

## OBSERVAȚII ASUPRA UNUI SISTEM LINIAR INFINIT

DE

F. RADO

*Comunicare prezentată de TIBERIU POPOVICIU, Membru corespondent al Academiei R.P.R.,  
în ședința din 16 Ianuarie 1953*

Metoda lui Fourier aplicată problemei determinării câmpului termic în peretele unei țevi de cazan încălzit dinafară și conținând înăuntru, până la un anumit nivel, apă și deasupra vaporii, conduce la rezolvarea unui sistem liniar cu o infinitate de ecuații, având o infinitate de necunoscute, de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^h u_n = A_h \quad ; \quad h = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Aici  $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$  și  $a_n$  tinde către infinit.

Un șir de valori  $\{u_n\}$  este soluția sistemului, dacă pentru aceste valori seriile din membrul întâi devin convergente și sumele lor egale cu  $A_h$ . Se pot concepe și soluții în alt sens: pentru ele seriile trebuie să fie somabile și suma generalizată egală cu  $A_h$ . Vom considera numai soluții în sensul convergenței.

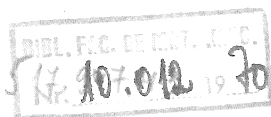
Primele încercări de studiu al sistemelor infinite au fost legate de cazuri particulare ale sistemului (1). Chiar Fourier a fost condus la un astfel de sistem printr-o problemă de căldură [1]. Totuși, sistemul (1) nu se încadrează în acele teorii ale sistemelor infinite care au devenit clasice. Sistemul (1) nu satisface condițiile în care putem aplica metoda aproximațiilor succesive, metoda reduselor sau determinanții infiniti [2].

E. Borel a dat indicații pentru rezolvarea sistemului considerat [3]. El a arătat că, fără a restrânge generalitatea, putem presupune  $|A_h| \leq K$ . A considerat apoi o funcție întreagă  $g(z)$  cu zerourile simple  $a_n$  și

$$\frac{g(z)}{z - a_n} = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} z + c_2^{(n)} z^2 + \dots \quad (2)$$

Printr'un raționament incorect el ajunge la concluzia că

$$u_n = \frac{\sum_{v=0}^{\infty} c_v^{(n)} A_v}{g'(a_n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$



este o soluție a sistemului (1), dacă condiția

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^h}{|g'(a_n)|} < \infty, \quad n=0, 1, \dots \quad (4)$$

este verificată. De aici urmează că sistemul (1) are întotdeauna soluții. De fapt, alegem un loc de  $g(z)$  funcția întreagă  $g(z) \cdot \theta(z)$ , unde funcția întreagă  $\theta(z)$  nu se anulează în punctele  $a_n$ . Condiția (4) devine atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^h}{|g'(a_n)| \cdot |\theta(a_n)|} < \infty, \quad h=0, 1, \dots$$

și putem alege  $\theta(z)$  astfel ca această serie să fie convergentă.

Arătăm printr-un exemplu că nu se ajunge la rezultatul obținut de E. Borel. Fie

$$a_n = \pi n; \quad A_0 = A_1 = 1, \quad A_2 = A_3 = \dots = 0.$$

Putem lua

$$g(z) = e^z \sin z$$

și dezvoltând funcția

$$\frac{e^z \sin z}{z - \pi n}$$

în serie după puterile lui  $z$ , avem

$$\begin{aligned} c_0^{(0)} &= 1, & c_1^{(0)} &= 1 \\ c_0^{(n)} &= 0, & c_1^{(n)} &= -\frac{1}{\pi n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Condiția (4) se verifică:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^h}{|g'(a_n)|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi n)^h}{e^{\pi n}} < \infty, \quad h=0, 1, \dots$$

Expresia (3) dă valorile pentru  $u_n$

$$\begin{aligned} u_0 &= 2 \\ u_n &= \frac{c_0^{(n)} + c_1^{(n)}}{g'(a_n)} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\pi n e^{\pi n}}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Pentru a vedea dacă aceste valori verifică sistemul (1), le înlocuim în ecuația a doua și membrul întâi devine

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n (-1)^{n+1} \frac{1}{\pi n e^{\pi n}} = \frac{1}{1 + e^{\pi}} \neq 1.$$

Deci soluțiile furnizate de (3) nu verifică sistemul, cu toate că condiția (4) este verificată.

Aducem câteva precizări în această chestiune.

1. În acest punct, se presupune  $n^r = 0(a_n)$ ,  $r > 0$ . Vom arăta că, în acest caz, dacă sistemul (1) admite două soluții distincte, ea admite o mulțime de soluții de puterea continuului.

Alături de sistemul (1) considerăm sistemul omogen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^h u_n = 0. \quad (1')$$

Soluția generală a sistemului (1) se poate scrie ca suma dintre o soluție particulară a sistemului (1) și soluția generală a sistemului (1').

Sistemul (1') admite întotdeauna soluția banală  $u_n = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$

Să presupunem că el admite și o soluție  $\bar{u}_n$  diferită de cea banală

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^h \cdot \bar{u}_n = 0, \quad h = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

ceea ce se întâmplă cu siguranță dacă sistemul (1) are două soluții distincte.

Seriile din membrul întâi al sistemului (5) converg absolut<sup>1)</sup>. Într-adevăr, alegem  $p = \left\lfloor \frac{1}{r} \right\rfloor + 1$  și folosind convergența simplă a seriei din ecuația  $a(h+p)$ -lea,

$$\begin{aligned} |a_n^{h+p} \bar{u}_n| &< 1, \quad n < N \\ |a_n^h \cdot \bar{u}_n| &< \frac{1}{a_n^p} = \frac{1}{n^{pr}} \left( \frac{n^r}{a_n} \right)^p > \text{const.} \cdot \frac{1}{n^{pr}}, \quad n > N. \end{aligned}$$

Având  $pr > 1$ , rezultă convergența seriei

$$\sigma_h = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^h \bar{u}_n|.$$

Se vede ușor că șirul  $\sigma_n$  tinde către infinit cel puțin ca o funcție exponențială; fie  $v$  un indice fix, pentru care  $a_v > 1$

$$\sigma_h > a_v^h \cdot |\bar{u}_v|.$$

Începând dela un anumit rang  $H$ , șirul  $\sigma_h$  este monoton. Fie

$$a_n < 1, \quad \text{pentru } n < k \text{ și } a_n \geq 1, \quad \text{pentru } n \geq k$$

și notăm  $\sum_{n=0}^{k-1} |\bar{u}_n| = A$ . Avem

$$\sigma_h < A + \sum_{n=k}^{\infty} a_n^h |\bar{u}_n|; \quad \sigma_{h+1} > \sum_{n=k}^{\infty} a_n^{h+1} |\bar{u}_n|.$$

Alegând un  $\mu$  fix astfel ca  $a_\mu > 2$ , se poate determina  $H$  în așa fel ca pentru  $h > H$  să avem

$$a_\mu^h \cdot |\bar{u}_\mu| > A.$$

Pentru  $h > H$

$$\sigma_{h+1} - \sigma_h > a_\mu^{h+1} |\bar{u}_\mu| - a_\mu^h |\bar{u}_\mu| - A > a_\mu^h |\bar{u}_\mu| (a_\mu - 1) - A > 0.$$

<sup>1)</sup> Pentru cazul  $a_n = n$  convergența absolută a fost arătată de Gh. Călugăreanu [4]. Aici avem o generalizare ușoară a demonstrației sale.

Fie  $\mathfrak{N}$  mulțimea funcțiilor întregi

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

pentru coeficienții cărora avem

$$\sum_{h=0}^{\infty} |c_h| \sigma_{h+p} < \infty, \quad p = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Condiția (6) se poate satisface, de exemplu, prin alegerea

$$|c_h| \leq \frac{1}{h^2 \sigma_{2h}}$$

atunci

$$|c_h| \sigma_{h+p} \leq \frac{\sigma_{h+p}}{h^2 \sigma_{2h}} \leq \frac{1}{h^2}, \quad \text{dacă } h > \max(p, H).$$

Fiecare coeficient putând fi ales dintr'un anumit interval, mulțimea  $\mathfrak{N}$  are puterea continuului. Polinoamele fac parte din  $\mathfrak{N}$ .

Inmulțind ecuațiile (5) cu  $c_h$ , începând dela  $(p+1)$ -lea și adunând, avem

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{h+p} \bar{u}_n = 0.$$

Ținând seama de (6), putem schimba ordinea sumelor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p \cdot \bar{u}_n \sum_{h=0}^{\infty} c_h a_n^h = 0$$

sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p f(a_n) \bar{u}_n = 0, \quad p = 0, 1, \dots$$

Vedem deci că sistemul (1) este satisfăcut de

$$u_n f(a_n) \bar{u}_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Mulțimea acestor soluții are puterea continuului.

*Observație.* O soluție nebanală a sistemului omogen (1') conține o infinitate de numere pozitive și o infinitate de numere negative. Intr'adevăr, dacă  $\bar{u}_{n_k} < 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$  și pentru  $n \neq n_k$ ,  $\bar{u}_n \geq 0$ , putem alege

$$f(z) = (z - a_{n_1})^2 \cdot (z - a_{n_2})^2 \dots (z - a_{n_l})^2.$$

Atunci  $u_n = f(a_n) \cdot \bar{u}_n \geq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$  și am ajuns la contradicție.

2. Definiție. O soluție  $\{u_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  a sistemului infinit (1) se zice de *clasa I* față de funcția întreagă aleasă  $g(z)$ , dacă

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \sum_{h=0}^{\infty} |c_h^{(p)} a_n^h| < \infty, \quad p = 0, 1, \dots \quad (7)$$

In caz contrar, soluția se zice de *clasa II*.

Se vede că soluția  $u_n$  tinde către zero. Impărțirea în clase s'a făcut din punctul de vedere al rapidității convergenței șirului  $u_n$  către zero.

3. Există cel mult o soluție de *clasa I* față de un anumit  $g(z)$  și ea trebuie să fie de *forma* (3).

Intr'adevăr, dacă  $\{u_n\}$  este de *clasa I*, seria dublă

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} a_n^h u_n \quad (8)$$

converge absolut. Inmulțim ecuațiile sistemului (1) cu  $c_h^{(p)}$  și adunând, obținem

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^h u_n = \sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} A_h,$$

sau, schimbând ordinea sumării,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} a_n^h = \sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} A_h.$$

Dar

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} a_n^h = \frac{g(a_n)}{a_n - a_p} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \neq p \\ g'(a_p), & \text{dacă } n = p. \end{cases} \quad (9)$$

Deci

$$u_p = \frac{\sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} A_h}{g'(a_p)}, \quad p = 0, 1, \dots$$

*Observație.* Rezultă că rapiditatea convergenței unei soluții nu poate depăși o anumită limită, în cazul când avem o infinitate de soluții.

4. Să presupunem că avem o soluție de *clasa I*. Ea este dată de formula (3), care înlocuită în (7) ne conduce la *condiția necesară pentru existența soluției de clasa I*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|c_h^{(p)} a_n^h \sum_{v=0}^{\infty} c_v^{(n)} A_v|}{|g'(a_n)|} < \infty, \quad p = 0, 1, \dots \quad (A)$$

5. Formulăm o *condiție (B)*. Dacă sistemul infinit omogen

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} \xi_h = 0, \quad p = 0, 1, \dots$$

admite numai soluția banală, spunem că este satisfăcută *condiția (B)*.

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} \xi_h = 0, \quad p = 0, 1, \dots \Rightarrow \xi_0 = \xi_1 = \dots = 0. \quad (B)$$

*Condițiile (A) și (B) împreună sunt suficiente pentru existența soluției sistemului (1).*

Admitem (A) și (B) și notăm

$$\bar{u}_n = \frac{\sum_{v=0}^{\infty} c_v^{(n)} A_v}{g'(a_n)}.$$

Vom arăta că  $\bar{u}_n$  satisface sistemul (1). Având în vedere notația introdusă, (A) se scrie sub forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} |c_h^{(p)} a_n^h \bar{u}_n| < \infty, \quad p = 0, 1, \dots$$

din care rezultă

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^h \bar{u}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_n \sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} a_n^h.$$

Ținând seamă de (9) și de expresia pentru  $\bar{u}_p$ , avem

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^h \bar{u}_n = \bar{u}_p g'(a_p)$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^h \bar{u}_n = \sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} A_h$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h^{(p)} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n^h \bar{u}_n - A_h \right) = 0,$$

de unde, în baza condiției (B), rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^h \bar{u}_n = A_h.$$

*Observație.* Condiția (A) poate fi înlocuită printr'una mai restrictivă, dar de formă mai simplă. Fie  $G$  maximul lui  $|g(z)|$ , când  $z$  descrie cercul  $\Gamma$  cu centrul în origine și raza  $R > 1$ , care nu trece prin niciun punct  $a_n$  și  $\delta = \inf |z - a_n|$ , când  $z$  descrie  $\Gamma$ , iar  $n = 0, 1, \dots$

Ținând seama de inegalitatea lui Cauchy

$$c_v^{(n)} < \frac{1}{R^v} \frac{G}{\delta}$$

și de  $|A_n| \leq K$ , avem

$$\left| \sum_{v=0}^{\infty} c_v^{(n)} A_v \right| \leq K \sum_{v=0}^{\infty} |c_v^{(n)}| < \frac{KG}{\delta} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{R^v} = \frac{KG}{\delta} \cdot \frac{R}{R-1} = K_1.$$

Deci condiția

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|c_h^{(p)}| a_n^h}{|g'(a_n)|} < \infty, \quad p = 0, 1, \dots \quad (A')$$

atrage condiția (A).

## О БЕСКОНЕЧНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Метод Фурье, применяемый в одной проблеме теплопроводности, приводит к системе (1) с бесконечным числом неизвестных  $u_n$ . Числа  $a_n$  — положительные и стремятся монотонно к бесконечности. Относительно этой системы Е. Борель нашел следующий результат: пусть  $g(z)$  — целая функция с простыми нулями  $a_n$  и (2) разложение функции  $\frac{g(z)}{z - a_n}$ , (также целой). Если условие (4) удовлетворено, то формулами (3) дается решение системы (1).

На примере показано, что результат Е. Бореля ошибочный: Пример такой:

$$a_n = \pi n; \quad A_0 = A_1 = 1, \quad A_2 = A_3 = \dots = 0, \quad g(z) = e^z \sin z.$$

В связи с этим вопросом даются некоторые уточнения.

1. Если система (1) допускает два различных решения, то она допускает бесконечное число решений.

2. Будем называть решение  $\{u_n\}$  1 класса относительно избранной функции  $g(z)$ , если имеем (7). В противном случае решение будет II класса.

3. Существует по меньшей мере одно решение 1 класса, и если оно существует, то оно дается формулой (3).

4. Дается необходимое условие для существования решения 1 класса. Это условие имеет вид (A).

5. Условия (A) и (B) достаточны для того, чтобы (3) было решением системы (1).

6. Условие (A') является более ограничительным, чем (A).

## OBSERVATIONS AU SUJET D'UN SYSTÈME LINÉAIRE INFINI

(RÉSUMÉ)

La méthode de Fourier appliquée à un problème de chaleur conduit au système (1), avec une infinité d'inconnues  $u_n$ . Les membres  $a_n$  sont positifs et tendent d'une manière monotone vers l'infini. Relativement à ce système E. Borel a trouvé le résultat suivant: soit  $g(z)$  une fonction entière avec les zéros simples  $a_n$  et (2) le développement de la fonction entière  $\frac{g(z)}{z - a_n}$ . Si la condition (4)

est vérifiée, les formules (3) donnent une solution du système (1).

On montre par un exemple que le résultat de Borel n'est pas correct. L'exemple est le suivant:

$$a_n = \pi n, \quad A_0 = A_1 = 1, \quad A_2 = A_3 = \dots = 0, \quad g(z) = e^z \sin z.$$

Dans cette note, l'Auteur apporte quelques précisions sur cette question.

1. Si le système (1) admet deux solutions distinctes, il en admet une infinité.

2. La solution  $\{u_n\}$  est de 1<sup>ère</sup> classe par rapport à  $g(z)$ , si la condition (7) est remplie. Dans le cas contraire, la solution est dite de II<sup>ème</sup> classe.

3. Il n'existe, tout au plus, qu'une seule solution de I<sup>ère</sup> classe et, si elle existe, elle est donnée par la formule (3).
4. On donne une condition nécessaire pour l'existence de la solution de I<sup>ère</sup> classe. Elle a la forme (A).
5. Les conditions (A) et (B) sont suffisantes pour que (3) soit la solution du système (1).
6. La condition (A') entraîne (A).

## BIBLIOGRAFIE

1. F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*. Collection Borel, Paris, 1913.
  2. L. V. Kantorovici și V. I. Krilov, *Približenie metod vișovo analiza*. Gosteh-teorizdat, Moscova-Leningrad, 1950, p. 30—56.
  3. E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*. Annales de l'Ecole Norm. Sup., Paris, 1895.
  4. G. Călugăreanu, *Asupra unei probleme de propagarea căldurii*. Studii și Cercetări Științifice, Cluj 1952, Anul III, 3—4, p. 10—17.
-