

Asupra extensiei și aproximării funcțiilor semi-Lipschitz reale

COSTICĂ MUSTĂȚA

În cele ce urmează vom prezenta o clasă interesantă de funcții reale și vom studia problema extensiei funcțiilor din aceasta, evidențiind dualitatea dintre această problemă și o problemă specială de cea mai bună aproximare.

Fie X o mulțime nevidă. O funcție $d : X \times X \rightarrow (0, \infty)$ se numește *quasi-metrică* pe X dacă sunt îndeplinite condițiile:

Q_1) $d(x, y) = d(y, x) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$,

Q_2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, oricare ar fi $x, y, z \in X$.

Se observă că nu se cere condiția $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$, de aceea funcția d cu proprietățile Q_1) și Q_2) se mai numește și *metrică asimetrică* pe X .

Funcția $\bar{d} : X \times X \rightarrow (0, \infty)$ definită prin egalitatea $\bar{d}(x, y) = d(y, x)$, oricare ar fi $x, y \in X$ este de asemenea *quasi-metrică* pe X și se numește *conjugată* *quasi-metrică* d .

O *quasi-metrică* pe X generează o topologie. Topologia care are o bază de vecinătăți formată din bilele deschise:

$$B^+(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}, \quad x \in X, \varepsilon > 0,$$

se numește topologia "orward" iar topologia generată de conjugată $\bar{d}$ se numește topologia "ackward" m3. Topologia "orward" este T_0 -separată. Ea va fi T_1 -separată dacă condiția Q_1) se înlocuiește cu ([8]):

Q'_1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Un exemplu de spațiu *quasi-metric* important este $(\mathbb{R}, d)$, unde $\mathbb{R}$ este axa reală iar d se definește prin

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & \text{dacă } x \leq y, \\ 0, & \text{dacă } y < x. \end{cases}$$

Topologia generată de d este în acest caz T_0 -separată, pe când metrica

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y, & \text{dacă } x \geq y \\ 1, & \text{dacă } x < y \end{cases}$$

generează o topologie T_1 -separată ([6], [7]).

Alte exemple interesante de spații quasi-metric se găsesc în lucrările citate la bibliografie.

Fie (X, d) un spațiu quasi-metric. O funcție $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se numește d -semi-Lipschitz dacă există $K \geq 0$ (numit constantă semi-Lipschitz) astfel încât

$$(1) \quad f(x) - f(y) \leq Kd(x, y),$$

pentru orice $x, y \in X$.

Analog, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se numește $\bar{d}$ -semi-Lipschitz dacă există $L \geq 0$ astfel că

$$(2) \quad f(x) - f(y) \leq L\bar{d}(x, y) = Ld(y, x),$$

pentru orice $x, y \in X$ ([6]).

Cea mai mică constantă semi-Lipschitz pentru care are loc (1) se notează cu $\|f\|_d$ și este dată de formula

$$(3) \quad \|f\|_d = \sup \left\{ \frac{(f(x) - f(y)) \vee 0}{d(x, y)} : d(x, y) > 0, x, y \in X \right\}.$$

Analog se definește cea mai mică constantă pentru care are loc (2) și se notează cu $\|f\|_{\bar{d}}$ ([4], [6]).

O funcție $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se numește $\leq_d$ -crescătoare dacă $f(x) \leq f(y)$ ori de câte ori $d(x, y) = 0$ ([6]).

Dacă se notează cu $\mathbb{R}_{\leq_d}^X$ mulțimea funcțiilor $\leq_d$ -crescătoare pe (X, d) , această mulțime are structură de con în spațiul liniar $\mathbb{R}^X$, iar mulțimea funcțiilor d -semi-Lipschitz

$$(4) \quad d - SLipX := \{f \in \mathbb{R}_{\leq_d}^X : \|f\|_d < \infty\}$$

este subcon al lui $\mathbb{R}_{\leq_d}^X$.

Dacă $x_0 \in X$ este un punct fixat, atunci fie

$$(5) \quad d - SLip_0X := \{f \in d - SLipX : f(x_0) = 0\}.$$

Funcționala $\|\cdot\|_d : d - SLip_0X \rightarrow [0, \infty)$ este pozitiv omogenă, subaditivă și $\|f\|_d = 0$ dacă și numai dacă $f = 0$ pe X . Prin urmare $\|\cdot\|_d$ este normă asimetrică [7] pe $d - SLip_0X$, de aceea perechea $(d - SLip_0X, \|\cdot\|_d)$ se numește conul normat al funcțiilor d -semi-Lipschitz pe (X, d) . Înlocuind pe d cu $\bar{d}$ și făcând aceleași considerații se obține conul normat $(\bar{d} - SLip_0X, \|\cdot\|_{\bar{d}})$.

Se observă că $f \in d - SLip_0X$ dacă și numai dacă $-f \in \bar{d} - SLip_0X$ și în plus $\|f\|_d = \|-f\|_{\bar{d}}$ ([7], Propoziția 2, p. 59).

Alte proprietăți ale acestor conuri normate sunt prezentate în [7].

În cele ce urmează notăm $SLip_0X = (d - SLip_0X) \cap (\bar{d} - SLip_0X)$ spațiul liniar al funcțiilor d -semi-Lipschitz și $\bar{d}$ -semi-Lipschitz, adică

$$(6) \quad SLip_0X :=$$

$$\left\{ f \in \mathbb{R}_{\leq_d}^X \cap \mathbb{R}_{\leq_{\bar{d}}}^X : \sup_{d(x,y)>0} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} < \infty, f(x_0) = 0 \right\}$$

pe care-l înzestram cu norma $\|\cdot\|_B$ definită prin

$$(7) \quad \|f\|_B = \sup_{d(x,y)} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)} = \|f\|_d \vee \|f\|_{\bar{d}}.$$

Fie $Y \subset X$ cu $x_0 \in Y$, conurile normate $(d - SLip_0Y, \|\cdot\|_d)$, $(\bar{d} - SLip_0Y, \|\cdot\|_{\bar{d}})$ și spațiul normat $(SLip_0Y, \|\cdot\|_B)$. O problemă importantă pentru aceste mulțimi este de a stabili dacă există teoreme de extensie (de la Y la X) pentru elementele lor, cu păstrarea normelor corespunzătoare de pe Y .

În cazul simetric (adică (X, d) spațiu metric) cele trei mulțimi coincid deoarece $d(x, y) = \bar{d}(x, y)$ și $\|f\|_d = \|f\|_{\bar{d}} = \|f\|_B$ pentru orice funcție Lipschitz reală pe (X, d) . În acest caz, teorema lui McShane [1] afirmă că orice funcție Lipschitz pe o submulțime a unui spațiu metric admite cel puțin o extensie cu păstrarea constantei Lipschitz.

În contextul spațiilor quasi-metric avem

Teorema 1. ([4]) Fie (X, d) un spațiu quasi-metric $x_0 \in X$ un punct fixat și $Y \subset X$ cu $x_0 \in Y$. Atunci

a) Pentru orice $f \in d - SLip_0Y$ există $F_d(t) \in d - SLip_0X$ astfel încât

$$(8) \quad F_d(f)|_Y = f \quad \text{și} \quad \|F_d(f)\|_d = \|f\|_d;$$

b) Pentru orice $f \in \bar{d} - SLip_0Y$, există $F_{\bar{d}}(t) \in \bar{d} - SLip_0X$ astfel că

$$(9) \quad F_{\bar{d}}(f)|_Y = f \quad \text{și} \quad \|F_{\bar{d}}(f)\|_{\bar{d}} = \|f\|_{\bar{d}}.$$

Demonstrația Teoremei 1.a) se face arătând că

$$(10) \quad F_d(f)(x) = \inf_{y \in Y} \{f(y) + \|f\|_d d(x, y)\}, \quad x \in X \quad \text{și}$$

$$(11) \quad G_d(f)(x) = \sup_{y \in Y} \{f(y) - \|f\|_d d(y, x)\}, \quad x \in X$$

sunt extensii cu păstrarea normei $\|f\|_d$.

Analog se definesc funcțiile $F_{\bar{d}}(f)$ și $G_{\bar{d}}(f)$ în cazul $f \in \bar{d} - SLip_0Y$, care verifică cerințele din b).

Teorema 2. Oricare ar fi $f \in SLip_0Y$ există $F \in SLip_0X$ astfel încât

$$(12) \quad F|_Y = f \quad \text{și} \quad \|F\|_B = \|f\|_B.$$

Demonstrație. Fie $f \in SLip_0Y$. Atunci $f \in d - SLip_0Y$ și conform Teoremei 1.a) există $F_d \in d - SLip_0X$ astfel încât $F_d|_Y = f$ și $\|F_d\|_d = \|f\|_d$. Din faptul că f aparține și la conul $\bar{d} - SLip_0Y$ rezultă că există $F_{\bar{d}} \in \bar{d} - SLip_0X$ astfel încât $F_{\bar{d}}|_Y = f$ și $\|F_{\bar{d}}\|_{\bar{d}} = \|f\|_{\bar{d}}$.

Considerăm funcția

$$F(x) = F_d(x) \vee F_{\bar{d}}(x), \quad x \in X.$$

Pentru orice $y \in Y$ avem $F(y) = F_d(y) = F_{\bar{d}}(y) = f(y)$ deci $F|_Y = f$.

Fie acum $x, y \in X$. Apar următoarele situații:

1) $F(x) = F_d(x)$ și $F(y) = F_d(y)$.

Atunci

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= F_d(x) - F_d(y) \leq \|F_d\|_d d(x, y) \\ &= \|f\|_d d(x, y). \end{aligned}$$

2) $F(x) = F_d(x)$ și $F(y) = F_{\bar{d}}(y)$ (adică $F_d(y) \leq F_{\bar{d}}(y)$).

Atunci

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= F_d(x) - F_{\bar{d}}(y) \leq F_d(x) - F_d(y) \\ &\leq \|f\|_d \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

3) $F(x) = F_{\bar{d}}(x)$ și $F(y) = F_{\bar{d}}(y)$.

Atunci

$$F(x) - F(y) = F_{\bar{d}}(x) - F_{\bar{d}}(y) \leq \|f\|_{\bar{d}} \cdot \bar{d}(x, y).$$

Rezultă că pentru orice $x, y \in X$ avem

$$|F(x) - F(y)| \leq (\|f\|_d \vee \|f\|_{\bar{d}}) d(x, y) = \|f\|_B d(x, y)$$

deci $F|_Y = f$ și $\|F\|_B = \|f\|_B$. $\square$

Fie

$$Y^\perp := \{G \in SLip_0 X : G|_Y = 0\}.$$

Considerăm următoarea problemă de cea mai bună aproximare a funcțiilor din $SLip_0 Y$ prin elemente ale subspațiului $Y^\perp$:

Pentru $F \in SLip_0 X$ să se găsească $G_0 \in Y^\perp$ astfel încât:

$$\rho(F, Y^\perp) = \inf\{\|F - G\|_B : G \in Y^\perp\} = \|F - G_0\|_B.$$

Notând

$$P_{Y^\perp}(F) := \{G_0 \in Y^\perp : \|F - G_0\|_B = \rho(F, Y^\perp)\}$$

are loc

Teorema 3. a) Oricare ar fi $F \in SLip_0 X$, $P_Y(F) \neq \emptyset$, adică $Y^\perp$ este proximal în $SLip_0 X$. În plus

$$\rho(F, Y^\perp) = \|F|_Y\|_B, \quad \forall F \in SLip_0 X.$$

b) $G_0 \in P_{Y^\perp}(F)$ dacă și numai dacă $G_0 \in F - \mathcal{E}_B(F|_Y)$ unde

$$\mathcal{E}_B(F|_Y) = \{H \in SLip_0 X : H|_Y = F|_Y \text{ și } \|H\|_B = \|F|_Y\|_B\}.$$

c) Subspațiul $Y^\perp$ este cebășevian (adică $\text{card}(E_Y(F)) = 1, \forall F \in SLip_0(X)$) dacă și numai dacă orice funcție $f \in SLip_0 X$ are extensia unică cu păstrarea normei $\|f\|_B$.

Bibliografie

- [1] E.T. McShane, *Extension of range of functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **40**(1934), 837-842.
- [2] A. Mennucci, *On asymmetric distances*, Technical Report, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2004.
- [3] C. Mustăța, *Best approximation and unique extension of Lipschitz function*, J. Approx. Theory, **19**(1977), 222-230.
- [4] C. Mustăța, *Extensions of semi-Lipschitz functions on quasi-metric spaces*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **30**(2001), 1, 61-67.
- [5] R.R. Phelps, *Uniqueness of Hahn-Banach Extension and Unique Best Approximation*, Trans. Amer. Math. Soc., **95**(1960), 238-255.
- [6] S. Romaguera, M. Sanchis, *Semi-Lipschitz Functions and Best Approximation in quasi-metric spaces*, J. Approx. Theory, **103**(2000), 293-301.
- [7] S. Romaguera, M. Sanchis, *Properties of the normed cone of semi-Lipschitz functions*, Acta Math. Hungar., **108**(2005), 1-2, 55-70.
- [8] W.A. Wilson, *On quasi-metric spaces*, Amer. J. Math., **53**(1931), 3, 75-684.