter ein umgekehrtes Resultat für die Folge der Betaoperatoren. Die Beweismethode ist ähnlich wie die von J. Karamata und M. Vuilleumier [13].

Mit $0 < a < b < 1$ sei

$$(2.38) \quad t_{a,b}(x) := \begin{cases} 2 \ln \frac{1}{1-a} - \frac{1-2a}{a(1-a)} & , \quad x \in [0, a] \\ 2 \ln \frac{1}{1-x} - \frac{1-2x}{x(1-x)} & , \quad x \in (a, b) \\ 2 \ln \frac{1}{1-b} - \frac{1-2b}{b(1-b)} & , \quad x \in [b, 1] \end{cases}$$

Wir bemerken, dass

$$1. \quad t_{a,b} \in C(K)$$

$$2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n[t_{a,b}(x) - (B_n t_{a,b})(x)] = 0, \quad x \in (0, a) \cup (a, b) \cup (b, 1)$$

Weiter definieren wir die Funktion z durch

$$(2.39) \quad z(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1-x)^2 & , \quad x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[z(x) - (B_n z)(x)] = p(x), \quad x \in K \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

mit

$$p(x) := \begin{cases} x(5x-3) & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1-x)(2-5x) & , \quad x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

d.h.

$$p(x) < 0 \quad \text{für} \quad x \in K \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Satz 2.27. Sei $B_n: C(K) \rightarrow C(K), n=1, 2, \dots$, die Folge der Betaoperatoren. Die Funktion $f \in C(K)$ besitze die folgenden beiden Eigenschaften:

1) Es gibt ein Paar $(a, b), 0 < a < b < 1$, derart, dass

$$(B_n f)(x) = f(x) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad x \in K \setminus \{a, b\}, n \rightarrow +\infty;$$

$$2) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{t_{a,b}(1)f(0) - t_{a,b}(0)f(1)}{t_{a,b}(1) - t_{a,b}(0)}.$$

Dann gibt es zwei reelle Zahlen C_1 und C_2 so, dass

$$f = C_1 + C_2 \cdot t_{a,b}.$$

Beweis. Sei $\langle e_0, t_{a,b} \rangle$ der lineare Teilraum von $C(K)$, der von e_0 und $t_{a,b}$ erzeugt wird, wobei $t_{a,b}$ nach (2.38) definiert ist. Für

$$q(x) := \frac{f(1)-f(0)}{t_{a,b}(1)-t_{a,b}(0)} [t_{a,b}(x) - t_{a,b}(0)] + f(0) \quad (x \in K)$$

ist

$$q(t) = f(0), \quad t \in [0, a],$$

$$q(s) = f(1), \quad s \in [b, 1],$$

$$q \in \langle e_0, t_{a,b} \rangle.$$

Weiter gibt es für $f \notin \langle e_0, t_{a,b} \rangle$ mindestens einen Punkt ξ , $\xi \in K$, so, dass

$$f(\xi) - q(\xi) \neq 0.$$

Wegen $f-q \in C(K)$ gilt sicher eine der Ungleichungen

$$\max_{x \in K} [f(x) - q(x)] > 0, \quad \min_{x \in K} [f(x) - q(x)] < 0.$$

Sei z.B.

$$(2.41) \quad M := \max_{x \in K} [f(x) - q(x)] > 0.$$

Wir definieren F durch

$$F(x) = q(x) - Mz(x) + \max_{t \in K} [f(t) - q(t) + Mz(t)], \quad x \in K.$$

Einerseits stellen wir fest, dass

$$(2.42) \quad f(x) \leq F(x), \quad x \in K,$$

und

$$(2.43) \quad q(x) < F(x), \quad x \in K,$$

gilt, andererseits aber in mindestens einem Punkt $\bar{x}$ $f(\bar{x}) = F(\bar{x})$

ist. Aus (2.43) schliessen wir $\bar{x} \notin [0, a] \cup [b, 1]$, während aus der zweiten Hypothese $\bar{x} \neq \frac{1}{2}$ folgt. Deshalb gehört $\bar{x}$ zu $(a, b) \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Aus Ungleichung (2.42) folgt

$$B_n f \leq B_n F$$

und daher

$$(B_n f)(\bar{x}) - f(\bar{x}) = (B_n f)(\bar{x}) - F(\bar{x}) \leq (B_n F)(\bar{x}) - F(\bar{x}).$$

Ferner ist

$$(B_n F)(\bar{x}) - F(\bar{x}) = (B_n q)(\bar{x}) - q(\bar{x}) - M[(B_n z)(\bar{x}) - z(\bar{x})],$$

d.h.

$$n[q(\bar{x}) - (B_n q)(\bar{x})] \leq n[f(\bar{x}) - (B_n f)(\bar{x})] + nM[z(\bar{x}) - (B_n z)(\bar{x})]$$

oder

$$-p(\bar{x}) < \lim_{n \rightarrow \infty} n[f(\bar{x}) - (B_n f)(\bar{x})].$$

Zusammen mit Ungleichung (2.40) erhalten wir

$$(B_n f)(\bar{x}) - f(\bar{x}) \neq O\left(\frac{1}{n}\right)$$

im Widerspruch zur ersten Bedingung.

Die Behauptung unseres Satzes unterscheidet sich von den üblichen Umkehrsätzen dadurch, dass f im allgemeinen keine lineare Funktion ist. Dies liegt daran, dass im Satz 2.24 die rechte Seite der asymptotischen Formel für eine lineare Funktion von Null verschieden ist.

8. Wir definieren eine weitere Folge von Betaoperatoren $B_n: C(K) \rightarrow C(K)$, $n=1, 2, \dots$, durch

$$(2.44) \quad (B_n f)(x) = \begin{cases} f(0) & , x = 0 \\ \frac{1}{B(nx, n-nx)} \int_0^1 t^{nx-1} (1-t)^{n-1-nx} f(t) dt & , x \in K \\ f(1) & , x = 1 \end{cases}$$

Unter Verwendung früherer Sätze aus Kapitel II und III bewiesen wir den

SATZ 2.28. Für die Folge $B_n: C(K) \rightarrow C(K)$, $n=1, 2, \dots$, definiert nach (2.44) gilt:

$$a) \quad B_n e_k = e_k, \quad k=0, 1$$

$$(B_n e_2)(x) = e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n+1} \quad (x \in K; n=1, 2, \dots)$$

$$(B_n e_3)(x) = e_3(x) + \frac{x(1-x)(2-x)}{n+1} + \frac{2x(1-x)(2x-1)}{n+2}$$

$$b) \quad (B_n \Omega_1)(x) = \frac{2x^{nx}(1-x)^{n(1-x)}}{nB(nx, n-nx)} < \sqrt[n]{\frac{2e^{1/n}}{n}} x(1-x)$$

$$(\mathbb{B}_n \Omega_2)(x) = \frac{x(1-x)}{n+1} < \frac{1}{4n}$$

$$(\mathbb{B}_n \Omega_4)(x) = \frac{3nx^2(1-x)^2 + 6x(1-x)(3x^2 - 3x + 1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} < \\ < \frac{3}{2n^2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{n} \right) .$$

c) Für eine nicht-konkave Funktion f auf K ist

$$f \leq \mathbb{B}_n f, \quad n=1,2,\dots$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \mathbb{B}_n f\| = 0, \quad f \in C(K);$

e) Für $f \in C(K)$ mit beschränkter Ableitung 2. Ordnung auf dem Intervall $[x_1, x_2] \subseteq \overset{\circ}{K}$ gilt für jedes $x, x \in [x_1, x_2]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x) - (\mathbb{B}_n f)(x)] = -\frac{x(1-x)}{2} f''(x) .$$

f) Besitzt $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte dividierte Differenzen von 2. Ordnung, d.h. gilt

$$m_f \leq [x_1, x_2, x_3; f] \leq M_f, \quad x_i \in K, \\ \text{dann ist für } x \in K \text{ und } n=1,2,\dots$$

$$\frac{x(1-x)}{n+1} m_f \leq (\mathbb{B}_n f)(x) - f(x) \leq \frac{x(1-x)}{n+1} M_f$$

g) Für $f \in C(K)$ ist

$$|f(x) - (\mathbb{B}_n f)(x)| < \left(1 + \sqrt{\frac{2e^{1/6n}}{3}}\right) \omega(f; \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}),$$

$$x \in K, n=1,2,\dots;$$

und

$$\|f - \mathbb{B}_n f\| < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2^{5/6} 3}}\right) \omega(f; \frac{1}{\sqrt{n}}), \quad n=1,2,\dots;$$

h) Für $f \in C^{(1)}(K)$ ist

$$\|f - \mathbb{B}_n f\| < \left(\frac{11}{16\sqrt{n}} + \frac{3}{2n\sqrt{n}}\right) \omega(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}), \quad n=1,2,\dots;$$

i) Aus

$$\mathbb{B}_n f = f + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow +\infty$$

mit $f \in C(K)$ folgt: f ist eine lineare Funktion auf K .

j) Über die Saturationsklasse

$$\text{Sat.Kl.}[\mathbb{B}_n] := \{f \in C(K); \|f - \mathbb{B}_n f\| = O\left(\frac{1}{n}\right)\}$$

gilt:

$$\text{Sat.Kl.}[\mathbb{B}_n] = \text{Lip}^{(1)}_1(K),$$

wobei $\text{Lip}^{(1)}_1(K)$ der Raum der Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f' \in \text{Lip } 1$ auf dem Intervall K ist.

Beweis. Es gilt

$$(\mathbb{B}_n e_k)(x) = \frac{(nx)_k}{(n)_k} = \frac{(nx)(nx+1)\dots(nx+k-1)}{n(n+1)\dots(n+k-1)}, \quad x \in K, \\ k=0,1,\dots$$

Setzen wir in Satz 2.2 $p=nx, q=n(1-x), \lambda = x, x \in \overset{\circ}{K}$, so erhalten wir

$$(\mathbb{B}_n \Omega_1)(x) = \frac{2x^{nx}(1-x)^{n(1-x)}}{nB(nx, n-nx)} .$$

Diesen Ausdruck schätzen wir mit Hilfe der Stirlingschen Formel ab. Die dritte Behauptung folgt aus Satz 1.6, während die punktweise Konvergenz gegen die Identität wegen a) statthat. Genau wie im Beweis von Satz 2.21 (mit $w:=1$) finden wir die asymptotische Formel e). Wegen

$$\Delta(\mathbb{B}_n) = \mathbb{B}_n e_2 - e_2 = \frac{e_1 - e_2}{n+1}$$

ist f) eine einfache Folgerung aus Satz 1.8.

Aufgrund der Ungleichung

$$|f(x) - (\mathbb{B}_n f)(x)| \leq \left\{1 + \frac{1}{8} (\mathbb{B}_n \Omega_1)(x)\right\} \omega(f; \delta), \quad x \in K, \delta > 0,$$

und der Sätze 2.2 und 2.4 aus [15] gilt g) und h).

Den Umkehrsatz bzw. den Saturationssatz verifiziert man mit Hilfe eines allgemeinen Ergebnisses von V.G.Amelkovič [1], nämlich: „Sei $L_n: C(K) \rightarrow C(K)$, $n=1,2,\dots$, eine Folge von linearen positiven Operatoren mit den Eigenschaften:

- i) Für jedes $g \in C(K)$, $g \in C^{(2)}[x_1, x_2]$, $[x_1, x_2] \subseteq K$, gibt es eine Funktion $V: K \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $V > 0$ auf $[x_1, x_2]$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n [g(x) - (L_n g)(x)] = -V(x)g''(x), \quad x \in [x_1, x_2],$$

ist, wobei $r_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$;

- ii) Für $f_0 \in C(K)$ gilt

$$\|f_0 - L_n f_0\|_{[x_1, x_2]} = O\left(\frac{1}{r_n}\right), \quad n \rightarrow +\infty;$$

Dann gilt:

$$f_0 \in \text{Lip}^{(1)}([x_1, x_2]),$$

und im Falle

$$\|f_0 - L_n f_0\|_{[x_1, x_2]} = O\left(\frac{1}{r_n}\right), \quad n \rightarrow +\infty,$$

gilt: f_0 ist eine lineare Funktion auf $[x_1, x_2]$.

2. Eine weitere Modifikation der Betaoperatoren sind die Operatoren $\tilde{B}_n$, $n=1,2,\dots$, definiert durch

$$\begin{aligned} (\tilde{B}_n f)(x) &= \frac{1}{B([nx]+1, n+1-[nx])} \int_0^1 t^{[nx]} (1-t)^{n-[nx]} f(t) dt = \\ &= \int_0^1 \tilde{\beta}_n(t, x) f(t) dt, \quad n=1,2,\dots; x \in K, \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{\beta}_n(t, x) := (n+1) \binom{n}{[nx]} t^{[nx]} (1-t)^{n-[nx]}, \quad (t, x) \in K \times K.$$

In [1] hat L.V.Kantorovitch die Approximationseigenschaften der Operatoren $K_n: C(K) \rightarrow \mathfrak{B}_n$, $n=1,2,\dots$,

$$(2.45) \quad \begin{cases} (K_n f)(x) := \sum_{k=0}^n (n+1) b_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt, & x \in K, \\ b_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} & (k=0,1,\dots,n; n=1,2,\dots), \end{cases}$$

untersucht, wobei $\mathfrak{B}_n$ der Raum der reellen Polynome mit Höchstgrad n ist. Wir zeigen nun, dass diese Operatoren mit den $\tilde{B}_n$ in Verbindung stehen. Wir suchen dazu die adjungierten Operatoren $\tilde{B}_n^*$ zu den Operatoren $\tilde{B}_n$, $n=1,2,\dots$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (\tilde{B}_n^* f)(x) &= \int_0^1 \tilde{\beta}_n(x, t) f(t) dt = (n+1) \int_0^1 \binom{n}{[nt]} x^{[nt]} (1-x)^{n-[nt]} f(t) dt = \\ &= (n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \binom{n}{[nt]} x^{[nt]} (1-x)^{n-[nt]} f(t) dt = \\ &= (n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt, \end{aligned}$$

d.h.

$$(\tilde{B}_n^* f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (n+1) b_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt, \quad x \in K.$$

Die Darstellung von $\tilde{B}_n^* f$ zeigt, dass die Adjungierten von $\tilde{B}_n$, $n=1,2,\dots$, vom gleichen Typ wie die Kantorovitch-Operatoren sind.

IV. INHALTSTREUE OPERATOREN

Ist $K = [0, 1]$, so sagen wir, der gegebene Operator $T: R(K) \rightarrow R(K)$ ist inhaltstreu, wenn

$$\int_0^1 (Tf)(s) ds = \int_0^1 f(s) ds, \quad f \in R(K).$$

In diesem Kapitel werden wir eine Folge von linearen Operatoren $L_n: R(K) \rightarrow R(K)$, $n=1, 2, \dots$, angeben, die folgende Eigenschaften haben:

- (A) $L_n(R(K)) = \mathfrak{B}_n$, $n=1, 2, \dots$, d.h. L_n , $n=1, 2, \dots$, sind Polynomialoperatoren.
- (B) L_n ist positiv.
- (C) Auf dem Raum der stetigen Funktionen konvergiert die Folge $(L_n)_{n=1}^\infty$ punktweise gegen den Identitätsoperator $C(K) \rightarrow C(K)$.
- (D) Die L_n , $n=1, 2, \dots$, sind inhaltstreu.
- (E) L_n ist ein symmetrischer Integraloperator.

Diese Operatoren konstruieren wir mit Hilfe der Betaoperatoren. Genauer definieren wir die Operatoren $L_n: R(K) \rightarrow \mathfrak{B}_n$, $n=1, 2, \dots$, durch

$$(3.1) \quad (L_n f)(x) = (B_n B_n f)(x), \quad x \in K; n=1, 2, \dots,$$

wo B_n der Bernsteinoperator ist.

Gemäss Satz 2.6 ist $B_n f \in C(K)$ für $f \in R(K)$. Für $z \in C(K)$ mit $z(x) := (B_n f)(x)$, $x \in K$, erhalten wir nach einfacher Zwischenrechnung

$$z\left(\frac{j}{n}\right) = (n+1) \int_0^1 b_{n,j}(t) f(t) dt, \quad j=0, 1, \dots, n; n=1, 2, \dots,$$

wo $b_{n,j}$, $j=0, 1, \dots, n$ wie in (2.45) definiert ist.

Daher ist

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n z\left(\frac{j}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Berücksichtigen wir

$$\int_0^1 (B_n g)(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n g\left(\frac{j}{n}\right), \quad g \in C(K),$$

so finden wir

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (B_n z)(t) dt$$

oder

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (L_n f)(t) dt, \quad n=1, 2, \dots,$$

d.h. L_n , $n=1, 2, \dots$, sind inhaltstreue Operatoren.

Wir bemerken, dass auch die Kantorovitch-Operatoren diese Eigenschaft haben; denn offensichtlich ist

$$\int_0^1 (K_n f)(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt.$$

Eine von (2.45) verschiedene Darstellung der Kantorovitch-Operatoren wird gegeben durch

$$(K_n f)(x) = \int_0^1 k_n(t, x) f(t) dt$$

mit

$$k_n(t, x) := (n+1) b_{n, [n+1]t}(x), \quad (t, x) \in K \times K,$$

woraus ersichtlich ist, dass sie aber nicht symmetrisch sind. Mit $\tilde{B}_n$, $n=1, 2, \dots$, haben wir ein weiteres Beispiel nicht-symmetrischer Operatoren, welche ebenfalls den Flächeninhalt erhalten. Vermutlich wird daher die Menge linearer Operatoren mit den Eigenschaften (A)-(D) sehr umfangreich sein.

SATZ 3.1. Die Operatoren $L_n, n=1,2,\dots$, definiert auf $R(K)$ nach (3.1) besitzen die Eigenschaften (A)-(E). Darüberhinaus gilt

$$(3.2) \quad (L_n f)(x) = (n+1) \sum_{k=0}^n \int_0^1 b_{n,k}(x) b_{n,k}(t) f(t) dt.$$

Beweis. Sei

$$l_n(t, x) := (n+1) \sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) b_{n,k}(t), \quad (t, x) \in K \times K,$$

und z definiert wie oben; dann gilt

$$(L_n f)(x) = (B_n z)(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k}(x) z\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 l_n(t, x) f(t) dt,$$

womit (3.2) verifiziert ist. Wegen $l_n(x, t) = l_n(t, x)$ ist der Operator L_n symmetrisch. Die Konvergenzeigenschaft folgt schliesslich aus

$$(L_n e_0)(x) = e_0(x)$$

$$(L_n e_1)(x) = (B_n e_1)(x) = e_1(x) + \frac{1-2x}{n+2}$$

$$(L_n e_2)(x) = (B_n e_2)(x) + \frac{x(1-x)}{n} \left[1 - \frac{5n+6}{(n+2)(n+3)} \right]$$

$$(x \in K; n=1,2,\dots).$$

Es sei noch erwähnt, dass es eine Konstante $C > 0$ mit

$$(L_n \Omega_+)(x) < \frac{C}{n^2}, \quad x \in K; n=1,2,\dots,$$

gibt, so dass wir wie bei den Betaoperatoren verschiedene asymptotische Formeln und Abschätzungen erhalten.

Mit Hilfe dieser Operatoren $(L_n)_{n=1}^\infty$ beweisen wir den folgenden Satz für die Betaoperatoren $(B_n)_{n=1}^\infty$.

SATZ 3.2. Für eine nicht-konkave Funktion f auf K mit

$$(3.3) \quad f\left(\frac{k}{n}\right) \leq (B_n f)\left(\frac{k}{n}\right), \quad k=0,1,\dots,n; n=1,2,\dots,$$

gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n=1,2,\dots$$

Beweis. Wegen (3.3) ist

$$(B_n f)(x) \leq (B_n B_n f)(x), \quad x \in K.$$

Andererseits gilt für eine nicht-konkave Funktion f

$$f(x) \leq (B_n f)(x), \quad x \in K,$$

(siehe O. Aramă [3]) d.h.

$$f(x) \leq (B_n f)(x) \leq (L_n f)(x), \quad x \in K.$$

Deshalb gilt für jedes $n=1,2,\dots$

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x) dx$$

oder

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Vermutlich wird eine Funktion f mit diesen Eigenschaften auf der Menge $\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots, 1\}$ konstant sein.

Als Abschluss zeigen wir

SATZ 3.3. Für eine nicht-konkave Funktion f gilt

$$(3.4) \quad \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\ n=2,3,\dots$$

Beweis. Wegen Satz 2.16 haben wir

$$f\left(t + \frac{1-2t}{n}\right) \leq (B_{n-2} f)(t), \quad t \in K,$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2,k}(t) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq (L_{n-2} f)(t), \quad t \in K,$$

oder

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(t) dt, \quad n=2,3,\dots$$

Aus

$$f(t) \leq (B_n f)(t), \quad t \in \mathbb{K},$$

erhält man durch Integration

$$\int_0^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n=1,2,\dots,$$

womit Satz 3.3 bewiesen ist.

KOROLLAR 3.4. Es gelten die folgenden Ungleichungen:

$$(3.5) \quad \frac{1}{N-1} \ln N < \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \ln N < \frac{N^2+N-1}{N^2} - \frac{1}{N} \ln N$$

$N=2,3,\dots$

Beweis. Mit $n=N$ und $f(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{N}}$ folgt aus der linken

Seite der Ungleichung (3.4) die rechte Seite von (3.5).

Entsprechend erhalten wir mit $n=N-1$, $f(t) = \frac{1}{t + \frac{1}{N-1}}$ die

linke Seite von (3.5) aus der rechten von (3.4) (vgl. [18] S.187).

L I T E R A T U R

- [1] Amelkovič, V.G., A theorem converse to a theorem of Voronov-skaja type. (Russian), Teor. Funkcij. Funkcional. Anal. i Priložen. Vyp. 2 (1966), 67-74.
- [2] Andreev V.I., The operator of the identity transformation in the space $C(0,1)$. (Russian) Kalinin. Gos. Ped. Inst. Učebn. Zap., 52 (1967), 1-8.
- [3] Aramă O., Proprietăți privind monotonia șirului polinoamelor de interpolare ale lui S.N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor. Studii și cercetări de matematică (Cluj), VIII (1957), 195-210.
- [4] Artin E., The Gamma Function. Holt, Rinehart & Winston, 1964.
- [5] Cheney E.W. and Sharma A., Bernstein power series. Canad. J. Math., 16 (1964), 241-252.
- [6] Dzjadyk V.K., Approximation of functions by positive linear operators and singular integrals. (Russian) Mat. Sb. (N.S.), 70 (112) (1966), 508-517.
- [7] Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G., Higher transcendental functions. (Bateman manuscript project) vol. I, McGraw-Hill, 1953.
- [8] Fan Ky, Convex sets and their applications. Argonne National Laboratory, 1959.
- [9] Gautschi W., Some elementary inequalities relating to the gamma function and incomplete gamma function. J. Math. Phys., 38 (1959), 77.

- [10] Kamat A.R., Incomplete and absolute moments of some discrete distributions. Proceedings of the International Symposium on classical and contagious discrete distributions. (Editor: G.P. Patil) Mc Gill University, Montreal, 1963, 45-64.
- [11] Kantorovitch L.V., Sur certains développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein I, II. C.R. Acad. Sci. URSS (1930), 563-568, 595-600.
- [12] Kantorovitch L.V. and Akilov G.P., Functional Analysis in Normed Spaces. Pergamon Press, vol. 46, 1969.
- [13] Karamata J. and Vuilleumier M., On the degree of approximation of continuous functions by positive linear operators. The University of Wisconsin, MRC# 521, 1964.
- [14] Korovkin P.P., Linear operators and approximation. Gordon and Breach, New York, 1960.
- [15] Lupaş A. and Müller M.W., Approximation properties of the M_n -Operators. Aequationes Mathematicae 5, 1(1970), 19-37.
- [16] Mamedov R.G., Some general results on the asymptotic value and order of approximation of functions by a family of positive linear operators (I), (II), (III), (Russian) Izv. Akad. Nauk. Azerbaidžan. SSR Ser. Fiz. Mat. Tehn. Nauk 1962, 4, 2-16, 1962, 6, 3-14, 1963, 1, 3-13.
- [17] Meyer-König W. und Zeller K., Bernsteinsche Potenzreihen. Studia Math., 19(1960), 89-94.
- [18] Mitrinović D.S. (in cooperation with Vasić P.M.), Inequalities. Springer Verlag Berlin, Band 165, 1970.
- [19] Müller M.W., Die Folge der Gammaoperatoren. Dissertation (Stuttgart 1967).

- [20] Müller M.W., On asymptotic approximation theorems for sequences of linear positive operators. Proc. of the Conf. on Approx. Theory and its Applications, Lancaster, July, 1969.
- [21] Müller M.W. und Walk H., Konvergenz- und Guteaussagen für die Approximation durch Folgen linearer positiver Operatoren. Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, 1970 (to appear).
- [22] Popoviciu T., Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles. Mathematica 8(1933), 1-85.
- [23] Popoviciu T., Les fonctions convexes. Hermann et Cie., Paris 1945.
- [24] Popoviciu T., Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse. Mathematica 1(24), 1(1959), 95-142.
- [25] Rao Raja B., On a generalization of Gautschi's Inequality. Skand. Aktuarietidskrift, 53 (1970), 10-14.
- [26] Ripianu D., Sur certains polynômes d'interpolation. (Romanian) Acad. R.P.R., Fil. Iaşi Stud. Cerc. Sti. Mat. 14(1963), 213-230.
- [27] Rockafellar R.T., Convex Analysis. Princeton University Press, 1970.
- [28] Schurer F., On linear positive operators in approximation theory. Thesis, Uitgeverij Waltman (Delft, 1965).
- [29] Walk H., Approximation unbeschränkter Funktionen durch lineare positive Operatoren. Habilitationsschrift (Stuttgart, 1970).

Lebenslauf

Am 5 Januar 1942 wurde ich als Sohn des Rechtsanwaltes Octavian Lupaş und seiner Ehefrau Livia in Arad (Rumänien) geboren.

Ab 1948 besuchte ich das Gymnasium „Moise Nicoară“ in Arad, wo ich im Frühjahr 1959 die Reifeprüfung ablegte.

Im Herbst 1959 begann ich das Studium der Mathematik an der „Babeş-Bolyai“-Universität in Cluj, in der Mathematik-Mechanik Fakultät.

Nach Beendigung meines Studiums wurde ich im Herbst 1964 als wissenschaftlicher Forscher am Recheninstitut der Zweigstelle Cluj der Akademie von Rumänien angestellt. In der Zeit 1964-1971 machte ich Forschungen auf dem Gebiete der Approximationstheorie.

Der Humboldt-Stiftung verdanke ich nun ein Forschungsjahr, in dem ich am Mathematischen Institut A der Universität Stuttgart seit Juli 1971 arbeite.

Meine akademischen Lehrer in Mathematik waren: L. Bal, Acad.G. Călugăreanu, D.V. Ionescu, T.Mihăilescu, P.Mocanu, G.Pic, E.Popoviciu, Acad.T. Popoviciu, F.Rado, D.D. Stancu.