

Cal
133/S-44-25

**„BABEŞ—BOLYAI” UNIVERSITY
FACULTY OF MATHEMATICS
RESEARCH SEMINARIES**

**SEMINAR ON
FUNCTIONAL ANALYSIS AND NUMERICAL METHODS**

Preprint Nr. 1 , 1986

**CLUJ-NAPOCA
ROMANIA**

Col. 133 / 5-44-25

CONTENTS

1. Mira-Cristiana Anisau , On Caristi's theorem and successive approximations	1
2. Doina Brădeanu , On the convergence and stability of the Galerkin method for a differential equation	11
3. Adraian Diaconu , Couples itératifs. Méthodes itératives obtenues à l'aide des couples itératifs.....	27
4. C. Iancu, T. Oproia, I. Păvăloiu , Inverse interpolating splines with applications to the equation solving	67
5. Costică Mustăța , On the extension of Lipschitz Functions	83
6. A.B. Németh , Known and new equivalent forms of the archimedian property of ordered vector spaces...	93
7. A.B. Németh , A necessary condition for subdifferentiability of convex operators	104
8. Ion Păvăloiu , La convergence de certaines méthodes itératives pour résoudre certaines équations opérationnelles.	127
9. Ion Păvăloiu , Sur l'estimation des erreurs en convergence numérique de certaines méthodes d'itération	133
10. Dumitru Ripeanu , Sur la longueur de certains intervalles d'interpolation pour des classes d'équations différentielles linéaires du second ordre	137
11. Ioan Serb , On the modulus of convexity of L_p spaces.....	175

En effet, nous avons

$$\|\bar{x} - \bar{f}_n\| \leq |\lambda| \|D(\bar{x}) - D(\bar{f}_{n-1})\| + \|\bar{y} - \bar{y}_n\| \leq$$

$$|\lambda| O(\rho) \|\bar{x} - \bar{f}_n\| + |\lambda| O(\rho) \|\bar{f}_n - \bar{f}_{n-1}\| + |\lambda| \eta_1(\varepsilon, \rho) + \eta_3(\varepsilon)$$

et l'inégalité (8) en résulte. Il résulte de (8) pour $n \rightarrow \infty$

$$\|\bar{x} - \bar{f}\| \leq \frac{|\lambda| \eta_1(\varepsilon, \rho) + \eta_3(\varepsilon)}{1 - \tau}$$

où $\bar{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Babici, D.M., Ivanov, V.N., Oțenca polnei progresnosti pri reshenia nelineinykh operatornykh uravnenii metodov prestei iterații. Jurnal vycislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki 7, 5, 988-1000 (1967).
- [2]. Păvăloiu, I., Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor. Editura Dacia Cluj-Napoca 1976.
- [3]. Urabe, M., Error Estimation in Numerical Solution of Equations by Iteration Process, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 26, 77-91 (1962).

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1, 1986, pp. 137 - 174.

SUR LA LONGUEUR DE CERTAINS INTERVALLES D'INTERPOLATION POUR DES CLASSES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

Dumitru Ripeanu

§ 1. L'objet de cette note est le même qu'en [1]. On considère des classes d'équations différentielles linéaires du second ordre, déterminées par le fait que les maximums des valeurs des coefficients sont des nombres donnés, qui déterminent la classe respective, les mêmes pour toutes les équations de la classe et on étudie la manière dont varie la longueur d'un certain intervalle d'interpolation de la classe, alors que les nombres respectifs prennent toutes les valeurs positives, compatibles avec une relation entre eux, donnée d'avance.

L'instrument d'investigation est une méthode comprise dans les relations (8) - (11).

On considère l'équation

$$(1) \quad (E) \quad y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0$$

dans laquelle les coefficients $p_1(x)$ et $p_2(x)$ sont des fonctions continues, non identiquement nulles dans un intervalle $[0, L]$ de la variable avec $L > 0$ donné d'avance.

On écrit

$$(2) \quad \begin{cases} M_s = \max_{x \in [0, L]} |p_s(x)| > 0 \quad (s = 1, 2) \\ B_1(p) = \frac{2}{\sqrt{1-4p}} \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \quad (0 < p < \frac{1}{4}) \\ B_2(p) = \frac{2}{\sqrt{1+4p}} \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \quad (p > \frac{1}{4}) \end{cases}$$

donc

$$(2) \begin{cases} B_1'(p) = \frac{1}{1-4p} \left(-\frac{1}{p} + \frac{4}{\sqrt{1-4p}} \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right), \\ B_2'(p) = \frac{1}{-1+4p} \left(\frac{1}{p} - \frac{4}{\sqrt{1+4p}} \arccos \frac{2\sqrt{p}}{1+\sqrt{1+4p}} \right), \\ B_1''(p) = \frac{1}{(1-4p)^2} \left(\frac{1-10p}{p^2} + \frac{4}{\sqrt{1-4p}} \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right), \\ B_2''(p) = \frac{1}{(-1+4p)^2} \left(\frac{1-10p}{p^2} + \frac{4}{\sqrt{1+4p}} \arccos \frac{2\sqrt{p}}{1+\sqrt{1+4p}} \right) \end{cases}$$

où $\log$ désigne le logarithme naturel et $\arccos$ l'arc d'origine

0 compris dans le premier quadrant du cercle trigonométrique.

On constate immédiatement ([2] et en utilisant (2)) que

$$(3) \begin{cases} B_1(p) > 0, B_2(p) > 0, B_1'(p) < 0, B_2'(p) < 0, \\ B_1(0) = \lim_{p \rightarrow 0+} B_1(p) = \infty, B_1\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}-} B_1(p) = \\ = B_2\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}+} B_2(p) = 2, B_2(\infty) = \lim_{p \rightarrow \infty} B_2(p) = 0, \\ B_1'\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}-} B_1'(p) = B_2'\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}+} B_2'(p) = -\frac{8}{3}, \\ B_1''\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}-} B_1''(p) = B_2''\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}+} B_2''(p) = \frac{64}{5} \end{cases}$$

On désigne enfin par $F(M_1, M_2)$ la classe d'équations (E) pour lesquelles $\max_{x \in [0, 1]} |p_s(x)| = M_s$ avec M_s ($s = 1, 2$) nombres positifs donnés et on écrit

$$(4) \begin{cases} A(M_1, M_2) = \begin{cases} \frac{2}{M_1} B_1(p) & \text{si } 0 < p = \frac{M_2}{M_1} < \frac{1}{4} \\ \frac{2}{M_1} B_2(p) & \text{si } \frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{4} \\ \frac{2}{M_1} B_2(p) & \text{si } p = \frac{M_2}{M_1} > \frac{1}{4} \end{cases} \\ A_0(M_1, M_2) = \min(L, A(M_1, M_2)) \end{cases}$$

On rappelle qu'un intervalle est un intervalle d'interpolation pour la classe $\Gamma(M_1, M_2)$ si cet intervalle est un intervalle d'interpolation pour chaque équation de la classe respective.

Dans ces notations on a la

PROPOSITION 1. L'intervalle $[0, A_0(M_1, M_2)]$ est un intervalle d'interpolation pour la classe $\Gamma(M_1, M_2)$ ([1], proposition 1).

La relation donnée entre les nombres M_1 et M_2 s'écrit sous la forme

$$(5) \begin{cases} F(M_1, M_2) = 0 & (M_1 > 0, M_2 > 0) \\ \text{On désignera par } (C) \text{ la courbe d'équation } F(M_1, M_2) = 0 \\ \text{située dans un plan rapporté aux axes rectangulaires de} \\ \text{coordonnées } OM_1, OM_2 \text{ et par } (C_+) \text{ l'arc de } (C) \text{ situé dans} \\ \text{le quadrant } M_1 > 0, M_2 > 0. \end{cases}$$

On fera - relativement à la fonction $F(M_1, M_2)$ de (5) l'hypothèse suivante:

HYPOTHESE 1. L'équation en l'inconnue M_1 :

$$(6) \quad F(M_1, M_2) = 0 \quad \text{avec } M_2 = p M_1^2$$

admet un nombre fini $N \geq 1$ de racines.

2. Ces racines peuvent s'écrire de manière explicite

$$(7) \quad M_1 = \theta_s(p) \quad (s = \overline{1, N})$$

$\theta_s(p)$ fonctions uniformes.

3. Si l'on désigne par T_s le domaine d'existence de la racine $\theta_s(p)$ (au sens: dans lequel $\theta_s(p)$ prend des valeurs réelles $\neq 0$), alors T_s est un intervalle ou la réunion d'un nombre fini d'intervalles ($s = \overline{1, N}$).

4. Il existe N_0 ($1 \leq N_0 \leq N$) racines $\theta_s(p)$ qui dans le domaine $T_{s+} = T_s \cap (0, \infty)$ sont positives et à dérivée seconde continue. Ces racines seront désignées par $\varphi_1(p), \varphi_2(p), \dots, \varphi_{N_0}(p)$ et leurs domaines T_{s+} respectifs par $P_1, P_2, \dots, P_{N_0}$.

Dans ces notations, la racine $\varphi_s(p)$ donne pour la fonction $A(M_1, M_2)$ de (4) l'expression suivante:

$$A(M_1, M_2) = A(\varphi_s(p), p \varphi_s^2(p)) = A^s(p) =$$

$$(8) \quad = \begin{cases} A_1^s(p) = \frac{2}{\varphi_s(p)} B_1(p) & \text{si } 0 < p < \frac{1}{4} \\ \frac{4}{\varphi_s(p)} & \text{si } p = \frac{1}{4} \\ A_2^s(p) = \frac{2}{\varphi_s(p)} B_2(p) & \text{si } p > \frac{1}{4} \end{cases}$$

$s = 1, N_0$

En étudiant donc la variation des fonctions $A_1^s(p)$ et $A_2^s(p)$ de (8) lorsque p parcourt le domaine P_s , on peut déterminer la manière dont varie la longueur des intervalles d'interpolation $[0, A_0^s(p)]$, où, selon (4) et (8)

$$(8_1) \quad A_0^s(p) = \min(L, A^s(p)) \quad s = 1, N_0$$

La variation respective est donnée par le signe des dérivées $A_1^s(p)$ et $A_2^s(p)$ données par (2) et (8):

$$(9) \quad \begin{cases} A_1^s(p) = \frac{4B_1(p)C_1(p)}{(1-4p)\sqrt{1-4p}\varphi_s^2(p)}; \quad C_1(p) = -\frac{\sqrt{1-4p}\varphi_s(p)}{2pB_1(p)} \\ + \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}}; \quad A_2^s(p) = \frac{4B_2(p)C_2(p)}{(-1+4p)\sqrt{-1+4p}\varphi_s^2(p)} \\ C_2(p) = \frac{\sqrt{-1+4p}\varphi_s(p)}{2pB_2(p)} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \\ B^s(p) = 2\varphi_s(p) - (1-4p)\varphi_s'(p) \quad s = 1, N_0 \end{cases}$$

Par conséquent

$$(10) \quad \begin{cases} C_1^s(p) = \frac{\sqrt{1-4p}\varphi_s(p)C_1(p)}{2(pB_1(p))^2}; \quad C_2^s(p) = -\frac{\sqrt{-1+4p}\varphi_s(p)C_2(p)}{2(pB_2(p))^2} \\ C^s(p) = (pB^s(p))' \quad s = 1, N_0 \end{cases}$$

donc

$$(11) \quad \text{sg } C_1^s(p) = \text{sg } C^s(p), \quad \text{sg } C_2^s(p) = -\text{sg } C^s(p),$$

$s = 1, N_0$

Les relations (8)-(11) constituent, comme mentionné, une méthode de détermination de la variation de la fonction $A(M_1, M_2) = A^s(p)$ de (8) lorsque M_1 et M_2 varient conformément à la condition (5).

Aux §§.2.-4. on utilisera la méthode mentionnée dans le cas de quelques formes particulières de la fonction $F(M_1, M_2)$ de (5).

A l'exception des notations des §§ 1. et 5., les lettres utilisées ont des significations différentes d'un paragraphe à l'autre. Si - ainsi que c'est le cas dans ces paragraphes, au point 4. de l'hypothèse 1., l'indice (1) sera supprimé en (8)-(11), pour la commodité de l'écriture.

§ 2. On prendra d'abord en (5)

$$(12) \quad F(M_1, M_2) = M_1 + M_2 - \ell,$$

ℓ constante positive donnée. En ce cas, on a le

THEOREME 1. Si en (12) $\ell \leq (\frac{\pi}{2})^2$, alors lorsque p croît de 0 à ∞ , $A(p)$ décroît de manière monotone de ∞ à $\frac{\pi}{\sqrt{\ell}}$, et si $\ell > (\frac{\pi}{2})^2$, alors $A(p)$ varie selon le tableau suivant

p	0	p^x	∞
$A(p)$	∞	$A(p^x)$	$\frac{\pi}{\sqrt{\ell}}$

où

$$p^x = p_2 = \text{racine (unique dans l'intervalle } (\frac{1}{4}, \infty)) \text{ de la fonction } C_2(p) \text{ de (14) si } (\frac{\pi}{2})^2 < \ell < 8$$

$$p^x = \frac{1}{4} \quad \text{si } \ell = 8$$

$p^x = p_1 =$ racine (unique dans l'intervalle $(0, \frac{1}{4})$) de la fonction $C_1(p)$ de (14) si $l > 8$

$$\text{et } A(p^x) = \begin{cases} \phi(p_2) & \text{si } (\frac{l}{2})^2 < l < 8 \\ 1 & \text{si } l = 8 \\ \phi(p_1) & \text{si } l > 8 \end{cases}$$

avec

$$\phi(p) = \frac{1 + 2(l-1)p + (1-2p)\sqrt{1+4lp}}{lp(2+l-4p)} \sqrt{1+4lp}$$

Le théorème 1 est une version "en la variable p " du théorème 1 de [1], qui est énoncé "en la variable M_1 ", de sorte qu'une démonstration de cette version est inutile. Cependant, nous présentons, en utilisant la méthode proposée, une démonstration immédiate du théorème, pour assurer l'unité de la note, dans laquelle les théorèmes s'énoncent et se démontrent "en la variable p ".

Démonstration. Avec la forme (12) de $F(M_1, M_2)$ on a dans les notations de l'hypothèse $\varphi_1(p) = \frac{1}{2p}(-1 + \sqrt{1+4lp})$, $P_1 = (0, \infty)$, de sorte qu'en (8)

$$(13) \quad \begin{cases} A_1(p) = \frac{1}{l}(1 + \sqrt{1+4lp}) B_1(p) & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ A_2(p) = \frac{1}{l}(1 + \sqrt{1+4lp}) B_2(p) & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

et en (9)

$$(14) \quad \begin{cases} B(p) = \frac{1}{4p^2\sqrt{1+4lp}}(-1 + \sqrt{1+4lp})(-1 + 4p + \sqrt{1+4lp}) > 0 \\ C_1(p) = -\frac{1-4p+\sqrt{1+4lp}}{4p(2+l-4p)}\sqrt{(1-4p)(1+4lp)} + \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \\ C_2(p) = \frac{1-4p+\sqrt{1+4lp}}{4p(2+l-4p)}\sqrt{(-1+4p)(1+4lp)} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \end{cases}$$

de sorte qu'en (9)

$$(15) \quad \text{sg } A'_s(p) = \text{sg } C_s(p) \quad (s = 1, 2)$$

et en (10)

$$(16) \quad \begin{cases} Q(p) = \frac{Q(p)}{2p^2(1+4lp)\sqrt{1+4lp}} \\ Q(p) = -1 - 6lp + 4l(1-l)p^2 + (1+4lp)\sqrt{1+4lp} \\ \text{sg } Q(p) = \text{sg } Q(p) \end{cases}$$

L'identité

$$(17) \quad [1 + 6lp - 4l(1-l)p^2 + (1+4lp)\sqrt{1+4lp}] Q(p) = -4lp^2 P(p); \quad P(p) = (2+l-4l(3+l)p + 4l(1-l)^2p^2$$

dit que les éventuelles racines positives de $Q(p)$ figurent obligatoirement parmi celles de $P(p)$.

On supposera d'abord

$$(18) \quad l \neq 1$$

auquel cas $P(p)$ de (17) a une seule racine positive

$$p = p_0 = \frac{(3+l)\sqrt{l} + (1+l)\sqrt{2(1+l)}}{2(1-l)^2\sqrt{l}}$$

$$\text{et } Q(p_0) = \frac{[1+l+\sqrt{2l(1+l)}]^3}{(1-l)^2} \left(\frac{1}{1-l} + \frac{1}{\sqrt{1-l}} \right),$$

de sorte que si $l < 1$, alors $Q(p_0) > 0$, donc $Q(p) > 0$ pour $p > 0$ et si $l > 1$, alors $Q(p_0) = 0$ et en tenant compte que $Q(p) = 2l(2+l)p^2 + a_3p^3 + \dots$ pour p petit, et $Q(\infty) = \pm\infty$ avec $\pm = \text{sg}(1-l)$, il s'ensuit que pour $l > 1$, $\text{sg } Q(p) = \text{sg}(p_0 - p)$.

Or, en (17) $P(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(-8+l)(1+l)^2$, par conséquent $\text{sg}(p_0 - \frac{1}{4}) = \text{sg}(8-l)$, ce qui donne les tableaux 1 - 5, où $A_1(\frac{1}{4}) = A_2(\frac{1}{4}) = \frac{2}{l}(1 + \sqrt{1+l})$ (cf. (13)). Les autres rubriques du tableau 2 sont celles du tableau 1. (14) et les tableaux 5 et 3 donnent

$$\begin{aligned} \log \frac{1+\sqrt{1-4p_1}}{2\sqrt{p_1}} &= \frac{1-4p_1+\sqrt{1+4lp_1}}{4p_1(2+l-4p_1)} \sqrt{(1-4p_1)(1+4lp_1)} \\ \arccos \frac{1}{2\sqrt{p_2}} &= \frac{1-4p_2+\sqrt{1+4lp_2}}{4p_2(2+l-4p_2)} \sqrt{(-1+4p_2)(1+4lp_2)} \end{aligned}$$

auquel cas (15) et (2) donnent $A_1(p_1) = \phi(p_1)$, $A_2(p_2) = \phi(p_2)$ avec $\phi(p)$ de l'énoncé du théorème, ce qui, avec les tableaux 1 - 5 démontre le théorème dans l'hypothèse (18). Dans l'hypothèse complémentaire, c'est-à-dire $\ell = 1$, on a en (16)

$$Q(p) = \frac{4p^2(3+16p)}{4+6p+(1+4p)\sqrt{1+4p}} > 0, \text{ de sorte qu'en (11)}$$

$C_1'(p) > 0$, $C_2'(p) < 0$, par suite en (14) $C_1(p) < C_1(\frac{1}{4}) = 0$, $C_2(p) < C_2(\frac{1}{4}) = 0$, auquel cas (15) dit que $A_1(p)$, $A_2(p)$ varient selon le tableau 1 (ou 2), ce qui démontre le théorème.

p	0	$\frac{1}{4}$	∞
$C(p)$		+	
$C_1'(p)$		+	
$C_2'(p)$			-
$C_1(p)$	$-\infty \nearrow$	0	
$C_2(p)$		0 $\rightarrow$	$\sqrt{p-\frac{1}{2}}$
$A_1'(p)$		-	
$A_2'(p)$			-
$A_1(p)$	$\infty \searrow$	$A_1(\frac{1}{4})$	
$A_2(p)$		$A_2(\frac{1}{4}) \rightarrow$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
$A(p)$	∞	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Tableau 1. ($0 < \ell < 1$)

p	0	$\frac{1}{4}$	p_0	∞
$C(p)$		+	0	-
$C_1'(p)$		+		
$C_2'(p)$			- - 0	+
$C_1(p)$	$-\infty \nearrow$	0		
$C_2(p)$			0 $\searrow$ $C_2(p_0) \nearrow \sqrt{p-\frac{1}{2}} \leq 0$	

Tableau 2. ($1 < \ell \leq (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$)

p	0	$\frac{1}{4}$	p_0	p_2	∞
$C(p)$		+	0	-	
$C_1'(p)$		+			
$C_2'(p)$			- 0	+	
$C_1(p)$	$-\infty \nearrow$	0			
$C_2(p)$		0 $\searrow$ $C_2(p_0) \nearrow$	0 $\nearrow$ $\sqrt{p-\frac{1}{2}} > 0$		
$A_1'(p)$		-			
$A_2'(p)$			-	0	+
$A_1(p)$	$\infty \searrow$	$A_1(\frac{1}{4})$			
$A_2(p)$		$A_2(\frac{1}{4}) \rightarrow$	$A_2(p_2) \nearrow$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	
$A(p)$	∞	$\rightarrow$	$A(p^x) \nearrow$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$	

Tableau 3. ($(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 < \ell < 8$)

p	0	$\frac{1}{4}$	∞
C(p)	+	0	-
C ₁ '(p)	+		
C ₂ '(p)			+
C ₁ (p)	$-\infty \nearrow 0$		
C ₂ (p)		0 $\nearrow 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$	
A ₁ '(p)	-		
A ₂ '(p)			+
A ₁ (p)	$\infty \searrow 1$		
A ₂ (p)		1 $\nearrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$	
A(p)	$\infty \searrow 1 \nearrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$		

Tableau 4. ($l = 8$)

p	0	p_1	p_0	$\frac{1}{4}$
C(p)		+	0	-
C ₁ '(p)		+	0	-
C ₂ '(p)				+
C ₁ (p)	$-\infty \nearrow 0 \nearrow C_1(p_0) \searrow 0$			
C ₂ (p)				0 $\nearrow \sqrt{2} - \frac{1}{2}$
A ₁ '(p)	-	0	+	
A ₂ '(p)				+
A ₁ (p)	$\infty \searrow A_1(p_1) \nearrow A_1(\frac{1}{4})$			
A ₂ (p)				$A_2(\frac{1}{4}) \nearrow \frac{1}{\sqrt{2}}$
A(p)	$\infty \searrow A(p^x) \nearrow \frac{1}{\sqrt{2}}$			

Tableau 5. ($l = 8$)

§ 3. On prendra en (5)

$$(19) \quad F(M_1, M_2) = M_1^2 + M_2 - l^2$$

avec l constante positive donnée.

En ce cas on a le

THEOREME 2. A(p) de (8) varie selon le tableau suivant

p	0	p^x	∞
A(p)	$\infty \searrow$	A(p ^x) $\nearrow$	$\frac{1}{l}$

où p^x est la racine (unique dans l'intervalle $(\frac{1}{4}, \infty)$) de la fonction $C_2(p)$ de (21) et $A(p^x) = \frac{4}{5l} \frac{1+p^x}{p^x} \sqrt{1+p^x}$

Démonstration. Avec la forme (19) de $F(M_1, M_2)$ on a dans les notations de l'hypothèse

$$\varphi_1(p) = \frac{l}{\sqrt{1+p}}, \quad P_1 = (0, \infty), \text{ de sorte qu'en (8)}$$

$$(20) \quad A_1(p) = \frac{2}{l} \sqrt{1+p} B_1(p), \quad A_2(p) = \frac{2}{l} \sqrt{1+p} B_2(p)$$

en (9)

$$(21) \quad \begin{cases} B(p) = \frac{5l}{2(1+p)\sqrt{1+p}} > 0 \\ C_1(p) = -\frac{1+p}{5p} \sqrt{1-4p} + \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \\ C_2(p) = \frac{1+p}{5p} \sqrt{-1+4p} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \end{cases}$$

de sorte qu'en (9) $\text{sg } A_s'(p) = \text{sg } C_s(p)$ ($s = 1, 2$) et en (10)

$$\begin{aligned} C(p) &= \frac{5l(2-p)}{4(1+p)^2 \sqrt{1+p}}, \text{ ce qui donne le tableau 6, où } A_1(\frac{1}{4}) = \\ &= A_2(\frac{1}{4}) = \frac{2}{\sqrt{2}}, \text{ lequel, avec (21), donne } \arccos \frac{1}{2\sqrt{p^x}} = \\ &= \frac{1+p^x}{5p^x} \sqrt{-1+4p^x}, \text{ auquel cas (20) et (2) donnent } A_2(p^x) = \\ &= \frac{4}{5l} \frac{1+p^x}{p^x} \sqrt{1+p^x}, \text{ ce qui, avec le tableau 6, démontre le} \\ &\text{théorème.} \end{aligned}$$

p	0	$\frac{1}{4}$	2	p^x	∞
$C(p)$		+	0	-	
$C_1'(p)$		+			
$C_2'(p)$			-	0	+
$C_1(p)$	$-\infty \rightarrow 0$				
$C_2(p)$		0	$\searrow C_2(2) \nearrow$	0	$\nearrow \cdot \infty$
$A_1'(p)$		-			
$A_2'(p)$			-	0	+
$A_1(p)$	$\infty \searrow A_1(\frac{1}{4})$				
$A_2(p)$		$A_2(\frac{1}{4})$	$\rightarrow$	$A_2(p^x) \nearrow$	$\frac{1}{2}$
$A(p)$	∞		$\rightarrow$	$A(p^x) \nearrow$	$\frac{1}{2}$

Tableau 6.

§ 4. On prendra enfin en (5)

$$(22) \quad F(M_1, M_2) = M_1^a M_2^b - l$$

où a, b, l sont des constantes données, avec $ab(a+2b) \neq 0$ et $l > 0$.

En ce cas, on a le

THEOREME 3. 1°. Si $\frac{b}{a+2b} < 0$, alors lorsque p croît de 0 à ∞ , $A(p)$ décroît de manière monotone de ∞ à 0.

2°. Si $0 < \frac{b}{a+2b} < \frac{1}{2}$, $A(p)$ varie selon le tableau suivant :

p	0	p^x	∞
$A(p)$	0	$\nearrow A(p^x) \searrow$	0

où

$$p^x = \begin{cases} p_1 = \text{racine (unique dans l'intervalle } (0, \frac{1}{4})) \text{ de la} \\ \text{fonction } C_1(p) \text{ de (25) si } 0 < \frac{b}{a+2b} < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \text{ si } \frac{b}{a+2b} = \frac{1}{3} \quad (a = b) \\ p_2 = \text{racine (unique dans l'intervalle } (\frac{1}{4}, \infty)) \text{ de la} \\ \text{fonction } C_2(p) \text{ de (25) si } \frac{1}{3} < \frac{b}{a+2b} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

et

$$A(p^x) = \begin{cases} \phi(p_1) \text{ si } 0 < \frac{b}{a+2b} < \frac{1}{3} \\ 2\sqrt[3]{2l^{\frac{1}{2}}} \text{ si } \frac{b}{a+2b} = \frac{1}{3} \quad (a = b) \\ \phi(p_2) \text{ si } \frac{1}{3} < \frac{b}{a+2b} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\phi(p) = \frac{2}{Kp^m [2(1+2m)p - m]} \text{ avec } K \text{ et } m \text{ de (23).}$$

3°. Si $\frac{b}{a+2b} > \frac{1}{2}$, alors lorsque p croît de 0 à ∞ , $A(p)$ croît de manière monotone de 0 à ∞ .

Démonstration. Avec la forme (22) de $F(M_1, M_2)$ on a dans les notations de l'hypothèse

$$(23) \quad \varphi_1(p) = K p^m \text{ avec } K = l^{\frac{1}{a+2b}} > 0, m = -\frac{b}{a+2b} \neq 0 \text{ et } P_1 = (0, \infty)$$

de sorte qu'en (8)

$$(24) \quad \begin{cases} A_1(p) = \frac{2}{Kp^m} B_1(p) & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ A_2(p) = \frac{2}{Kp^m} B_2(p) & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

en (9)

$$(25) \quad \begin{cases} B(p) = K p^{m-1} [2(1+2m)p - m] \\ C_1(p) = -\frac{\sqrt{1-4p}}{2[2(1+2m)p - m]} + \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \\ C_2(p) = \frac{\sqrt{-1+4p}}{2[2(1+2m)p - m]} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \end{cases}$$

et en (10)

$$(26) \quad C(p) = K p^{m-1} [2(1+m)(1+2m)p - m^2]$$

En (25) et (26) $1+2m = \frac{a}{a+2b} \neq 0$ (cf. (23) et l'hypothèse de l'énoncé du théorème), et $1+m = \frac{a+b}{a+2b}$.

On supposera d'abord

$$(27) \quad \frac{b}{a+2b} > 0 \text{ et } a+b \neq 0 \quad (1+m \neq 0 \text{ et } m < 0)$$

En ce cas, on peut avoir

$$(28) \quad \begin{cases} 1^\circ. \text{ Soit } 1+2m < 0, \quad 1+m < 0 \quad (\text{si } m < -1) \\ 2^\circ. \text{ Soit } 1+2m < 0, \quad 1+m > 0 \quad (\text{si } -1 < m < -\frac{1}{2}) \\ 3^\circ. \text{ Soit } 1+2m > 0, \quad 1+m > 0 \quad (\text{si } -\frac{1}{2} < m < 0) \end{cases}$$

$$(29) \quad \begin{cases} \text{Au cas } 1^\circ \text{ de (28), en (25) } B(p) = 0 \text{ pour } p = R_1(m) = \frac{m}{2(1+2m)} \text{ et en (26) } C(p) = 0 \text{ pour } p = R_2(m) = \frac{m^2}{2(1+m)(1+2m)} \\ \text{Au cas } 2^\circ \text{ de (28), en (25) } B(p) = 0 \text{ pour } p = R_1(m) \text{ et en (26) } C(p) < 0 \text{ pour } p \geq 0. \\ \text{Au cas } 3^\circ \text{ de (28), en (25) } B(p) > 0 \text{ pour } p \geq 0 \text{ et en (26) } C(p) = 0 \text{ pour } p = R_2(m). \end{cases}$$

Les fonctions $R_1(m)$ et $R_2(m)$ varient selon les tableaux 7 et 8.

En (29)

$$(30) \quad R_1(m) - R_2(m) = \frac{m}{2(1+m)(1+2m)}$$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	∞
$R_1(m)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow \pm \infty$	0	$\nearrow \frac{1}{4}$

Tableau 7.

m	$-\infty$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	∞
$R_2(m)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow \pm \infty$	$\nearrow -2$	$\nearrow \pm \infty$	$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow 0$	$\nearrow \frac{1}{4}$

Tableau 8.

On peut remarquer - du fait que $\frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} > 1$ - que

$$(31) \quad \begin{cases} \text{si en (9) } B(p) < 0, \text{ alors } C_1(p) > 0, \\ C_2(p) < 0, \text{ par conséquent } A_1(p) < 0, A_2(p) > 0. \end{cases}$$

(29), (30), (31) et les tableaux 7 et 8 donnent les tableaux 9-12, où $A_1(\frac{1}{4}) = A_2(\frac{1}{4}) = \frac{4^{m+1}}{K}$.

p	0	$\frac{1}{4}$	$R_1(m)$	∞
B(p)		+	0	-
C(p)			-	
$C_1'(p)$	-			
$C_2'(p)$			+	
$C_1(p)$	$+\infty \searrow$	0		
$C_2(p)$		0	$\nearrow \pm \infty \nearrow$	$-\frac{\pi}{2}$
$A_1'(p)$	+			
$A_2'(p)$			+	
$A_1(p)$	0	$\nearrow A_1(\frac{1}{4})$		
$A_2(p)$		$A_2(\frac{1}{4})$	$\nearrow$	∞
A(p)	0	$\nearrow$		∞

Tableau 9. ($\frac{b}{a+2b} > \frac{1}{2}$, $m < -\frac{1}{2}$)

p	0	$\frac{1}{4}$	$R_2(m)$	p_2	∞
B(p)			+		
C(p)		-	0	+	
$C_1'(p)$		-			
$C_2'(p)$			+	0	-
$C_1(p)$	$\infty \rightarrow 0$				
$C_2(p)$		0	$\nearrow C_2(R_2(m)) \rightarrow 0$	$\rightarrow -\frac{\pi}{2}$	
$A_1'(p)$		+			
$A_2'(p)$			+	0	-
$A_1(p)$	0 $\rightarrow A_1(\frac{1}{4})$				
$A_2(p)$			$A_2(\frac{1}{4}) \rightarrow$	$A_2(p_2) \rightarrow 0$	
A(p)	0		$\rightarrow \Phi(p_2) = A_2(p_2) \rightarrow 0$		

Tableau 10. ($\frac{1}{3} < \frac{b}{a+2b} < \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{3}$)

p	0	$\frac{1}{4}$	∞
B(p)		+	
C(p)		-	0
$C_1'(p)$		-	
$C_2'(p)$			-
$C_1(p)$	$\infty \rightarrow 0$		
$C_2(p)$		0	$\rightarrow -\frac{\pi}{2}$
$A_1'(p)$		+	
$A_2'(p)$			-
$A_1(p)$	0 $\rightarrow A_1(\frac{1}{4})$		
$A_2(p)$			$A_2(\frac{1}{4}) \rightarrow 0$
A(p)	0		$\rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \rightarrow 0$

Tableau 11. ($a = b$, $m = -\frac{1}{3}$)

p	0	p_1	$R_2(m)$	$\frac{1}{4}$	∞
B(p)			+		
C(p)		-	0	+	
$C_1'(p)$		-	0	+	
$C_2'(p)$					-
$C_1(p)$	$\infty \rightarrow 0$	$\rightarrow C_1(R_2(m)) \rightarrow 0$			
$C_2(p)$				0 $\rightarrow -\frac{\pi}{2}$	
$A_1'(p)$		+	0	-	
$A_2'(p)$					-
$A_1(p)$	0 $\rightarrow A_1(p_1)$	$\rightarrow A_1(\frac{1}{4})$			
$A_2(p)$				$A_2(\frac{1}{4}) \rightarrow 0$	
A(p)	0	$\rightarrow \Phi(p_1) = A(p_1)$	$\rightarrow$		0

Tableau 12. ($0 < \frac{b}{a+2b} < \frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} < m < 0$)

(25) et les tableaux 12 et 10 donnent

$$\log \frac{1+\sqrt{1-4p_1}}{2\sqrt{p_1}} = \frac{\sqrt{1-4p_1}}{2[2(1+2m)p_1 - m]}$$

$$\arccos \frac{1}{2\sqrt{p_1}} = \frac{\sqrt{-1+4p_2}}{2[2(1+2m)p_2 - m]}$$

auquel cas (24) et (2) donnent $A_1(p_1) = \Phi(p_1)$, $A_2(p_2) = \Phi(p_2)$ avec $\Phi(p)$ de l'énoncé du théorème, ce qui, avec les tableaux 9-12 démontre le théorème dans l'hypothèse (27). Dans l'hypothèse complémentaire on peut avoir soit $m = -1$, soit $m > 0$. Si $m = -1$, on a en (25) $B(p) = \frac{K}{p^2} (1-2p)$ et en (26) $C(p) = -\frac{K}{p^2} < 0$, auquel cas on a le tableau 9 avec $R_1(-1) = \frac{1}{2}$. Si $m > 0$ ($\frac{b}{a+2b} < 0$), $A_1(p)$ et $A_2(p)$ de (24) sont évidemment des fonctions décroissantes (comme produits de fonctions décroissantes po-

sitives selon (3)) ce qui donne le tableau 13 et démontre le théorème.

p	0	$\frac{1}{4}$	∞
$A_1(p)$	$\infty \rightarrow A_1(\frac{1}{4})$		
$A_2(p)$		$A_2(\frac{1}{4}) \rightarrow 0$	0
$A(p)$	∞		0

Tableau 13. ($\frac{b}{a+2b} < 0, m > 0$)

REMARQUE 1. 1°. Si dans le théorème 3 on prend $a = -b = l = 1$ et l'on tient compte qu'en ce cas et dans les notations de l'hypothèse du § 1, $N_0 = 1$, $M_1 = \varphi_1(p) = \frac{1}{p}$, on obtient le théorème 4 de [1].

2°. Si dans le théorème 3 on prend $a = b = 1$, et l'on tient compte qu'en ce cas et dans les mêmes notations $N_0 = 1$, $M_1 = \varphi_1(p) = (\frac{l}{p})^{\frac{1}{3}}$, donc $M_2 = l^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}}$, on obtient le théorème 5 de [1].

§ 5. La méthode proposée au § 1. donne comme mentionné en ce paragraphe, la variation de $A(p)$ de (8) quand $F(M_1, M_2)$ de (5) est donnée. Il est évident que (8) donne immédiatement aussi une méthode "inverse", qui donne une fonction $F(M_1, M_2)$ de (5) lorsqu'en (8) $N_0 = 1$ et, selon la convention de la fin du § 1, la fonction $A(p)$ de (8) est donnée d'avance, auquel cas, on écrira $A(p) = \bigwedge(p)$, avec $\bigwedge(p)$ donnée. Il suffit en effet de prendre en (5) une forme particulière de $F(M_1, M_2)$, par exemple

$$(32) \quad F(M_1, M_2) = M_1 - \phi_2\left(\frac{M_2}{M_1^2}\right)$$

avec

$$(33) \quad \phi_1(p) = \begin{cases} \frac{2B_1(p)}{\bigwedge(p)} & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ \frac{2B_2(p)}{\bigwedge(p)} & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

où $\bigwedge(p)$ est une fonction donnée, positive et à dérivée seconde continue dans l'intervalle $(0, \infty)$ de la variable.

En ce cas, l'équation (6) admet évidemment la seule racine de (7)

$$(34) \quad M_1 = \varphi_1(p) = \phi_1(p), \text{ selon (3) et (33)}$$

positive et continue dans l'intervalle $(0, \infty)$ de la variable.

(8), (33) et (34) donnent

$$(35) \quad A(p) = \bigwedge(p)$$

et (32) et (33)

$$(36) \quad F(M_1, M_2) = \begin{cases} M_1 - \frac{2B_1(\frac{M_2}{M_1^2})}{\bigwedge(\frac{M_2}{M_1^2})} & \text{si } \frac{M_2}{M_1^2} \leq \frac{1}{4} \\ M_1 - \frac{2B_2(\frac{M_2}{M_1^2})}{\bigwedge(\frac{M_2}{M_1^2})} & \text{si } \frac{M_2}{M_1^2} \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

La méthode "inverse" proposée est comprise en (36) et démontrée par (35).

REMARQUE 2. 1°. Si en (32) on écrit $p = \frac{M_2}{M_1^2}$, on obtient la représentation paramétrique suivante (en paramètre p) de la relation (5) (ou plus exactement de l'arc (C_+) de (5)):

$$(37) \quad \begin{cases} M_1 = M_1(p) = \phi_1(p); & M_2 = M_2(p) = p \phi_1^2(p) \\ p \in (0, \infty) & \text{avec } \phi_1(p) \text{ de (33)} \end{cases}$$

2°. Par hypothèse, $\bigwedge''(p)$ (avec $\bigwedge(p)$ de (33)) est continue dans l'intervalle $(0, \infty)$ de la variable et (2) et (3) disent que $B_1(p)$, $B_1'(p)$, $B_1''(p)$, respectivement $B_2(p)$, $B_2'(p)$, $B_2''(p)$ sont des fonctions continues dans les intervalles $(0, \frac{1}{4}]$, respectivement $[\frac{1}{4}, \infty)$ de la variable. Il s'ensuit que $\phi_1''(p)$ (avec $\phi_1(p)$ de (33)) est continue dans l'intervalle $(0, \infty)$ de la variable.

3°. On peut remarquer qu'en (37) $M_1(p)$ s'obtient en remplaçant dans l'expression (8) de $A(p)$, $\varphi_2(p)$ par $\bigwedge(p)$, auquel cas

(9) - (11) donnent

$$\begin{aligned}
 M_1'(p) &= \begin{cases} \frac{4B(p)C_1(p)}{(1-4p)\sqrt{1-4p}\Lambda^2(p)}; C_1(p) = -\frac{\sqrt{1-4p}}{2pB(p)}\Lambda(p) + \\ + \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ \frac{4B(p)C_2(p)}{(-1+4p)\sqrt{-1+4p}\Lambda^2(p)}; C_2(p) = \frac{\sqrt{-1+4p}}{2pB(p)}\Lambda(p) - \\ - \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases} \\
 B(p) &= 2\Lambda(p) + (-1+4p)\Lambda'(p) \\
 C_1'(p) &= \frac{\sqrt{1-4p}\Lambda(p)C(p)}{2(pB(p))^2}, C_2'(p) = -\frac{\sqrt{-1+4p}\Lambda(p)C(p)}{2(pB(p))^2} \\
 C(p) &= (pB(p))' = 2\Lambda(p) + (-1+10p)\Lambda'(p) + \\ &+ p(-1+4p)\Lambda''(p) \\
 \text{sg } C_1'(p) &= \text{sg } C(p); \text{sg } C_2'(p) = -\text{sg } C(p)
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

et (37) et (2) donnent

$$\begin{aligned}
 M_2'(p) &= \begin{cases} \frac{4m_1(p)D(p)}{(1-4p)\sqrt{1-4p}\Lambda^2(p)} D_1(p) \\ D_1(p) = -\frac{\sqrt{1-4p}\Lambda(p)}{D(p)} + \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ \frac{4m_1(p)D(p)}{(-1+4p)\sqrt{-1+4p}\Lambda^2(p)} D_2(p) \\ D_2(p) = \frac{\sqrt{-1+4p}\Lambda(p)}{D(p)} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases} \\
 D(p) &= \Lambda(p) - 2p(1-4p)\Lambda'(p) \\
 D_1'(p) &= -\frac{\Lambda(p)E(p)}{2pD^2(p)}\sqrt{1-4p}; D_2'(p) = \frac{\Lambda(p)E(p)}{2pD^2(p)}\sqrt{-1+4p} \\
 E(p) &= \Lambda(p) - 24p^2\Lambda'(p) + 4p^2(1-4p)\Lambda''(p) \\
 \text{sg } D_1'(p) &= -\text{sg } E(p); \text{sg } D_2'(p) = \text{sg } E(p)
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

(39) et (38) donnent

$$\begin{aligned}
 \frac{dM_2}{dM_1} &= \begin{cases} \frac{2B(p)\sqrt{1-4p}\Lambda(p)-D(p)\log\frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}}}{\Lambda(p)\frac{\sqrt{1-4p}}{2p}\Lambda(p)-B(p)\log\frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}}} & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ \frac{2B(p)\sqrt{-1+4p}\Lambda(p)-D(p)\arccos\frac{1}{2\sqrt{p}}}{\Lambda(p)\frac{\sqrt{-1+4p}}{2p}\Lambda(p)-B(p)\arccos\frac{1}{2\sqrt{p}}} & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

avec $D(p)$ de (39) et $B(p)$ de (38).

On se servira de la notation suivante :

NOTATION. On désignera par (Δ_1) et (Δ_2) les régions du quadrant $M_1 > 0, M_2 > 0$ des axes OM_1, OM_2 séparées par la parabole (P) d'équation $4M_2 = M_1^2$ (fig.1).

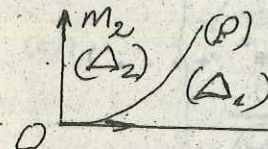


Fig. 1

REMARQUE 3. 1°. (36) et (3) disent que l'arc (C_+) et la parabole (P) ont un seul point d'intersection :

$$M \left(M_1 = \frac{4}{\Lambda(\frac{1}{4})}, M_2 = \frac{4}{\Lambda^2(\frac{1}{4})} \right).$$

2°. En (33)

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\frac{1}{4} - \varepsilon) &= \Lambda(\frac{1}{4}) - \varepsilon\Lambda'(\frac{1}{4}) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Lambda''(\frac{1}{4} - \theta_1\varepsilon) \\
 \Lambda(\frac{1}{4} + \varepsilon) &= \Lambda(\frac{1}{4}) + \varepsilon\Lambda'(\frac{1}{4}) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Lambda''(\frac{1}{4} + \theta_2\varepsilon) \\
 \Lambda'(\frac{1}{4} - \varepsilon) &= \Lambda'(\frac{1}{4}) - \varepsilon\Lambda''(\frac{1}{4} - \theta_3\varepsilon) \\
 \Lambda'(\frac{1}{4} + \varepsilon) &= \Lambda'(\frac{1}{4}) + \varepsilon\Lambda''(\frac{1}{4} + \theta_4\varepsilon) \\
 0 &\leq \theta_i \leq 1, s = 1, 4, \text{ de sorte qu'en (38) et (39)}
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

$$(41) \begin{cases} B(\frac{1}{4} - \varepsilon) = 2\Lambda(\frac{1}{4}) - 6\varepsilon\Lambda'(\frac{1}{4}) + \varepsilon^2\Lambda''(\frac{1}{4} - \theta_1\varepsilon) + 4\Lambda'(\frac{1}{4} - \theta_2\varepsilon) \\ B(\frac{1}{4} + \varepsilon) = 2\Lambda(\frac{1}{4}) + 6\varepsilon\Lambda'(\frac{1}{4}) + \varepsilon^2\Lambda''(\frac{1}{4} + \theta_2\varepsilon) + 4\Lambda'(\frac{1}{4} + \theta_1\varepsilon) \\ D(\frac{1}{4} - \varepsilon) = \Lambda(\frac{1}{4}) - 3\varepsilon\Lambda'(\frac{1}{4}) + \varepsilon^2(8\Lambda'(\frac{1}{4}) + \\ + \frac{1}{2}\Lambda''(\frac{1}{4} - \theta_1\varepsilon) + 2\Lambda''(\frac{1}{4} - \theta_2\varepsilon) - 8\varepsilon\Lambda''(\frac{1}{4} - \theta_3\varepsilon)) \\ D(\frac{1}{4} + \varepsilon) = \Lambda(\frac{1}{4}) + 3\varepsilon\Lambda'(\frac{1}{4}) + \varepsilon^2(8\Lambda'(\frac{1}{4}) + \\ + \frac{1}{2}\Lambda''(\frac{1}{4} + \theta_2\varepsilon) + 2\Lambda''(\frac{1}{4} + \theta_1\varepsilon) + 8\varepsilon\Lambda''(\frac{1}{4} + \theta_4\varepsilon)) \end{cases}$$

En utilisant (41) et les développements

$$(42) \begin{cases} \frac{1}{2} \log \frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{1-2\sqrt{\varepsilon}} = 2\sqrt{\varepsilon} (1 + \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{16}{5}\varepsilon^2 + \dots) \\ \arccos \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon}} = 2\sqrt{\varepsilon} (1 - \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{16}{5}\varepsilon^2 + \dots) \end{cases} \quad (0 < \varepsilon < \frac{1}{4})$$

on a en (38)

$$(43) \begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}^-} M_1'(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_1'(\frac{1}{4} - \varepsilon) = \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}^+} M_1'(p) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_1'(\frac{1}{4} + \varepsilon) = M_1'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\Lambda'(\frac{1}{4})} \left(\frac{4}{3} \Lambda(\frac{1}{4}) + \Lambda'(\frac{1}{4}) \right) \end{aligned}$$

et en (39)

$$(44) \begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}^-} M_2'(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_2'(\frac{1}{4} - \varepsilon) = \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}^+} M_2'(p) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} M_2'(\frac{1}{4} + \varepsilon) = M_2'(\frac{1}{4}) = \frac{8}{\Lambda'(\frac{1}{4})} \left(\frac{2}{3} \Lambda(\frac{1}{4}) - \Lambda'(\frac{1}{4}) \right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$(45) \quad \frac{dM_2}{dM_1} \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{2}{\Lambda'(\frac{1}{4})} \cdot \frac{-2\Lambda(\frac{1}{4}) + 3\Lambda'(\frac{1}{4})}{4\Lambda(\frac{1}{4}) + 3\Lambda'(\frac{1}{4})}$$

3°. Si l'on s'intéresse à la forme de l'arc (C_+) de (5), on peut recourir, selon le cas, soit aux équations (36), soit aux relations (37)-(39).

§ 6. On utilisera pour conclure la méthode proposée au §5 au cas où en (33)

$$(46) \quad \Lambda(p) = K p^m$$

avec $K > 0$ et m constantes données.

En ce cas, (36) et (5) donnent comme équations de la courbe (C) (ou plus exactement de l'arc (C_+))

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{(\frac{m_1^2}{m_2})^m}{\sqrt{m_1^2 - 4m_2}} \log \frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2\sqrt{m_2}} = \frac{K}{4} & \text{si } (C_+) \subset (\Delta_1) \\ \frac{(\frac{m_1^2}{m_2})^m}{\sqrt{4m_2 - m_1^2}} \arccos \frac{m_1}{2\sqrt{m_2}} = \frac{K}{4} & \text{si } (C_+) \subset (\Delta_2) \end{cases}$$

Si l'on s'intéresse à la forme de l'arc (C_+) il est préférable, du fait que les équations (47) ne permettent pas de déduire de manière explicite l'une des variables comme fonction de l'autre, de recourir aux relations (37)-(39) qui donnent

$$(48) \quad \begin{cases} M_1(p) = \begin{cases} A_1(p) & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ A_2(p) & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases} \\ \text{avec } A_1(p) \text{ et } A_2(p) \text{ de (24)} ; B(p) \text{ de (25)} \\ M_2(p) = p M_1^2(p) = \begin{cases} \frac{4}{K^2} p^{1-2m} B_1^2(p) & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ \frac{4}{K^2} p^{1-2m} B_2^2(p) & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases} \\ D(p) = K p^m (1 - 2m + 8mp) \\ D_1(p) = -\frac{\sqrt{1-4p}}{1-2m+8mp} + \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \end{cases}$$

$$(48) \quad \begin{cases} D_2(p) = \frac{\sqrt{-1+4p}}{1-2m+8mp} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \\ E(p) = Kp^m \left[(1-2m)^2 - 8m(1+2m)p \right] \\ \operatorname{sg} D_1'(p) = -\operatorname{sg} E(p) ; \operatorname{sg} D_2'(p) = \operatorname{sg} E(p) \end{cases}$$

On supposera d'abord

$$(49) \quad m < 0, \quad m \neq -\frac{1}{2}$$

et on écrira

$$(50) \quad R_3(m) = \frac{-1+2m}{8m}, \quad R_4(m) = \frac{(1-2m)^2}{8m(1+2m)}$$

La variation de fonctions $R_3(m)$ et $R_4(m)$ de (50) est donnée par les tableaux 14-15.

m	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	∞
$R_3(m)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow \pm \infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow \frac{1}{4}$

Tableau 14.

m	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	∞
$R_4(m)$	∞	$\searrow \frac{1}{4}$	$\searrow 0$	$\nearrow \frac{1}{4}$

Tableau 15.

Si $m < -\frac{1}{2}$, (48) et le tableau 9 disent que $M_1(p)$ est positive et croissante dans l'intervalle $(0, \infty)$. Selon la remarque 2, $M_1(p)$ de (37) admet une dérivée seconde continue dans l'intervalle $(0, \infty)$, donc $M_1'(p) \geq 0$ pour $p > 0$. Par conséquent $M_2'(p) = M_1(p)(M_1(p) + 2pM_1'(p)) > 0$ pour $p > 0$, ce qui donne le tableau 16.

$$(51) \quad \begin{cases} \text{La variation de } M_1(p) \text{ de (48) est donnée par les} \\ \text{tableaux 10-12 dans les rubriques } A_1(p) \text{ et } A_2(p) \end{cases}$$

p	0	∞
$M_1(p)$	0	$\nearrow \infty$
$M_2(p)$	0	$\nearrow \infty$

Tableau 16. ($m < -\frac{1}{2}$)

Si $-\frac{1}{2} < m < 0$, (48) et le tableau 14 donnent le tableau 17, où (44) et (46) donnent

$$(52) \quad M_2'(\frac{1}{4}) = \left(\frac{4^{m+1}}{K} \right)^2 \left(\frac{1}{3} - 2m \right)$$

$$\text{et (39)} \quad M_2'(R_3(m)) = \frac{4M_1(R_3(m))}{(-1+4R_3(m))\wedge(R_3(m))} > 0.$$

Le tableau 17 et (51) donnent le tableau 18, où

$$(53) \quad \begin{cases} p^x = \begin{cases} p_2 & \text{si } -\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \text{si } m = -\frac{1}{3} \\ p_1 & \text{si } -\frac{1}{3} < m < 0 \end{cases} \\ M_1(p^x) = \begin{cases} \Phi(p_2) & \text{si } -\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{K} & \text{si } m = -\frac{1}{3} \\ \Phi(p_1) & \text{si } -\frac{1}{3} < m < 0 \end{cases} \\ M_2(p^x) = \begin{cases} p_2 \Phi^2(p_2) & \text{si } -\frac{1}{2} < m < -\frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt[3]{4}}{K^2} & \text{si } m = -\frac{1}{3} \\ p_1 \Phi^2(p_1) & \text{si } -\frac{1}{3} < m < 0 \end{cases} \end{cases}$$

avec p_1, p_2 et $\Phi(p)$ de l'énoncé du théorème 3.

p	0	$\frac{1}{4}$	$R_3(m)$	∞
B(p)			+	
D(p)			+	-
D ₁ '(p)	-			
D ₂ '(p)			+	
D ₁ (p)	$\infty \rightarrow 0$			
D ₂ (p)		0	$\nearrow \pm \infty \nearrow$	$-\frac{16}{2}$
M ₂ '(p)		+	M ₂ '($\frac{1}{4}$)	+
M ₂ (p)	0			∞

Tableau 17. ($-\frac{1}{2} < m < 0$)

p	0	p^x	∞
M ₁ (p)	0	$M_1(p^x)$	0
M ₂ (p)	0	$M_2(p^x)$	∞

Tableau 18. ($-\frac{1}{2} < m < 0$)

(40), (43) et (46) donnent

$$\frac{dM_2}{dM_1} = \begin{cases} \frac{4}{K} p^{1-m} B_1(p) \frac{\sqrt{1-4p} - (1-2m+8mp) \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}}}{\sqrt{1-4p} - 2[-m+2(1+2m)p] \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}}} & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ \frac{4}{K_0} p^{1-m} B_2(p) \frac{\sqrt{-1+4p} - (1-2m+8mp) \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}}}{\sqrt{-1+4p} - 2[-m+2(1+2m)p] \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}}} & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

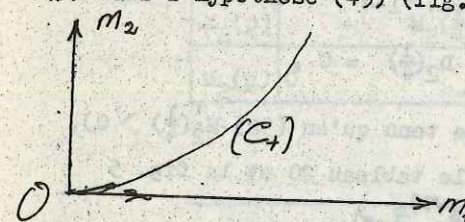
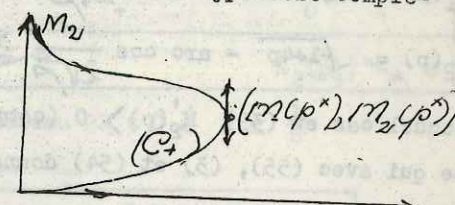
de sorte que

(54)

$$\left. \frac{dM_2}{dM_1} \right|_{p=0} = \begin{cases} 0 & \text{si } m < 1 \\ \infty & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$$

$$\left. \frac{dM_2}{dM_1} \right|_{p=\infty} = \begin{cases} \infty & \text{si } m < \frac{1}{2} \text{ et } m(1+2m) \neq 0 \\ -\frac{2}{K} & \text{si } m = 0 \\ \frac{K}{K} & \text{si } m = -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } m > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Les tableaux 16, 18 et (54) donnent la forme de l'arc (C_+) de (5) dans l'hypothèse (49) (fig. 2 et 3). Dans l'hypothèse complé-

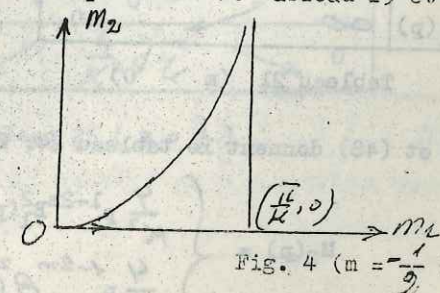
Fig. 2 ($m < -\frac{1}{2}$)Fig. 3 ($-\frac{1}{2} < m < 0$)

mentaire on peut avoir soit $m = -\frac{1}{2}$, soit $m \geq 0$. Si $m = -\frac{1}{2}$, en (38) $B(p) = \frac{K}{2p\sqrt{p}} > 0$, $C(p) = -\frac{K}{4p\sqrt{p}} < 0$, $C_1'(p) < 0$, $C_2'(p) > 0$, $C_1(p) = -\sqrt{1-4p} + \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \geq C_1(\frac{1}{4}) = 0$,

$$C_2(p) = \sqrt{-1+4p} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \geq C_2(\frac{1}{4}) = 0, \quad M_1'(p) > 0$$

(compte tenu que (43) donne $M_1'(\frac{1}{4}) = \frac{4}{3K} > 0$), $M_2'(p) = M_1(p) (M_1(p) + 2p M_1'(p)) > 0$, ce qui donne le tableau 19 et la fig. 4.

p	0	∞
M ₁ (p)	0	$\frac{K}{K}$
M ₂ (p)	0	∞

Tableau 19 ($m = -\frac{1}{2}$).Fig. 4 ($m = -\frac{1}{2}$)

Si $m = 0$, (37) donne

$$(55) \quad \begin{cases} M_1(p) = \begin{cases} \frac{2}{K} B_1(p) & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ \frac{2}{K} B_2(p) & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases} \\ M_2(p) = \begin{cases} \frac{4}{K^2} p B_1^2(p) & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ \frac{4}{K^2} p B_2^2(p) & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases} \end{cases}$$

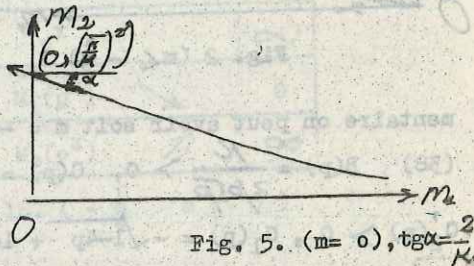
En (48) $D(p) = E(p) = K > 0$, $D_1'(p) < 0$, $D_2'(p) > 0$,

$$D_1(p) = -\sqrt{1-4p} + \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \geq D_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0,$$

$$D_2(p) = \sqrt{1-4p} - \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \geq D_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0,$$

auquel cas en (39) $M_2'(p) > 0$ (compte tenu qu'en (52) $M_2'\left(\frac{1}{4}\right) > 0$),
ce qui avec (55), (3) et (54) donne le tableau 20 et la fig. 5

p	0	∞
$M_1(p)$	∞	0
$M_2(p)$	0	$\left(\frac{E}{K}\right)^2$

Tableau 20. ($m = 0$)Fig. 5. ($m = 0$), $\tan \alpha = \frac{2}{K}$

Si $m > 0$, le tableau 13 donne le tableau 21. Si $0 < m < \frac{1}{6}$,

p	0	∞
$M_1(p)$	∞	0

Tableau 21 ($m > 0$)

le tableau 15 et (48) donnent

le tableau 22. Si $m = \frac{1}{6}$, en
(48) $E(p) = \frac{4}{9} K p (1-4p)$,

ce qui donne le tableau 23.

Si $\frac{1}{6} < m < \frac{1}{2}$, le tableau

15 et (48) donnent le tableau 24. Si enfin $m \geq \frac{1}{2}$, (37) donne

$$M_2(p) = \begin{cases} \frac{4}{K^2} p^{1-2m} B_1^2(p) & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ \frac{4}{K^2} p^{1-2m} B_2^2(p) & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

ce qui avec (3) donne le tableau 25.

p	0	$\frac{1}{4}$	$R_4(m)$	p_3	∞
D(p)			+		
E(p)			+	0	-
$D_1'(p)$	-				
$D_2'(p)$			+	0	-
$D_1(p)$	$\infty \searrow 0$				
$D_2(p)$		0	$\nearrow D_2(R_4(m))$	$\searrow 0$	$-\frac{10}{3}$
$M_2'(p)$	+	$M_2'\left(\frac{1}{4}\right)$	+	0	-
$M_2(p)$	0			$M_2(p_3)$	$\searrow 0$

Tableau 22 ($0 < m < \frac{1}{6}$)

p	0	$\frac{1}{4}$	∞
D(p)		+	
E(p)		+	0
$D_1'(p)$	-		
$D_2'(p)$			-
$D_1(p)$	$\infty \searrow 0$		
$D_2(p)$		0	$\searrow -\frac{2}{3}$
$M_2'(p)$	+	0	-
$M_2(p)$	0	$\nearrow \frac{4}{K^2} \sqrt[3]{4}$	$\searrow 0$

Tableau 23 ($m = \frac{1}{6}$)

p	0	p_4	$R_4(m)$	$\frac{1}{4}$	∞
$D(p)$			+		
$E(p)$		+	0	-	
$D_1'(p)$		-	0	+	
$D_2'(p)$					-
$D_1(p)$	∞	$\searrow$ 0	$\searrow$ $D_1(R_4(m))$	$\nearrow$ 0	
$D_2(p)$				0	$\searrow$ $-\frac{1}{2}$
$M_2'(p)$		+	0	-	
$M_2(p)$	0	$\nearrow$ $M_2(p_4)$			0

Tableau 24 ($\frac{1}{6} < m < \frac{1}{2}$)

p	0	∞
$M_2(p)$	∞	0

Tableau 25 ($m \geq \frac{1}{2}$)

Les tableaux 22-24 donnent le tableau 26, où

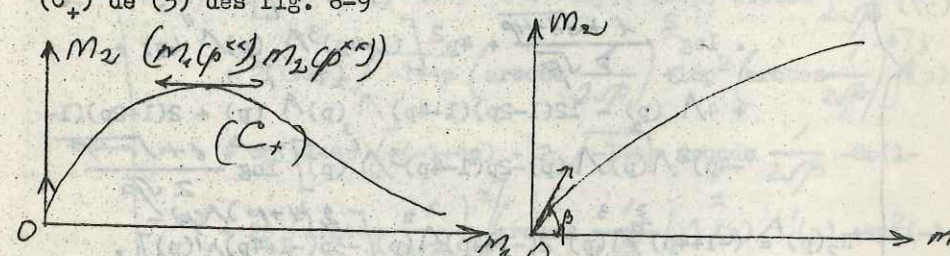
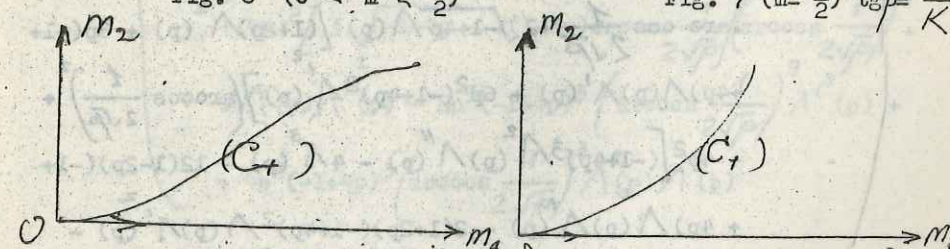
p	0	p^{xx}	∞
$M_2(p)$	0	$\nearrow$ $M_2(p^{xx})$	0

Tableau 26 ($0 < m < \frac{1}{2}$)

$$(56) \quad p^{xx} = \begin{cases} p_3 = \text{racine (unique dans l'intervalle } (\frac{1}{4}, \infty)) \\ \text{de la fonction } D_2(p) \text{ de (48) si } 0 < m < \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \text{si } m = \frac{1}{6} \\ p_4 = \text{racine (unique dans l'intervalle } (0, \frac{1}{4})) \\ \text{de la fonction } D_1(p) \text{ de (48) si } \frac{1}{6} < m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(56) \quad \begin{cases} M_1(p^{xx}) = \begin{cases} \psi(p_3) & \text{si } 0 < m < \frac{1}{6} \\ \frac{4\sqrt{2}}{K} & \text{si } m = \frac{1}{6} \\ \psi(p_4) & \text{si } \frac{1}{6} < m < \frac{1}{2} \end{cases} \\ M_2(p^{xx}) = \begin{cases} p_3^2 \psi(p_3) & \text{si } 0 < m < \frac{1}{6} \\ \frac{4\sqrt{4}}{K^2} & \text{si } m = \frac{1}{6} \\ p_4^2 \psi(p_4) & \text{si } \frac{1}{6} < m < \frac{1}{2} \end{cases} \\ \psi(p) = \frac{L}{K p^m (1 - 2m + 8mp)} \end{cases}$$

Les tableaux 21, 26, 25 et (54) donnent la forme de l'arc (C_+) de (5) des fig. 6-9

Fig. 6 ($0 < m < \frac{1}{2}$)Fig. 7 ($m = \frac{1}{2}$) $\tan \beta = \frac{\pi}{K}$ Fig. 8 ($\frac{1}{2} < m < 1$)Fig. 9 ($m = 1$)

§ 7. Si l'on s'intéresse à l'allure (de convexité) de l'arc (C_+) de (5), on peut remarquer que si l'on tient compte des expressions (37) de $M_1(p)$, (2) de $B_1(p)$, $B_2(p)$, $B_1'(p)$, $B_2'(p)$ et (38)

et (39) de $B(p)$ et $D(p)$, (40) donne

$$(57) \quad \frac{d}{dp} \frac{dM_2}{dM_1} = \begin{cases} 4N_1(p) / (1-4p) \sqrt{1-4p} \Lambda(p) \left[\sqrt{1-4p} \Lambda(p) - \right. \\ \left. - 2p \left[2\Lambda(p) - (1-4p)\Lambda'(p) \right] \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right]^2 & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ 4N_2(p) / (-1+4p) \sqrt{-1+4p} \Lambda(p) \left[\sqrt{-1+4p} \Lambda(p) - \right. \\ \left. - 2p \left[2\Lambda(p) + (-1+4p)\Lambda'(p) \right] \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right]^2 & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$N_1(p) = -(1-4p) \sqrt{1-4p} \Lambda^3(p) + 2(1-4p) \Lambda^2(p) \left[2(1-p) \Lambda(p) - \right. \\ \left. - 3p(1-4p) \Lambda'(p) \right] \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} + 2\sqrt{1-4p} \Lambda(p) \left[-(1+ \right. \\ \left. + 2p) \Lambda^2(p) + 6p(1-4p) \Lambda(p) \Lambda'(p) - 6p^2(1-4p)^2 \Lambda'^2(p) \right] \cdot \\ \cdot \log^2 \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} + 4p^2 \left[(1-4p)^3 \Lambda^2(p) \Lambda''(p) + \right. \\ \left. + 4\Lambda(p)^2 - 12(1-2p)(1-4p) \Lambda(p) \Lambda'(p) + 2(1+2p)(1- \right. \\ \left. - 4p)^2 \Lambda(p) \Lambda'(p) - 2p(1-4p)^3 \Lambda'(p) \right] \log^3 \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}}$$

$$N_2(p) = (-1+4p)^3 \Lambda^3(p) + 2(-1+4p) \Lambda^2(p) \left[-3p(-1+4p) \Lambda'(p) \right] \cdot \\ \cdot \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} + 2\sqrt{-1+4p} \Lambda(p) \left[(1+2p) \Lambda^2(p) + 6p(-1+ \right. \\ \left. + 4p) \Lambda(p) \Lambda'(p) + 6p^2(-1+4p)^2 \Lambda'(p) \right] \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^2 + \\ + 4p^2 \left[(-1+4p)^3 \Lambda^2(p) \Lambda''(p) - 4\Lambda^3(p) - 12(1-2p)(-1+ \right. \\ \left. + 4p) \Lambda(p) \Lambda'(p) - 2(1+2p)(-1+4p)^2 \Lambda(p) \Lambda'(p) - \right. \\ \left. - 2p(-1+4p)^3 \Lambda'(p) \right] \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^3.$$

Si l'on écrit $N_1(p)$ et $N_2(p)$ de (57) sous la forme

$$(58) \quad \begin{cases} N_1(p) = \left[-(1-4p) \sqrt{1-4p} + 4(1-p)(1-4p) \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} - \right. \\ \left. - 2(1+2p) \sqrt{1-4p} \log^2 \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} + 16p^2 \log^3 \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right] \Lambda(p) + \\ + 6p(1-4p) \left[-(1-4p) + 2\sqrt{1-4p} \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} - 8p(1- \right. \\ \left. - 2p) \log^2 \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right] \left(\log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right) \Lambda^2(p) \Lambda'(p) + \\ + 4p^2(1-4p)^2 \left[-3\sqrt{1-4p} + 2(1+2p) \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right] \cdot \\ \cdot \left(\log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right)^2 \Lambda(p) \Lambda'^2(p) - 8p^3(1-4p)^3 \left(\log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right)^3 \cdot \\ \cdot \Lambda^3(p) + 4p^2(1-4p)^3 \left(\log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right)^2 \Lambda(p) \Lambda''(p) \end{cases}$$

$$N_2(p) = \left[(-1+4p) \sqrt{-1+4p} + 4(-1+p)(-1+4p) \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} + \right. \\ + 2(1+2p) \sqrt{-1+4p} \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^2 - 16p^2 \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^3 \right] \Lambda(p) + \\ + 6p(-1+4p) \left[-(-1+4p) + 2\sqrt{-1+4p} \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} - 8p(1- \right. \\ \left. - 2p) \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^2 \right] \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right) \Lambda^2(p) \Lambda'(p) + 4p^2(-1+ \right. \\ + 4p)^2 \left[3\sqrt{-1+4p} - 2(1+2p) \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right] \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^2 \cdot \\ \cdot \Lambda(p) \Lambda'^2(p) - 8p^3(-1+4p)^3 \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^3 \Lambda^3(p) + \\ + 4p^2(-1+4p)^3 \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^2 \Lambda(p) \Lambda''(p) \end{cases}$$

on utilise les relations (42) et on suppose

$$4\Lambda\left(\frac{1}{4}\right) + 3\Lambda'\left(\frac{1}{4}\right) \neq 0,$$

on a donc en (57)

$$\begin{aligned}
 \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}^-} \frac{d}{dp} \frac{dm_2}{dm_1} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{d}{dp} \frac{dm_2}{dm_1} \Big|_{p=\frac{1}{4}-\varepsilon} = \\
 &= \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}^+} \frac{d}{dp} \frac{dm_2}{dm_1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{d}{dp} \frac{dm_2}{dm_1} \Big|_{p=\frac{1}{4}+\varepsilon} = \frac{d}{dp} \frac{dm_2}{dm_1} \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \\
 &= 2 \frac{-\frac{128}{15} \Lambda^3(\frac{1}{4}) + 96 \Lambda^2(\frac{1}{4}) \Lambda'(\frac{1}{4}) - 9 \Lambda^3(\frac{1}{4}) + 18 \Lambda^2(\frac{1}{4}) \Lambda'(\frac{1}{4})}{\Lambda^2(\frac{1}{4}) (4 \Lambda(\frac{1}{4}) + 3 \Lambda'(\frac{1}{4}))^2}
 \end{aligned}
 \quad (59)$$

$$\text{Or} \quad \frac{d^2 m_2}{dm_1^2} = \frac{d}{dp} \frac{dm_2}{dm_1} \quad (60)$$

de sorte que (57) donne

$$\text{sg} \frac{d^2 m_2}{dm_1^2} = \begin{cases} \text{sg } M_1'(p) N_1(p) & \text{si } 0 < p < \frac{1}{4} \\ \text{sg } M_1'(p) N_2(p) & \text{si } p > \frac{1}{4} \\ \text{avec } M_1'(p) \text{ de (38) et } N_1(p), N_2(p) \text{ de (57)} \end{cases} \quad (61)$$

D'ailleurs, (60), (59) et (43) donnent

$$\frac{d^2 m_2}{dm_1^2} \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{128 \Lambda^3(\frac{1}{4}) - 1440 \Lambda^2(\frac{1}{4}) \Lambda'(\frac{1}{4}) + 135 \Lambda^3(\frac{1}{4}) - 270 \Lambda^2(\frac{1}{4}) \Lambda'(\frac{1}{4})}{10 (4 \Lambda(\frac{1}{4}) + 3 \Lambda'(\frac{1}{4}))^3} \quad (62)$$

Si l'on utilise (61) et (62), on peut donc établir l'allure (de convexité) de l'arc (C_+) de (5). Par exemple, au cas de l'expression (46) de $\Lambda(p)$, on a en (58)

$$\begin{aligned}
 N_1(p) &= \Lambda^3(p) \left[(-1+4p) \sqrt{1-4p} + 2(1-4p) \left[2 - 3m - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2(1-6m)p \right] \arccos \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} - 2 \left[1-6m+6m^2 + 2(1+12m-24m^2)p + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 96m^2p^2 \right] \sqrt{1-4p} \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} + 4 \left[-m(1-m)(1-2m) - 24m^2(1-m)p + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 4(1+6m+12m^2-24m^3)p^2 - 32m(1-4m^2)p^3 \right] \log^3 \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right] \quad (63)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_2(p) &= \Lambda^3(p) \left[(-1+4p) \sqrt{1-4p} - 2(-1+4p) \left[2 - 3m - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2(1-6m)p \right] \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} + 2 \left[1 - 6m + 6m^2 + 2(1+12m- \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 24m^2)p + 96m^2p^2 \right] \sqrt{1-4p} \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^2 + 4 \left[m(1-m)(1- \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2m) + 24m^2(1-m)p - 4(1+6m+12m^2-24m^3)p^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 32m(1-4m^2)p^3 \right] \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^3 \right] \quad (63)
 \end{aligned}$$

Nous nous bornerons à établir l'allure de convexité de l'arc (C_+) de (5) avec la forme (46) de $\Lambda(p)$ au seul cas $m=0$, donc $\Lambda = K$. En ce cas, (63) ou (58) donnent

$$\begin{aligned}
 N_1(p) &= K^3 \left[-(1-4p) \sqrt{1-4p} + 4(1-p)(1-4p) \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} - \right. \\
 &\quad \left. - 2(1+2p) \sqrt{1-4p} \log^2 \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} + 16p^2 \log^3 \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \right] \\
 N_2(p) &= K^3 \left[(-1+4p) \sqrt{1-4p} + 4(-1+p)(-1+4p) \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} + \right. \\
 &\quad \left. + 2(1+2p) \sqrt{1-4p} \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^2 - 16p^2 \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^3 \right] \quad (64)
 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 S_1(p) &= \frac{\Lambda_1(p)}{K^3 p^2} = - \frac{(1-4p) \sqrt{1-4p}}{p^2} + \frac{4}{p^2} (1-p)(1-4p) \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} - \\
 &\quad - \frac{2}{p^2} (1+2p) \sqrt{1-4p} \log^2 \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} + 16 \log^3 \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \\
 S_2(p) &= \frac{\Lambda_2(p)}{K^3 p^2} = \frac{1}{p^2} (-1+4p) \sqrt{1-4p} + \frac{4}{p^2} (-1+p)(-1+ \\
 &\quad + 4p) \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} + \frac{2}{p^2} (1+2p) \sqrt{1-4p} \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^2 - \\
 &\quad - 16 \left(\arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \right)^3 \\
 T_1(p) &= \frac{p^3 S_1'(p)}{4(1+2p) \sqrt{1-4p} \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}}} = - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{1-4p}}{1+2p} + \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}}
 \end{aligned}$$

$$T_1'(p) = -\frac{(1-4p)\sqrt{1-4p}}{2p(1+2p)^2} \leq 0, \quad T_1(p) \geq T_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$S_1'(p) \geq 0, \quad S_1(p) \leq S_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0, \quad \text{par suite en (64)} \quad N_1(p) \leq 0.$$

De même

$$T_2(p) = \frac{p^3 \int_2'(p)}{4(1+2p)\sqrt{1+4p} \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}}} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{\sqrt{1+4p}}{1+2p} \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}}, \quad T_2'(p) = -\frac{(-1+4p)\sqrt{1+4p}}{2p(1+2p)^2} \leq 0,$$

$$T_2(p) \leq T_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0, \quad S_2'(p) \leq 0, \quad S_2(p) \leq S_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0,$$

donc en (64) $N_2(p) \leq 0$ pour la seule valeur $p = \frac{1}{4}$, parce que

$$(61) \quad \text{sg } \frac{d^2 m_2}{d m_1^2} = -\text{sg } M_1'(p), \quad \text{auquel cas le tableau 20 dit que}$$

$\frac{d^2 m_2}{d m_1^2} > 0$, ce qui donne l'allure (de convexité) de l'arc (C_+) de la fig.5.

REMARQUE 4. 1°. Il est évident que si l'on prend en (36) et

$$(37) \quad \Lambda(p) = \begin{cases} \frac{2B_1(p)}{\Lambda_0(p)} & \text{si } 0 < p \leq \frac{1}{4} \\ \frac{2B_2(p)}{\Lambda_0(p)} & \text{si } p \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

où $\Lambda_0(p)$ est une fonction donnée, positive et à dérivée seconde continue dans l'intervalle $(0, \infty)$, on a en (36)

$$(66) \quad F(M_1, M_2) = M_1 - \Lambda_0\left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

et en (37)

$$(67) \quad M_1 = M_1(p) = -\Lambda_0(p),$$

$$M_2 = M_2(p) = p \Lambda_0^2(p)$$

Le point 2° de la remarque 2 dit que $\Lambda(p)$ de (65) admet une dérivée seconde continue dans l'intervalle $(0, \infty)$ de la variable, ainsi qu'il est requis en (35).

En choisissant donc convenablement la fonction $\Lambda_0(p)$ en (65), la fonction $F(M_1, M_2)$ de (66), c'est-à-dire l'équation $F(M_1, M_2) = 0$ de l'arc (C_+) de (5) peut avoir une forme aussi simple que l'on désire. Par exemple, si $\Lambda_0(p) = K$ avec K constante positive, (66) ou (67) disent que l'arc (C_+) est une demi-droite parallèle à l'axe OM_2 .

Le choix (65) de $\Lambda(p)$ de (36) et (37) semble toutefois artificiel, c'est pourquoi nous avons préféré la forme arbitraire de $\Lambda(p)$ de ces formules.

2°. Il est également évident que si en (1) $L = \infty$, alors en (4) $A_0(m_1, m_2) = A(M_1, M_2)$, en (8) $A_0(p) = A(p)$ et en (35) $\Lambda(p) = A_0(p)$ (avec la convention de la fin du § 1). En ce cas, les relations (8)-(11) donnent la variation des longueurs $A_0(p) = A(p)$ des intervalles d'interpolation ($s = 1, N_0$), les théorèmes 1-3 la variation de la longueur $A_0(p) = A(p)$ de l'intervalle d'interpolation et l'expression de $F(M_1, M_2)$ de (32) est déterminée en (33) par la longueur donnée $\Lambda(p)$ de cet intervalle.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. RIPEANU, Intervalles d'interpolation pour des classes d'équations différentielles du second ordre, Mathematica - Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, Tome 14, n° 1, (1985), pp. 59-81

2. D. RIPEANU, Sur les racines des solutions de l'équation
 $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$,
 Mathematica - Revue d'analyse numérique et de
 théorie de l'approximation, Tome 19(42), No.1,
 (1977), pp. 95-111.

"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
 Research Seminars
 Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
 Preprint Nr. 1, 1986, pp. 175 - 187.

ON THE MODULUS OF CONVEXITY OF L_p SPACES

Ilean Serb

The modulus of convexity of L_p or $L_p[0,1]$ was obtained first by O. Hanner [3] (see also [4]). In this paper we are proposing to obtain this modulus of convexity for $L_p(\mu, H)$, H being a Hilbert space, using a measure theoretical lemma. This lemma, inspired from another lemma of T. Figiel [2], gives relations between a Banach space X and the space $L_p(\mu, X)$. The well known inequalities of Clarkson and Beurling are derived from this construction in a natural way.

Denote by (S, Σ, μ) the triplet consisting of a set S , an algebra Σ of subsets of S , and a finitely additive function μ defined on Σ and with values in the extended nonnegative semiaxis. A set $E \in \Sigma$, with $\mu(E) \neq 0$ is said to be an atom for μ if $\mu(F) = 0$ or $\mu(F) = \mu(E)$ for every set $F \subset E$, $F \in \Sigma$. The function μ is said to be purely atomic if every set $E \in \Sigma$ with $\mu(E) \neq 0$ contains an atom for μ , and μ is said to be non-atomic if there are no atoms for μ . In the following, if $E \in \Sigma$ is an atom, then automatically we suppose that $\mu(E) < \infty$. Let