

## SEPARAREA VARIABILELOR ÎN NOMOGRAFIE

DE

BAL LASCU și RADO FRANCISC

Comunicare prezentată de TIBERIU POPOVICIU, membru corespondent al Academiei R.P.R.,  
în ședința din 15 februarie 1954 a Filialei Cluj a Academiei R.P.R.

În nomografie se zice că ecuația

$$F(u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}) = 0, \quad (1)$$

admite o separare de variabilă, dacă se poate pune sub forma

$$u_{n+1} = \Phi[\varphi^1(u_1, \dots, u_{n_1}), \varphi^2(u_{n_1+1}, \dots, u_{n_2}), \dots, \varphi^r(u_{n_{r-1}+1}, \dots, u_{n_r}), u_{n_r+1}, \dots, u_n]. \quad (2)$$

În această Comunicare se stabilesc condiții necesare și suficiente ca ecuația (1) să se scrie sub forma (2), [1].

Problema este importantă la construirea nomogramelor compuse, atunci cînd nu există nomograme elementare. Pentru cazul  $n = 4$  am dat asemenea condiții în Comunicarea [2].

Să considerăm mai întîi ecuația (1) rezolvată în raport cu  $u_{n+1}$ :

$$u_{n+1} = f(u_1, \dots, u_n).$$

Condițiile necesare se găsesc imediat prin derivare:

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left( \frac{f_{u_i}}{f_{u_{i+1}}} \right) = 0 \quad \begin{matrix} (j = 1, 2, \dots, n_k, n_{k+1} + 1, \dots, n) \\ (i = n_k + 1, n_k + 2, \dots, n_{k+1} - 1) \\ (k = 0, 1, \dots, r-1); (n_0 = 0) \end{matrix} \quad (3)$$

Condițiile (3) sînt în același timp și suficiente.

În adevăr, fie  $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$  o funcție care satisface sistemul (3) și conține efectiv variabilele scrise. Considerăm condițiile (3) pentru  $k = 0$ . Din ele rezultă

$$\begin{aligned} \frac{f_{u_1}}{f_{u_2}} &= h_1(u_1, \dots, u_{n_1}) \\ \frac{f_{u_2}}{f_{u_3}} &= h_2(u_1, \dots, u_{n_1}) \\ \frac{f_{u_{n_1-1}}}{f_{u_{n_1}}} &= h_{n_1-1}(u_1, \dots, u_{n_1}), \end{aligned} \quad (4)$$

unde  $h_i$  sînt funcții numai de primele  $n_1$  variabilele.

În baza ipotezei făcute, putem alege constantele  $c_i$  ( $i = n_1 + 1, \dots, n$ ) astfel ca funcția

$$\varphi^1(u_1, u_2, \dots, u_{n_1}) = f(u_1, \dots, u_{n_1}, c_{n_1+1}, \dots, c_n)$$

să nu fie identic nulă. Avînd în vedere că  $f$  satisface sistemul (4)  $\varphi^1$  este o soluție a acestui sistem. Soluția generală a primei ecuații din sistemul (4) se scrie astfel

$$f = \Phi^1[\varphi^1(u_1, \dots, u_{n_1}), u_3, \dots, u_{n_1}, u_{n_1+1}, \dots, u_n]; \quad (5)$$

deci funcția dată  $f$  este de această formă, unde  $\Phi^1$  este o anumită funcție.

Arătăm că  $\Phi^1$  nu depinde separat de  $u_3, \dots, u_{n_1}$ . Scriind că (5) verifică și ecuația a doua a sistemului (4), găsim

$$\Phi_{\varphi^1}^1 \varphi_{u_2}^1 = h_2 [\Phi_{\varphi^1}^1 \varphi_{u_3}^1 + \Phi_{u_3}^1],$$

de unde rezultă

$$h_2 \Phi_{u_3}^1 = 0$$

$h_2$  nu poate fi identic nul, deoarece în acest caz va avea  $f_{u_3} = 0$ , adică  $f$  ar fi independent de  $u_2$  ceea ce este contrar ipotezei. Deci

$$\Phi_{u_3}^1 = 0$$

La fel

$$\Phi_{u_4}^1 = 0, \dots, \Phi_{u_{n_1}}^1 = 0$$

Deci (5) se transformă în

$$f = \Phi^1[\varphi^1(u_1, \dots, u_{n_1}), u_{n_1+1}, u_{n_1+2}, \dots, u_n].$$

În mod analog, pentru  $k = 1, 2, \dots, r-1$  obținem grupări similare.

Rezultă că funcția dată  $f$  este de forma (2).

Transformînd condițiile (3) pentru cazul cînd ecuația (1) nu este rezolvată în raport cu  $u_{n+1}$  ele se scriu în definitiv sub forma

$$\frac{1}{F_{u_1}} \begin{vmatrix} F_{u_i} & F_{u_{i+1}} \\ F_{u_i u_1} & F_{u_{i+1} u_1} \end{vmatrix} = \dots = \frac{1}{F_{u_{n_k}}} \begin{vmatrix} F_{u_i} & F_{u_{i+1}} \\ F_{u_i u_{n_k}} & F_{u_{i+1} u_{n_k}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{F_{u_{n_{k+1}+1}}} \begin{vmatrix} F_{u_i} & F_{u_{i+1}} \\ F_{u_i u_{n_{k+1}+1}} & F_{u_{i+1} u_{n_{k+1}+1}} \end{vmatrix} = \dots = \frac{1}{F_{u_{n+1}}} \begin{vmatrix} F_{u_i} & F_{u_{i+1}} \\ F_{u_i u_{n+1}} & F_{u_{i+1} u_{n+1}} \end{vmatrix}$$

$$(i = n_k + 1, n_k + 2, \dots, n_{k+1} - 1)$$

$$(k = 0, 1, \dots, r-1); (n_0 = 0)$$

## РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В НОМОГРАФИИ

### (КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении авторы устанавливают условия, необходимые и достаточные, чтобы уравнение (1) можно было написать в форме (2). Эти условия написаны в формулах (6). Найденные условия применяются для установления возможности решения уравнения со сложными номограммами.

## LA SÉPARATION DES VARIABLES EN NOMOGRAPHIE

### (RÉSUMÉ)

Dans cette Note, les Auteurs établissent les conditions nécessaires et suffisantes pour pouvoir écrire l'équation (1) sous la forme (2). Ces conditions sont posées dans les formules (6). Les conditions trouvées sont applicables à l'établissement de la possibilité de résoudre une équation à nomogrammes composés.

### BIBLIOGRAFIE

1. B. A. Nevski, *Spravocinaia kniga po nomografii*. Moscova-Leningrad, 1951.
2. Bal Lascu și Rado Francisc, *Două teoreme referitoare la separarea variabilelor pentru ecuațiile cu cinci variabile*, Acest volum, p. 285.