

O GENERALIZARE A UNEI PROPRIETĂȚI CARE INTERVINE ÎN METODA LUI RUNGE-KUTTA PENTRU INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

DE

D. V. IONESCU

Comunicare prezentată de academician GR. C. MOISIL în ședința din 12 ianuarie 1954

1. Să considerăm ecuația diferențială

$$y' = \varphi(x, y) \quad (1)$$

variabilele x și y fiind reale.

Presupunem că funcția $\varphi(x, y)$ este desfășurabilă în serie întreagă după puterile lui $x - x_0$, $x - y_0$, este absolut convergentă când $|x - x_0| < r$ și $|y - y_0| < R$. În acest caz, se știe că ecuația diferențială (1) are o integrală unică trecând prin punctul de coordonate (x_0, y_0) și că această integrală se poate dezvolta într-o serie întreagă după puterile lui $x - x_0$, absolut convergentă într-un anumit interval $|x - x_0| < r_1 < r$.

Scriind x în loc de x_0 și y în loc de y_0 , diferența $y(x + h) - y(x)$ unde $|h| < r_1$, este dată de seria întreagă.

$$y(x + h) - y(x) = \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \dots \quad (2)$$

Ecuația diferențială (1), împreună cu condiția inițială $y(x) = y$, permite calculul coeficienților $y'(x)$, $y''(x)$... din dezvoltarea (2).

C. Runge [1] ocupându-se de integrarea numerică a ecuației diferențiale [1], a arătat că dacă se calculează

$$\begin{aligned} m_1 &= h \varphi(x, y) \\ m_2 &= h \varphi\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{m_1}{2}\right) \\ m_3 &= h \varphi(x + h, y + m_1) \\ m_4 &= h \varphi(x + h, y + m_3) \end{aligned} \quad (3)$$

atunci funcția de h

$$K = \frac{m_1 + 4m_2 + m_4}{6}, \quad (3')$$

nulă pentru $h = 0$, dezvoltată în serie după puterile lui h , are primii trei termeni identici cu primii trei termeni din dezvoltarea (2).

W. Kutta [2] a arătat că dacă se calculează

$$\begin{aligned} n_1 &= h \varphi(x, y) \\ n_2 &= h \varphi\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{n_1}{2}\right) \\ n_3 &= h \varphi\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{n_2}{2}\right) \\ n_4 &= h \varphi(x + h, y + n_3) \end{aligned} \quad (4)$$

atunci funcția de h

$$K = \frac{n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4}{6}, \quad (4')$$

nulă pentru $h = 0$, dezvoltată în serie după puterile lui h , are primii patru termeni identici cu primii patru termeni din dezvoltarea (2).

Se știe că proprietatea arătată de C. Runge și W. Kutta este utilizată la integrarea numerică, a ecuațiilor diferențiale.

În această notă se dă o generalizare a proprietății de mai sus, indicându-se un procedeu regulat care să permită construirea unei funcții K de h , cu ajutorul unor formule de tipul (3), (3') sau (4), (4') a cărui dezvoltare, după puterile lui h , să aibă primii m termeni, unde m este un număr dat, identici cu termenii corespunzători ai dezvoltării (2), adică să avem

$$K = \frac{h}{1!} y' + \frac{h^2}{2!} y'' + \dots + \frac{h^m}{m!} y^{(m)} + \dots \quad (5)$$

2. Să considerăm nodurile

$$x + \lambda_i h \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

și o formulă de cvadratură.

$$\int_x^{x+h} f(s) ds = \sum_{i=1}^n A_i f(x + \lambda_i h) \quad (7)$$

unde numerele λ_i și A_i sînt astfel alese ca formula (7) să fie exactă pentru un polinom oarecare de gradul $p \geq n - 1$.

Scriind că formula 7 este verificată de

$$f(s) = (s - x)^K \quad (K = 0, 1, \dots, p)$$

vom avea formulele

$$\sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^k = \frac{h}{k+1} \quad (K = 0, 1, \dots, p). \quad (8)$$

În formula (7) să înlocuim pe $f(s)$ cu $y'(s)$ în primul membru iar în membrul al doilea să dezvoltăm pe $y'(x + \lambda_i h)$ după puterile lui h , mărginindu-ne la primii $p + 1$ termeni. Vom avea

$$y'(x + \lambda_i h) = \sum_{k=0}^p \frac{\lambda_i^k h^k}{k!} y^{(k+1)}(x) + R_i$$

Formula (7) ne va da

$$\begin{aligned} y(x+h) - y(x) &= \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^p \frac{\lambda_i^k h^k}{k!} y^{(k+1)}(x) + \sum_{i=1}^n A_i R_i \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{h^k}{k!} y^{(k+1)}(x) \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^k + \sum_{i=1}^n A_i R_i \end{aligned}$$

și ținînd seama de ecuațiile (8), obținem

$$y(x+h) - y(x) = \frac{h}{1!} y' + \frac{h^2}{2!} y'' + \dots + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)} + \dots \quad (9)$$

Formula de cvadratură (7) ne conduce deci la dezvoltarea (9) a diferenței $y(x+h) - y(x)$, în care s-au pus în evidență primii $p + 1$ termeni.

3. În formula de cvadratură (7) să înlocuim pe $f(s)$ cu $y' = \varphi(x, y)$ alegînd nodurile $x + \lambda_i h$, astfel ca ele să intre în intervalul de existență al integralei ecuației diferențiale (1) care trece prin punctul (x, y) . Vom obține

$$y(x+h) - y(x) = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x + \lambda_i h, y_i), \quad (10)$$

unde s-a notat

$$y_i = y(x + \lambda_i h).$$

Se știe că dezvoltînd membrul al doilea al formulei (10) după puterile lui h , obținem dezvoltarea (9).

Demonstrația de la punctul 2 arată că, dacă printr-un mijloc oarecare s-au putut calcula diferențele

$$K_i = y(x + \lambda_i h) - y(x),$$

cu ajutorul funcției $\varphi(x, y)$, astfel că dezvoltînd după puterile lui $\lambda_i h$ avem

$$K_i = \frac{\lambda_i h}{1!} y' + \frac{(\lambda_i h)^2}{2!} y'' + \dots + \frac{(\lambda_i h)^p}{p!} y^{(p)} + \dots, \quad (11)$$

atunci funcția de h

$$K = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x + \lambda_i h, y + k_i) \quad (12)$$

dezvoltată după puterile lui h , ne va da

$$K = \frac{h}{1!} y' + \frac{h^2}{2!} y'' + \dots + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y^{(p+1)} + \dots, \quad (13)$$

adică funcțiile de h , $y(x+h) - y(x)$ și K au primii $p+1$ termeni din dezvoltările lor Tayloriene, identici.

Rămâne să arătăm procedeul regulat, care permite obținerea numerelor k_i , cu ajutorul cărora se calculează numărul K și aceasta începând cu $p=0,1,2,\dots$

Este evident că pentru $p=0$, vom lua

$$y_i = y(x), \quad K_i = 0$$

și formula (12) ne va da

$$K = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x + \lambda_i h y) = h y' + \dots$$

4. C a z u l $p=1$.

Vom lua

$$K_i = \lambda_i h \varphi(x, y) \quad (14)$$

și formula (12) ne va da

$$K = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x + \lambda_i h, y + k_i) = h y' + \frac{h^2}{2!} y'' + \dots \quad (14')$$

Exemplu. Să folosim formula de cvadratură a trapezului

$$\int_x^{x+h} f(s) ds = \frac{h}{2} [f(x) + f(x+h)]$$

care este verificată de un polinom oarecare de gradul întâi. Avem

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1$$

$$A_1 = \frac{h}{2}, \quad A_2 = \frac{h}{2}$$

Formula (14) ne arată că vom putea lua

$$K_1 = 0, \quad K_2 = h \varphi(x, y)$$

iar formula (14') ne va da

$$K = \frac{h \varphi(x, y) + h \varphi(x+h, y+K_2)}{2} = h y' + \frac{h^2}{2!} y'' + \dots$$

Deducem astfel, următorul procedeu practic pentru construirea funcției K .

Se calculează cu ajutorul funcției $\varphi(x, y)$,

$$l_1 = h \varphi(x, y) \quad (15)$$

$$l_2 = h \varphi(x+h, y+l_1)$$

și atunci

$$K = \frac{l_1 + l_2}{2} = h y' + \frac{h^2}{2!} y'' + \dots \quad (15')$$

S-ar fi putut întrebuița și formula de cvadratură cu un singur nod

$$\int_x^{x+h} f(s) ds = h f\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

exactă pentru un polinom oarecare de gradul întâi.

În acest caz avem

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad A_1 = h$$

și deci următorul procedeu practic pentru construirea funcției K se calculează cu ajutorul funcției $\varphi(x, y)$

$$l_1 = \frac{h}{2} \varphi(x, y) \quad (16)$$

și atunci

$$K = h \varphi\left(x + \frac{h}{2}, y + l_1\right) = h y' + \frac{h^2}{2!} y'' + \dots \quad (16')$$

5. C a z u l $p=2$,

Vom lua

$$k_i = \lambda_i h y' + \frac{(\lambda_i h)^2}{2!} y'' + \dots \quad (17)$$

și atunci conform teoriei generale de la punctul 3, vom avea

$$K = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x + \lambda_i h, y + K_i) = h y' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \dots \quad (17')$$

Pentru a preciza numerele K_i ne folosim de procedeul practic de la punctul 4. Utilizând formulele (15) vom calcula

$$l_{i,1} = \lambda_i h \varphi(x, y) \quad (18)$$

$$l_{i,2} = \lambda_i h \varphi(x + \lambda_i h, y + l_{i,1})$$

și vom avea

$$K_i = \frac{l_{i,1} + l_{i,2}}{2} = \lambda_i h y' + \frac{(\lambda_i h)^2}{2!} y'' + \dots \quad (18')$$

Dacă utilizăm formulele (16), vom calcula

$$l'_{i,1} = \frac{\lambda_i h}{2} \varphi(x, y) \quad (19)$$

și vom avea

$$K_i = \lambda_i h \varphi\left(x + \frac{\lambda_i h}{2}, y + l'_{i,1}\right) = \lambda_i h y' + \frac{(\lambda_i h)^2}{2!} y'' + \dots \quad (19')$$

Exemplu. Să considerăm formula de cvadratură cu două noduri

$$\int_x^{x+h} f(s) ds = \frac{h}{4} \left[f(x) + 3f\left(x + \frac{2h}{3}\right) \right]$$

care este verificată de un polinom oarecare de gradul al doilea.

Avem

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{2}{3}$$

$$A_1 = \frac{h}{4}, \quad A_2 = \frac{3h}{4}$$

Aplicînd formulele (18) și (18') vom avea

$$l_{1,1} = 0, \quad l_{1,2} = 0, \quad K_1 = 0$$

$$l_{2,1} = \frac{3}{2} h \varphi(x, y)$$

$$l_{2,2} = \frac{2}{3} h \varphi\left(x + \frac{2h}{3}, y + l_{2,1}\right)$$

$$K_2 = \frac{l_{2,1} + l_{2,2}}{2} = \frac{2h}{3} y' + \frac{\left(\frac{2h}{3}\right)^2}{2!} y'' + \dots$$

Aplicînd formula (17'), vom avea

$$K = \frac{1}{4} \left[h \varphi(x, y) + 3h \varphi\left(x + \frac{2h}{3}, y + K_2\right) \right] = hy' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \dots$$

Sîntem astfel conduși de următorul procedeu practic pentru construirea funcției K .

Se calculează cu ajutorul funcției $\varphi(x, y)$

$$l_1 = h \varphi(x, y),$$

$$l_2 = \frac{2h}{3} \varphi\left(x + \frac{2h}{3}, y + \frac{2l_1}{3}\right) \quad (20)$$

$$l_3 = h \varphi\left(x + \frac{2h}{3}, y + \frac{l_1}{3} + \frac{l_2}{2}\right)$$

și apoi

$$K = \frac{l_1 + 3l_3}{4} = hy' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \dots \quad (20')$$

Dacă am fi folosit formulele (19) și (19'), am fi fost conduși la următorul procedeu practic.

Se calculează cu ajutorul funcției $\varphi(x, y)$

$$l_1 = h \varphi(x, y),$$

$$l_2 = h \varphi\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{l_1}{3}\right), \quad (21)$$

$$l_3 = h \varphi\left(x + \frac{2h}{3}, y + \frac{2l_2}{3}\right)$$

și apoi

$$K = \frac{l_1 + 3l_3}{4} = hy' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \dots \quad (21')$$

6. Cazul $p = 3$.

Ținînd seama de procedeul indicat la punctul 5, se pot calcula funcțiile k_i , astfel ca să avem

$$K_i = \lambda_i hy' + \frac{(\lambda_i h)^2}{2!} y'' + \frac{(\lambda_i h)^3}{3!} y''' + \dots \quad (22)$$

Atunci formula (12) ne va da imediat

$$K = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x + \lambda_i h, y + k_i) \quad (22')$$

unde coeficienții A_i sînt luați dintr-o formulă de cvadratură de tipul

$$\int_x^{x+h} f(s) ds = \sum_{i=1}^n A_i f(x + \lambda_i h)$$

care este verificată de un polinom oarecare de gradul al treilea.

Vom avea

$$K = hy' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \frac{h^4}{4!} y^{(4)} + \dots \quad (22'')$$

Exemplu. Să pornim de la formula lui Simpson

$$\int_x^{x+h} f(s) ds = \frac{h}{6} \left[f(x) + 4f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f(x+h) \right]$$

care este verificată de polinomul de gradul al treilea cu coeficienți arbitrari.

Pentru acest caz avem

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = 1$$

$$A_1 = \frac{h}{6}, \quad A_2 = \frac{4h}{6}, \quad A_3 = \frac{h}{6}.$$

Pentru a calcula funcțiile k_1, k_2, k_3 utilizăm de exemplu formulele (21) și (21').

Pentru $\lambda_1 = 0$, vom avea $K_1 = 0$.

Pentru $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, calculăm

$$l_{2,1} = \frac{h}{2} \varphi(x, y)$$

$$l_{2,2} = \frac{h}{2} \varphi\left(x + \frac{h}{6}, y + \frac{l_1}{3}\right)$$

$$l_{2,3} = \frac{h}{2} \varphi\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{2l_2}{3}\right)$$

$$K_2 = \frac{l_{2,1} + 3l_{2,3}}{4} = \frac{h}{2} y' + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2!} y'' + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3!} y''' + \dots$$

Pentru $\lambda_3 = 1$, calculăm

$$l_{3,1} = h \varphi(x, y)$$

$$l_{3,2} = h \varphi\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{l_1}{3}\right)$$

$$l_{3,3} = h \varphi\left(x + \frac{2h}{3}, y + \frac{2l_2}{3}\right)$$

$$K_3 = \frac{l_{3,1} + 3l_{3,3}}{4} = hy' + \frac{h^2}{2} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \dots$$

Aplicînd formula (12) calculăm

$$l_1 = h \varphi(x, y)$$

$$l_2 = h \varphi\left(x + \frac{h}{2}, y + k_2\right) \quad (23)$$

$$l_3 = h \varphi(x + h, y + k_3)$$

și vom avea în sfîrșit

$$K = \frac{l_1 + 4l_2 + l_3}{6} = hy' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \frac{h^4}{4!} y^{(4)} + \dots \quad (23')$$

7. C a z u l $p = 4$.

Pentru a construi funcția K , relativă la $p = 4$, putem folosi formulele de la punctul 6, care să ne dea funcțiile k_i . Este preferabil însă în acest caz să se întrebuițeze procedeul lui Kutta.

Avînd

$$K_i = (\lambda_i h) y' + \frac{(\lambda_i h)^2}{2!} y'' + \frac{(\lambda_i h)^3}{3!} y''' + \frac{(\lambda_i h)^4}{4!} y^{(4)} + \dots \quad (24)$$

formula (12) ne va da

$$K = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x + \lambda_i h, y + k_i) \quad (24')$$

unde coeficienții A_i sînt luați dintr-o formulă cu cvadratură de tipul

$$\int_x^{x+h} f(s) ds = \sum_{i=1}^n A_i f(x + \lambda_i h)$$

care este verificată de un polinom oarecare de gradul al patrulea.

Vom avea

$$K = hy' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \frac{h^4}{4!} y^{(4)} + \frac{h^5}{5!} y^{(5)} + \dots \quad (24'')$$

Exemple. 1° Să pornim de la formula de cvadratură cu trei noduri

$$\int_x^{x+h} f(s) ds = \frac{h}{36} \left\{ 4f(x) + (16 + \sqrt{6})f\left(x + \frac{6 - \sqrt{6}}{10}h\right) + (16 - \sqrt{6})f\left(x + \frac{6 + \sqrt{6}}{10}h\right) \right\} \quad (25)$$

care este verificată de un polinom oarecare de gradul al patrulea.

În acest caz, avem

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{6 - \sqrt{6}}{10}, \quad \lambda_3 = \frac{6 + \sqrt{6}}{10}$$

$$A_1 = \frac{4h}{36}, \quad A_2 = \frac{16 + \sqrt{6}}{36}h, \quad A_3 = \frac{16 - \sqrt{6}}{36}h$$

Pentru a calcula funcțiile k_i aplicăm formulele (4).

Pentru $\lambda_1 = 0$, vom avea $K_{1=0}$

Pentru $\lambda_2 = \frac{6 - \sqrt{6}}{10}$ calculăm

$$l_{2,1} = \frac{6 - \sqrt{6}}{10} h \varphi(x, y)$$

$$l_{2,2} = \frac{6 - \sqrt{6}}{10} h \varphi\left(x + \frac{6 - \sqrt{6}}{20}h, y + \frac{l_{2,1}}{2}\right)$$

$$l_{2,3} = \frac{6 - \sqrt{6}}{10} h \varphi\left(x + \frac{6 - \sqrt{6}}{20}h, y + \frac{l_{2,2}}{2}\right)$$

$$l_{2,4} = \frac{6 - \sqrt{6}}{10} h \varphi\left(x + \frac{6 - \sqrt{6}}{10}h, y + l_{2,3}\right)$$

$$K_2 = \frac{l_{2,1} + 2l_{2,2} + l_{2,3} + l_{2,4}}{6}$$

Pentru $\lambda_3 = \frac{6 + \sqrt{6}}{10}$, calculăm

$$\begin{aligned} l_{3,1} &= \frac{6 + \sqrt{6}}{10} h \varphi(x, y) \\ l_{3,2} &= \frac{6 + \sqrt{6}}{10} h \varphi\left(x + \frac{6 + \sqrt{6}}{20} h, y + \frac{l_{3,1}}{2}\right) \\ l_{3,3} &= \frac{6 + \sqrt{6}}{10} h \varphi\left(x + \frac{6 + \sqrt{6}}{20} h, y + \frac{l_{3,2}}{2}\right) \\ l_{3,4} &= \frac{6 + \sqrt{6}}{10} h \varphi\left(x + \frac{6 + \sqrt{6}}{10} h, y + l_{3,3}\right) \\ K_3 &= \frac{l_{3,1} + 2l_{3,2} + 2l_{3,3} + l_{3,4}}{6} \end{aligned}$$

Aplicînd formula (12) calculăm

$$\begin{aligned} l_1 &= h \varphi(x, y) \\ l_2 &= h \varphi\left(x + \frac{6 - \sqrt{6}}{10} h, y + k_2\right) \\ l_3 &= h \varphi\left(x + \frac{6 + \sqrt{6}}{10} h, y + k_3\right) \end{aligned} \quad (26)$$

și în sfîrșit

$$K = \frac{1}{36} \left[4l_1 + (16 + \sqrt{6})l_2 + (16 - \sqrt{6})l_3 \right] \quad (26')$$

Vom avea

$$K = hy' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \frac{h^4}{4!} y^{(4)} + \frac{h^5}{5!} y^{(5)} + \dots \quad (26'')$$

2° Dăm alt exemplu pornind dela o formulă de cvadratură dată de S. E. Mikela dze [3] și care are un avantaj față de exemplul precedent deoarece întrebunțează noduri în care numerele λ_i sînt raționale. Formula este

$$\int_x^{x+h} f(s) ds = \frac{h}{24} [gf(x) + 19f(x+h) - 5f(x+2h) + f(x+3h)]$$

și ea este verificată de un polinom oarecare de gradul al patrulea.

Pentru această formulă avem

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \lambda_2 &= 1, & \lambda_3 &= 2, & \lambda_4 &= 3 \\ A_1 &= \frac{9h}{24}, & A_2 &= \frac{19h}{24}, & A_3 &= -\frac{5h}{24}, & A_4 &= \frac{h}{24}. \end{aligned}$$

Calculăm funcțiile k_i tot cu formulele (4) ale lui Kutta.

Pentru $\lambda_1 = 0$, avem $k_1 = 0$.

Pentru $\lambda_2 = 1$, avem

$$\begin{aligned} l_{2,1} &= h \varphi(x, y) \\ l_{2,2} &= h \varphi\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{l_{2,1}}{2}\right) \\ l_{2,3} &= h \varphi\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{l_{2,2}}{2}\right) \\ l_{2,4} &= h \varphi(x + h, y + l_{2,3}) \\ k_2 &= \frac{l_{2,1} + 2l_{2,2} + 2l_{2,3} + l_{2,4}}{6} \end{aligned}$$

Pentru $\lambda_3 = 2$, avem

$$\begin{aligned} l_{3,1} &= 2h \varphi(x, y) \\ l_{3,2} &= 2h \varphi\left(x + h, y + \frac{l_{3,1}}{2}\right) \\ l_{3,3} &= 2h \varphi\left(x + h, y + \frac{l_{3,2}}{2}\right) \\ l_{3,4} &= 2h \varphi(x + 2h, y + l_{3,3}) \\ k_3 &= \frac{l_{3,1} + 2l_{3,2} + 2l_{3,3} + l_{3,4}}{6} \end{aligned}$$

Pentru $\lambda_4 = 3$, avem

$$\begin{aligned} l_{4,1} &= 3h \varphi(x, y) \\ l_{4,2} &= 3h \varphi\left(x + \frac{3h}{2}, y + \frac{l_{4,1}}{2}\right) \\ l_{4,3} &= 3h \varphi\left(x + \frac{3h}{2}, y + \frac{l_{4,2}}{2}\right) \\ l_{4,4} &= 3h \varphi(x + 3h, y + l_{4,3}) \\ K_4 &= \frac{l_{4,1} + 2l_{4,2} + 2l_{4,3} + l_{4,4}}{6} \end{aligned}$$

Aplicînd formula (12) calculăm

$$\begin{aligned} l_1 &= h \varphi(x, y) \\ l_2 &= h \varphi(x + h, y + k_2) \\ l_3 &= h \varphi(x + 2h, y + k_3) \\ l_4 &= h \varphi(x + 3h, y + k_4) \end{aligned} \quad (27)$$

și în sfârșit

$$K = \frac{1}{24} (9l_1 + 19l_2 - 5l_3 + l_4) \quad (27')$$

Vom avea

$$K = hy' + \frac{h^2}{2!} y'' + \frac{h^3}{3!} y''' + \frac{h^4}{4!} y^{(4)} + \frac{h^5}{5!} y^{(5)} + \dots \quad (27'')$$

8. Exemplele tratate la punctele 4,5,6,7 arată cum se construiește funcția $K(hR)$ atașată ecuației diferențiale (1) cu ajutorul unor formule de tipul (3); (3'), care dezvoltată în serie după puterile lui h , să aibă primii m termeni identici cu primii m termeni ai dezvoltării (2).

Metoda dată mai sus pune în evidență posibilitatea de a se construi o astfel de funcție $K(hR)$ pentru un m dat, astfel că pentru un număr m mare teorema pe care am dat-o apare ca o teoremă de existență a funcției $K(h)$.

Metoda pe care am dat-o prin utilizarea formulelor de cvadratură de tipul (7) nu este unică. Este suficient să cităm formulele lui Runge și Kutta, care au fost obținute pe altă cale. Este astfel important să subliniem deosebirea dintre formulele date de C. Runge și W. Kutta și formulele date în această Notă. Formulele lui Runge și Kutta nu pot fi obținute printr-o alegere convenabilă a unei formule de cvadratură de tipul (7).

Formulele lui Kutta (4) și (4') sînt mai simple decît formulele date la punctul 6; funcția $K(h)$ dată de Kutta se obține calculînd pe $\varphi(x,y)$ pentru patru perechi de valori (x,y) , pe cînd funcția $K(h)$ dată la punctul 6, se obține calculînd pe $\varphi(x,y)$ pentru șapte perechi de valori (x,y) . De aceea, pentru cazurile $p = 4, 5, \dots$ prezintă interes cercetarea unor formule de tipul (4), (4') în număr mai mic decît cele date la punctul 7, reluîndu-se în acest scop metodele din cartea lui C. Runge [1], sau alte metode.

Formulele date în această Notă, ca și cele care se pot construi pe baza lor pentru $p = 5, 6, \dots$ pot servi la integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale în aceeași măsură, în care servesc formulele date de C. Runge și W. Kutta.

Vom prezenta ulterior alte rezultate relative la sisteme de ecuații diferențiale, precum și cele care provin din aplicarea unor formule de cvadratură de alt tip decît cele întrebuițate la punctul 3.

ОБОБЩЕНИЕ СВОЙСТВА, ВХОДЯЩЕГО В МЕТОД РУНГЕ-КУТТА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении рассматривается дифференциальное уравнение (1), где переменные x и y действительны. Положим, что функция $\varphi(x,y)$ разложима в полный ряд по степеням $x-x_0$ и $y-y_0$, абсолютно сходящаяся, когда $|x-x_0| < r$, $|y-y_0| < R$. Известно, что в этих условиях дифференциальное уравнение (1) имеет единственный интеграл, проходящий через точку (x_0, y_0) и разложимый в полный

ряд по степеням $x-x_0$, абсолютно сходящийся в каком-либо интервале $|x-x_0| < r_1 < r$.

Если вместо x_0 и y_0 написать x и y , то разность $y(x+h) - y(x)$ дается рядом (2), абсолютно сходящимся, когда $|h| < r_1$.

Рунге [1] и Кутта [2] дали практические методы для построения функции $K(h)$ при помощи формул (3), (3') или (4), (4') так, чтобы при разложении в полный ряд по степеням h первые три или первые четыре члена были тождественны соответствующим членам ряда (2).

В настоящем сообщении дается обобщение этого свойства Рунге-Кутта и указывается регулярный метод, позволяющий построение функции $K(h)$ при помощи формулы типа (3) и типа (3') так, чтобы при разложении по степеням h первые члены m были тождественны соответствующим членам ряда (2).

UNE GÉNÉRALISATION D'UNE PROPRIÉTÉ INTERVENANT DANS LA MÉTHODE DE RUNGE-KUTTA POUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(RÉSUMÉ)

On considère, dans cette Note, l'équation différentielle (1), où les variables x et y sont réelles. On suppose la fonction $\varphi(x,y)$ développable en série entière, suivant les puissances de $x-x_0$ et $y-y_0$, absolument convergente lorsque $|x-x_0| < r$, $|y-y_0| < R$. On sait que, dans ces conditions, l'équation différentielle (1), a une intégrale unique passant par le point (x_0, y_0) , développable en série entière, suivant les puissances de $x-x_0$, absolument convergente dans un certain intervalle $|x-x_0| < r_1 < r$.

En écrivant x et y au lieu de x_0 et y_0 , la différence $y(x+h) - y(x)$ est donnée par la série (2), absolument convergente lorsque $|h| < r_1$.

Runge [1] et Kutta [2] ont donné des procédés pratiques par les formules (3), (3') ou (4), (4') pour construire une fonction $K(h)$ dont le développement en série entière, suivant les puissances de h , ait les trois premiers termes ou les quatre premiers termes identiques aux termes correspondants de la série (2).

Dans cette Note, on donne une généralisation de cette propriété de Runge et Kutta, en indiquant un procédé régulier permettant la construction d'une fonction $K(h)$ à l'aide des formules du type (3) et (3'), dont le développement suivant les puissances de h , ait les premiers m termes identiques aux termes correspondants de la série (2).

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Runge u. H. König, *Vorlesungen über numerisches Rechnen*. Berlin, 1924, cap. X, p. 286-325.
2. W. Kutta, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, 1901, nr. 46, p. 435-452.
3. S. E. Mikeladze, *Uspehi Mat. Nauk*, 1948, vol. 88, p. 3.