

APLICAȚII ALE DIFERENȚEI DIVIZATE, PUSE SUB FORMĂ DE INTEGRALĂ

DE

TH. ANGHELUȚĂ

*Comunicare prezentată de MIRON NICULESCU, Membru corespondent al Academiei R.P.R.,
în ședința din 19 Octombrie 1951*

Restul seriei Taylor poate fi pus sub formă de integrală. De această formă s'a folosit Malmsten [1] pentru evaluarea restului formulei de interpolare Euler-Maclaurin, fără altă ipoteză asupra funcției de interpolat decât existența derivatelor care figurează în formulă. De altminteri, o altă evaluare a restului cu condiții mai restrictive, dar avantajoasă pentru aplicații, a fost dată de N. Sonin [2] și Hermite [3], care generalizând forma folosită de Malmsten cu atâta succes a reușit să pună restul din formula de interpolare a lui Lagrange sub formă de integrală multiplă. Hermite consideră *a priori* o integrală multiplă și demonstrează că ea reprezintă restul despre care este vorba. Vom da aici o demonstrație mai expeditivă, folosind relația de recurență a diferențelor divizate. Din demonstrație va rezulta și modul de formare a integralei. Vom da apoi o altă formă acestei integrale, ca generalizarea formei integrale a restului seriei Taylor să apară și mai bine. De aci, vom deduce imediat generalizarea formulei lui Darboux [4] și formula lui Weierstrass. O altă aplicație este exprimarea restului formulei de interpolare a lui Lagrange. Formula are avantajul că nodurile pot fi egale. Ca aplicație, regăsim evaluarea restului din formula de cuadratură a lui Simpson. Folosind expresia diferenței divizate sub formă de integrală de variabilă complexă, se stabilește pe altă cale formula dată de S. E. Michelaдзе [5].

1. Se dau punctele $z_1, \dots, z_{n+1}$, distincte în planul complex și o funcție olomorfă în domeniul de convexitate Ω al punctelor considerate. Prin definiție Ω este format din punctele comune tuturor mulțimilor convexe și închise care conțin punctele date. De altfel, există un poligon convex ale cărui vârfuri sunt unele din aceste puncte, cele rămase nefiind exterioare acestui poligon [6].

Hermite consideră integrala:

$$I[z_1, \dots, z_{n+1}, f(z)] = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(u) dt_n \quad (1)$$

unde s'a pus

$u = (z_{n+1} - z_n) t_n + (z_n - z_{n-1}) t_{n-1} + \dots + (z_2 - z_1) t_1 + z_1$
și arată că ea reprezintă diferența divizată a funcției $f(z)$, pe punctele

$$z_1, \dots, z_{n+1}, \quad [z_1, \dots, z_{n+1}, f(z)]. \quad (2)$$

Observăm mai întâi că folosirea integralei (1) este legitimă, punctul u fiind în domeniul de convexitate Ω , dacă avem:

$$0 \leq t_n \leq t_{n-1} \leq \dots \leq t_1 \leq 1.$$

Aceasta rezultă din egalitatea

$$u = t_n z_{n+1} + (t_{n-1} - t_n) z_n + \dots + (t_1 - t_2) z_2 + (1 - t_1) z_1$$

căci coeficienții $t_n, t_{n-1} - t_n, \dots, t_1 - t_2, 1 - t_1$ nu sunt negativi și suma lor este unitatea. Să demonstrăm acum că integrala (1) reprezintă diferența divizată (2). Pentru $n = 1$ propoziția este verificată, fiindcă atunci avem:

$$u = (z_2 - z_1) t_1 + z_1$$

și prin urmare,

$$I[z_1, z_2, f(z)] = \int_0^1 f'(u) dt_1 = \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} f'(u) du = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}.$$

Presupunem propoziția adevărată pentru $n - 1$ și vom arăta că se menține și pentru n . Pentru aceasta, efectuăm în (1) ultima integrală și obținem:

$$(z_{n+1} - z_n) I[z_1, \dots, z_{n+1}, f(z)] = I[z_1, \dots, z_{n-1}, z_{n+1}, f(z)] - I[z_1, \dots, z_{n-1}, z_n, f(z)].$$

Este relația de recurență pe punctele date, când se dă diferența de ordinul întâiu. Astfel, propoziția lui Hermite este dovedită. Totodată, rezultă de aici și modul de formare a integralei (1).

Se poate da integralei (1) o formă mai potrivită pentru aplicații, din care se va vedea mai bine analogia cu integrala, care reprezintă restul seriei Taylor. În acest scop, facem schimbarea de variabile,

$$t_n = t_{n-1} u_n, \quad t_{n-1} = t_{n-2} u_{n-1}, \dots, t_2 = t_1 u_2, \quad t_1 = u_1. \quad (3)$$

În urma acestei schimbări de variabile, integrala (1) devine:

$$I = \int_0^1 \dots \int_0^1 f^{(n)}(u) u_1^{n-1} u_2^{n-2} \dots u_{n-1} du_1 du_2 \dots du_n, \quad (4)$$

unde acum avem:

$$u = (z_{n+1} - z_n) u_1 u_2 \dots u_n + (z_n - z_{n-1}) u_1 u_2 \dots u_{n-1} + \dots + (z_2 - z_1) u_1 + z_1.$$

Sub această formă, se observă că funcția $u_1^{n-1} u_2^{n-2} \dots u_{n-1}$, de sub integrală, nu este negativă ca în integrala care dă restul seriei Taylor. Așa fiind, din (4) rezultă imediat generalizarea formulei lui Darboux, dată de Jensen și de Paul Montel [7]. Într'adevăr, după această formulă avem:

$$I = \lambda f^{(n)}(\xi) \int_0^1 \dots \int_0^1 u_1^{n-1} u_2^{n-2} \dots u_{n-1} du_1 du_2 \dots du_n,$$

ξ fiind un punct din domeniul de convexitate Ω și λ , un număr al cărui modul nu este mai mare ca unu. Efectuând integrala din membrul al 2-lea, obținem generalizarea anunțată

$$I = \lambda \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \quad (5)$$

În cazul particular când funcția $f(z)$ este reală și punctele $z_1, \dots, z_{n+1}$ sunt situate în intervalul (a, b) , formula (5) devine:

$$I = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

ξ fiind un punct situat între cea mai mică și cea mai mare din valorile

$$z_1, \dots, z_{n+1}.$$

Facem o mică digresiune pentru a arăta cum se deduce din (1) o integrală analoagă cu cea considerată de Paul Montel pentru obținerea formulei (5). În acest scop, introducem în loc de t_1 și t_2 noile variabile

$$\alpha_1 = z_1 + (z_2 - z_1) t_1, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + (z_3 - z_2) t_2.$$

Pentru $t_2 = t_1$, egalitatea a doua, ținând seama de prima, devine:

$$\alpha'_1 = z_1 + (z_3 - z_1) t_1.$$

În locul lui t_3 luăm variabila

$$\alpha_3 = \alpha_2 + (z_3 - z_2) t_3.$$

Pentru $t_3 = t_2$, ținând seama de expresia lui α_2 , avem:

$$\alpha'_2 = \alpha_1 + (z_4 - z_2) t_2.$$

Continuăm astfel până epuizăm toate diferențele $z_2 - z_1, \dots, z_{n+1} - z_n$, luând în locul lui t_n variabila

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + (z_{n+1} - z_n) t_n$$

și făcând $t_n = t_{n-1}$, obținem, ținând seama de expresia lui α_{n-1} ,

$$\alpha'_{n-1} = \alpha_{n-2} + (z_{n+1} - z_{n-1}) t_{n-1}.$$

Cu noile variabile $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, integrala (1) are expresia următoare:

$$I = (z_{n+1} - z_n) \dots (z_2 - z_1) \int_{z_1}^{z_2} d\alpha_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha'_1} d\alpha_2 \dots \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha'_{n-1}} f^{(n)}(\alpha_n) d\alpha_n.$$

Sub o astfel de formă, pune Paul Montel diferența divizată, pentru generalizarea formulei lui Darboux. Dar se observă că această formă prezintă dificultăți pentru obținerea acestei formule.

Se poate da o altă expresie medie integralei (4) aplicând formula lui Weierstrass, deoarece domeniul Ω este convex. După această formulă se obține:

$$I \cdot \int_0^1 \dots \int_0^1 u_1^{n-1} u_2^{n-2} \dots u_{n-1} du_1 du_2 \dots du_n = Z$$

unde Z este afixul unui punct anumit din domeniul de convexitate Ω a punctelor $z_1, \dots, z_{n+1}$. Prin urmare, deducem formula, obținută de Paul Montel [8] din (1).

$$I = \frac{Z}{n!}.$$

2. Integrala (4) ne permite să exprimăm restul formulei de interpolare a lui Lagrange. Fie $f(x)$ funcția de interpolat și $L_{n-1}(x)$ polinomul lui Lagrange pentru punctele $z_1, \dots, z_n$. Notând

$$\varphi(x) = (x - z_1) \dots (x - z_n)$$

avem următoarea expresie a restului căutat:

$$R(x) = f(x) - L_{n-1}(x) = \varphi(x) \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{f^{(n)}(v)}{v_1^{n-1} v_2^{n-2} \dots v_{n-1}} dv_1 \dots dv_n \quad (6)$$

unde

$$v = (x - z_n) v_1 v_2 \dots v_n + (z_n - z_{n-1}) v_1 v_2 \dots v_{n-1} + \dots + (z_2 - z_1) v_1 - z_1.$$

Se deduce de aici, aplicând formula (5),

$$f(x) - L_{n-1}(x) = \lambda \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!} \varphi(x),$$

λ având aceeași semnificație ca mai sus, iar η fiind în domeniul de convexitate al punctelor $x, z_1, \dots, z_n$.

Notând cu $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ polinoamele fundamentale ale lui Lagrange relative la punctele $z_1, \dots, z_n$, se poate verifica imediat că restul $R(x)$ se poate pune sub forma:

$$R(x) = \alpha_1(x) \int_{z_1}^x \frac{(z_1 - u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u) du + \dots + \alpha_n(x) \int_{z_n}^x \frac{(z_n - u)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(u) du. \quad (7)$$

Forma aceasta a restului este dată de Kowalewski [9]. Se observă însă că forma (6) dată restului este mai concisă și mai proprie pentru aplicații.

Presupunem acum că punctele $z_1, \dots, z_n$ sunt reale și că luăm integrala funcției $f(x)$ pe intervalul (a, b) . Din formula (6) deducem:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b L_{n-1}(x) dx + \int_a^b \varphi(x) g(x) dx$$

unde

$$g(x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f^{(n)}(v) v_1^{n-1} v_2^{n-2} \dots v_{n-1} dv_1 dv_2 \dots dv_n.$$

Avem astfel o expresie restrânsă a restului cu care integrala $\int_a^b L_{n-1}(x)$

reprezintă integrala $\int_a^b f(x) dx$.

Ca aplicație, considerăm formula de cuadratură a lui Simpson. Presupunem deci intervalul (a, b) împărțit în două părți egale prin punctul a_1 . În acest caz

$$\varphi(x) = (x - a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) (x - b)$$

Punând, cum se obișnuiește,

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$$

$\varphi(x)$ devine

$$\varphi_1(t) = \left(\frac{b-a}{2} \right)^3 t(t^2 - 1)$$

și, prin urmare, obținem pentru rest expresia

$$\left(\frac{b-a}{2} \right)^4 \int_{-1}^{+1} t(t^2 - 1) g_1(t) dt$$

cu notația

$$g_1(t) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f'''(v) v_1^2 v_2 dv_1 dv_2 dv_3$$

unde

$$v = \frac{b-a}{2} (t-1) v_1 v_2 v_3 + \frac{b-a}{2} v_1 v_2 + \frac{b-a}{2}.$$

Expresia restului poate fi scrisă și sub forma

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{b-a}{2} \right)^4 \int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)^2 g'_1(t) dt$$

unde avem

$$g'_1(t) = \frac{b-a}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f^{(IV)}(v) v_1^3 v_2^2 v_3 dv_1 dv_2 dv_3.$$

Aplicând integralei care figurează în rest formula mediei, obținem:

$$-\left(\frac{b-a}{2} \right)^4 g_1(\tau) \int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)^2 dt$$

τ fiind o valoare din intervalul $(-1, 1)$. Însă, în urma aceleiași formule, găsim:

$$g'_1(\tau) = \frac{b-a}{2} \frac{f^{(4)}(\eta)}{2^4}$$

η fiind un număr din (a, b) . Făcând calculele, se găsește pentru rest valoarea cunoscută:

$$-\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2} \right)^5 f^{(4)}(\eta).$$

3. Ne propunem să stabilim pe altă cale formula (14) din paragraful 3 al memoriului lui Micheladze [5].

Păstrând notațiile matematicianului sovietic, $f(a, b, \dots, l)$, va însemna în cele ce urmează diferența divizată a funcției $f(x)$ pe punctele $a, b, \dots, l$. Avem egalitatea

$$f(a, b, \dots, l) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b) \dots (z-l)}$$

integrala de variabilă complexă z fiind luată pe curba închisă C , în interiorul căreia se află punctele $a, b, \dots, l$. Făcând aici m puncte egale cu x și cele rămase notându-le cu $a_1 \dots a_n$, avem:

$$f(x, \dots, x, a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-x)^m (z-a_1) \dots (z-a_n)}.$$

În interiorul curbei C avem polii simpli $a_1, \dots, a_n$ și polul x de ordinul m . Pentru calcularea reziduurilor folosim dezvoltarea în elemente simple a fracției

$$\frac{1}{(z-a_1) \dots (z-a_n)} = \sum_{v=1}^n \frac{A_v}{z-a_v}, \quad A_v = \frac{1}{(a_v-a_1) \dots (a_v-a_{v-1})(a_v-a_{v+1}) \dots (a_v-a_n)}$$

Expresia precedentă a diferenței divizate devine atunci

$$f(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) = \sum_{v=1}^n A_v \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z-x)^m (z-a_v)}.$$

De aci, urmează expresia reziduului relativ la polul a_v

$$(-1)^m A_v \frac{f(a_v)}{(x-a_v)^m}.$$

Pentru a calcula reziduul polului x , punem $z = x + h$ și revine să aflăm coeficientul lui $\frac{1}{h}$ din dezvoltarea în serie a funcției

$$\frac{f(x+h)}{h^m (x-a_v) \left(1 + \frac{h}{x-a_v} \right)}.$$

Din dezvoltările în serie după puterile lui h a numărătorului și numitorului rezultă cu ușurință expresia următoare a reziduului căutat

$$\frac{f^{(m-1)}(x)}{(m-1)!} \sum_{v=1}^n \frac{A_v}{x-a_v} - \frac{f^{(m-2)}(x)}{(m-2)!} \sum_{v=1}^n \frac{A_v}{(x-a_v)^2} + \dots + (-1)^{m-1} f(x) \sum_{v=1}^n \frac{A_v}{(x-a_v)^m}.$$

Ținând seama de dezvoltarea în elemente simple de mai sus, obținem formula căutată

$$f(x, \dots, x, a_1, \dots, a_n) = \frac{f^{(m-1)}(x)}{(m-1)! \prod_{k=1}^n (x-a_k)} - \frac{f^{(m-2)}(x)}{(m-2)!} \sum_{v=1}^n \frac{A_v}{(x-a_v)^2} + \dots + (-1)^{m-1} \sum_{v=1}^n A_v \frac{f(x) - f(a_v)}{(x-a_v)^m}.$$

În cazul $m = 2$ găsim astfel formula (11) din același paragraf al memoriului.

ОПЕРАЦИИ ДЕЛИМОЙ РАЗНИЦЫ, ВЫРАЖЕННЫЕ В ФОРМЕ ИНТЕГРАЛА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Обобщая интегральную форму остатка ряда Тейлора, Гермит [3] выразил делимую разность функции (2) в форме кратного интеграла (1). В настоящем сообщении дается новое, весьма простое доказательство, из которого также вытекает способ образования интеграла, рассматриваемого Гермитом *priori*. Затем, заданный интеграл приводится в более удобный для операции вид (4). Отсюда вытекает как непосредственное следствие обобщения формулы Дарбу [4], (5), данное Иенсеном и П. Монтеlem [7]. Аналогично, применяя формулу Вейерштрасса, можно получить другое среднее выражение делимой разницы, данное также П. Монтеlem (8). Для того чтобы получить известную среднюю величину остатка формулы квадратуры Симпсона, применяется интеграл (4), причем нет необходимости вставлять под интеграл прерывистую функцию. Находят формулу С. Е. Микеладзе [5], и в этом случае применяется выражение разделенной разности, в виде интеграла комплексной переменной.

APPLICATIONS DE LA DIFFÉRENCE DIVISÉE, MISES SOUS LA FORME D'UNE INTÉGRALE

(RÉSUMÉ)

Hermite [3], généralisant la forme intégrale du reste de la série de Taylor, a mis la différence divisée d'une fonction (2) sous la forme d'une intégrale multiple (1). On donne dans cette Note une démonstration très simple dont résultera également la manière de former l'intégrale, considérée à priori par Hermite. Puis, on pose cette intégrale sous une forme plus commode pour les applications (4). On en déduit ainsi, immédiatement,

la généralisation de la formule de Darboux [4] (5). On trouve, d'une manière analogue, en appliquant la formule de Weierstrass, une autre expression moyenne de la différence divisée, donnée également par Paul Montel [8].

Ensuite, on applique l'intégrale (4), pour obtenir la valeur moyenne connue du reste de la formule de quadrature de Simpson, sans faire intervenir, sous l'intégrale, une fonction discontinue.

En conclusion de cette Note, on trouve une formule de S. E. Mikeladze [5], utilisant cette fois l'expression de la différence divisée sous la forme d'une intégrale de variable complexe.

BIBLIOGRAFIE

1. C. I. Malmsten, Journ. für die reine und angew. Math., 1847, 35, 55—82, Acta math. 1884—1885, 5, p. 1—46.
2. N. Sonin, Annales Sc. de l'École Norm. Sup., 1889, 3, 6, p. 257—260.
3. Ch. Hermite, Oeuvres. Gauthier-Villars, Paris, III, p. 432.
4. G. Darboux, Journ. Math. pures et appl., 1876, 3, II, p. 291—312.
5. S. E. Micheladze, Uspehi Matematicheskikh Nauc, 1948, III, 6, 28, p. 3—88.
6. B. Gongryp, Journ. Math. pures et appl., 1915, 7, 1, p. 353—365.
7. P. Montel, Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, 1932, 2, I, p. 371—384.
8. — Journ. Math. pures et appl., vol. jubilaires dédiés à M. Jacques Hadamard, 1937—1938, p. 219—231.
9. G. Kowalewski, Interpolation und genäherte Quadratur. Leipzig, Teubner, 1932, p. 73.

MATEMATICĂ

ASUPRA DISCONTINUITĂȚILOR FUNCȚIILOR DE TREI SAU MAI MULTE VARIABLE, CU NUMERE DERIVATE PARȚIALE CONTINUE

DE

S. MARCUS

Comunicare prezentată de MIRON NICOLESCU, Membru corespondent al Academiei R.P.R., în ședința din 26 Octomvrie 1951

În această comunicare se tratează, pentru funcțiile de trei sau mai multe variabile, unele probleme tratate de G. P. Tolstov [1] pentru funcțiile de două variabile.

Fie o funcție $F(X, Y, Z)$ definită într'un domeniu S . Presupunem că în acest domeniu, exceptând eventual o mulțime E , nedensă peste tot în S :

I. $F(X, Y, Z)$ cât și numerele ei derivate în raport cu Y sunt continue în raport cu Z .

II. Numerele derivate în raport cu X ale funcției $F(X, Y, Z)$ sunt continue în raport cu ansamblul variabilelor (Y, Z) .

În aceste condiții:

1. Mulțimea $\mathfrak{D}$ a punctelor de discontinuitate ale funcției $F(X, Y, Z)$ este nedensă peste tot în S .

2. Avem $\mathfrak{D} \subset \bar{E}$ și $F(X, Y, Z)$ este aproape peste tot continuă în S , dacă $\bar{E}$ este de măsură nulă.

Pentru demonstrație observăm că, în orice interval conținând puncte din S , există un subinterval fără puncte din E , deoarece E este peste tot nedensă în S . Însă, în orice punct interior unui interval din S , care nu conține puncte din E , funcția $F(X, Y, Z)$ este continuă. Într'adevăr, fie $m(x, y, z)$ un astfel de punct. Într'un plan π trecând prin m și paralel cu planul YOZ există un interval bidimensional închis b conținând m , în care, ținând seama de condiția II, numerele derivate în raport cu X , ale funcției $F(X, Y, Z)$, sunt continue, deci mărginite. Se poate scrie atunci, pentru funcția $F(X, Y, Z)$, o condiție Lipschitz față de X , uniformă față de Y și Z în intervalul bidimensional b . Există două numere pozitive K și η_1 , astfel ca

$$|F(X, Y, Z) - F(x, Y, Z)| < K |X - x| < K\eta_1 \quad (1)$$

pentru $|X - x| < \eta_1$, punctul (Y, Z) fiind oarecare în b .