

DOUĂ TEOREME REFERITOARE LA SEPARAREA
VARIABILELOR PENTRU ECUAȚIILE CU CINCI
VARIABILE

DE

BAL LASCU și RADO FRANCISC

*Comunicare prezentată de TIBERIU POPOVICIU, membru corespondent al Academiei
R.P.R., în ședința din 12 ianuarie 1954*

Construirea nomogramelor pentru ecuațiile cu număr mare de variabile întin-
pină greutate odată cu creșterea numărului variabilelor. În nomografie se arată că
pentru ecuațiile care conțin mai mult de 12 variabile nu se pot construi nomograme
elementare [1]. În acest caz se pot construi nomograme compuse numai dacă ecuația
dată admite separarea variabilelor într-un sistem de ecuații nomografabile.

Pentru ca o ecuație cu n variabile

$$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0, \quad (1)$$

să admită separarea variabilelor, este necesar ca prin introducerea variabilelor ajută-
toare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ să obținem sistemul

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n) &= 0 \\ \lambda_1 &= \varphi_1(z_1, z_2, \dots, z_k) \\ \lambda_2 &= \varphi_2(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{\hat{k}}) \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_p &= \varphi_p(z_{j+1}, \dots, z_{m-1}), \end{aligned} \quad (2)$$

care conduce la ecuația (1) după eliminarea variabilelor $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Această pro-
blemă a fost luată în studiu de colectivul de nomografie al Secției de matematică de
pe lângă Filiala Academiei R.P.R., Cluj.

În cazul cînd fiecare din ecuațiile sistemului (2) este nomografabilă, se poate
construi o nomogramă compusă pentru ecuația (1), constînd din $p + 1$ nomograme
elementare.

După cum se știe, cele mai simple și cele mai avantajoase nomograme sînt nomogramele cu puncte aliniate și nomogramele reticulare. Nomograme reticulare pot fi construite pentru orice ecuație cu trei variabile, iar nomograme cu alinieri pot fi construite cu multă simplitate, pentru un foarte mare număr de ecuații cu trei și patru variabile, care se întîlnesc în practică. Din această cauză, vom căuta ca nomogramele elementare să fie de această natură. Punînd în acest fel problema, se vede că este necesar să se studieze separarea variabilelor, începînd cu ecuațiile cu patru variabile.

Pentru ecuațiile cu patru variabile problema a fost rezolvată de E. d. Goursat [2]: *Condiția necesară și suficientă ca ecuația* $F(x, y, z, u) = 0$ *să admită separarea* $u = \Phi[\varphi(x, y), z]$, *este următoarea:*

$$F'_u \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xz} & F''_{yz} \end{vmatrix} = F'_z \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xu} & F''_{yu} \end{vmatrix}.$$

Noi am căutat condiții necesare și suficiente pentru ca ecuația cu cinci variabile

$$F(x, y, z, u, v) = 0, \quad (3)$$

să se poată scrie sub una din formele,

$$v = \Phi[\varphi(x, y), \psi(z, u)], \quad (4)$$

$$v = \Phi[\varphi(x, y, z), u]. \quad (5)$$

Pentru aceasta s-au demonstrat următoarele teoreme:

I. Condițiile necesare și suficiente ca ecuația (3) să se poată scrie sub forma (4) **sînt**

$$\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xz} & F''_{yz} \end{vmatrix}}{F'_z} = \frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xu} & F''_{yu} \end{vmatrix}}{F'_u} = \frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{zv} & F''_{yv} \end{vmatrix}}{F'_v} \quad (6)$$

$$\frac{\begin{vmatrix} F'_z & F'_u \\ F''_{zx} & F''_{ux} \end{vmatrix}}{F'_x} = \frac{\begin{vmatrix} F'_z & F'_u \\ F''_{zy} & F''_{uy} \end{vmatrix}}{F'_y} = \frac{\begin{vmatrix} F'_z & F'_u \\ F''_{zv} & F''_{uv} \end{vmatrix}}{F'_v}$$

II. Condițiile necesare și suficiente ca ecuația (3) să se poată scrie sub forma (5), **sînt:**

$$F'_v \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ F''_{yu} & F''_{zu} \end{vmatrix} = F'_u \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ F''_{yv} & F''_{zv} \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$F'_v \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xu} & F''_{yu} \end{vmatrix} = F'_u \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xv} & F''_{yv} \end{vmatrix}.$$

Condițiile (6) sînt necesare. Scriind derivatele parțiale v'_x, v'_y, v'_z și v'_u se obține prin împărțire

$$\frac{v'_x}{v'_y} = \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y},$$

$$\frac{v'_z}{v'_u} = \frac{\psi'_z}{\psi'_u}.$$

Raportul $\frac{v'_x}{v'_y}$ este funcție numai de x și y , iar $\frac{v'_z}{v'_u}$ numai de z și u .

Deci

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v'_x}{v'_y} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v'_z}{v'_u} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{v'_x}{v'_y} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v'_z}{v'_u} \right) = 0. \quad (8)$$

Calculînd derivatele parțiale ale funcției v , definite implicit de ecuația (3) și înlocuindu-le în (8), se obțin condițiile (6).

Într-adevăr, condițiile (6) sînt suficiente. Din ele rezultă condițiile (8), iar de aici

$$\frac{v'_x}{v'_y} = \lambda(x, y),$$

$$\frac{v'_z}{v'_u} = \mu(z, u). \quad (9)$$

Soluțiile generale ale ecuațiilor (9) sînt respectiv de forma

$$v = H[\varphi(x, y), z, u],$$

$$v = G[x, y, \psi(z, u)],$$

H și G , fiind funcții arbitrare.

De aici rezultă că orice soluție comună a acestor ecuații este

$$v = F[\varphi(x, y), \psi(z, u)]. \quad (10)$$

În cazul teoremei II se arată, ca mai înainte, că (7) sînt condiții necesare. Pentru a arăta că sînt și suficiente, observăm că funcția v , definită implicit de (3), satisface

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{v'_x}{v'_y} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{v'_y}{v'_z} \right) = 0,$$

deci

$$\frac{v'_x}{v'_y} = h(x, y, z),$$

$$\frac{v'_y}{v'_z} = g(x, y, z), \quad (11)$$

sistemul de ecuații cu derivate parțiale (11) admite ca soluție $v = v(x, y, z, u)$, deci și funcția de trei variabile $\varphi(x, y, z) = v(x, y, z, 0)$.

Soluția generală a primei ecuații este

$$v = A[\varphi(x, y, z), z, u], \quad (12)$$

în care variabila z pare că intră atât prin intermediul funcției $\varphi(x, y, z)$, cât și singură.

Întrucât (12) trebuie să satisfacă și ecuația a doua din sistemul (11), trebuie să avem

$$A'_\varphi \varphi'_y = g(A'_\varphi \varphi'_z + A'_z). \quad (13)$$

Deoarece $\varphi(x, y, z)$ satisface sistemul (11), avem

$$\varphi'_y = g \varphi'_z$$

și rezultă din (13)

$$A'_z = 0.$$

Prin urmare,

$$v = A[\varphi(x, y, z), u]$$

și teoremele sint demonstrate.

Exemplu. În cazul ecuației

$$xy(xy + 2z + u) + z(u + z) + u^2 - v = 0,$$

condițiile (7) sint verificate. Această ecuație, vizibil, admite separarea

$$v = (xy + z)^2 + (xy + z)u + u^2 = \Phi[(xy + z), u].$$

În practică pentru a ne putea asigura că o ecuație dată poate fi reprezentată cu ajutorul unei nomograme compuse, este necesar de a verifica condițiile nu numai pentru toate grupările de variabile posibile, ci și pentru unele schimbări simple de variabile.

Pentru a ilustra aceasta, să dăm un exemplu întâlnit în practica construirii nomogramelor.

Să cercetăm dacă se poate construi o nomogramă compusă pentru ecuația

$$v = \frac{a(x) + b(y) + c(z)}{\alpha(x) + \beta(y) + \gamma(z) + \delta(u)}.$$

Încercînd toate grupările posibile ale variabilelor, se constată că nici condițiile (6) și nici (7) nu sint îndeplinite.

Totuși, punînd

$$\alpha(x) + \beta(y) + \gamma(z) + \delta(u) = \varphi$$

$$a(x) = \psi,$$

ecuația, în noile variabile φ, ψ, y, z, v ,

$$v \varphi = \psi + b(y) + h(z)$$

se poate pune sub forma

$$\psi = v \varphi - b(y) - h(z),$$

care prezintă variabilele separate.

ДВЕ ТЕОРЕМЫ ОТДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПЯТЬЮ ПЕРЕМЕННЫМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении авторы доказывают две теоремы, относящиеся к отделению переменных для уравнений с пятью переменными.

I. Условия необходимые и достаточные, для того чтобы уравнение $F(x, y, z, u, v) = 0$ можно было написать в форме $v = \Phi[\varphi(x, y), \psi(z, u)]$, следующие:

$$\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xz} & F''_{yz} \end{vmatrix}}{F'_z} = \frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xu} & F''_{yu} \end{vmatrix}}{F'_u} = \frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xv} & F''_{yv} \end{vmatrix}}{F'_v}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} F'_z & F'_u \\ F''_{zx} & F''_{ux} \end{vmatrix}}{F'_x} = \frac{\begin{vmatrix} F'_z & F'_u \\ F''_{zy} & F''_{uy} \end{vmatrix}}{F'_y} = \frac{\begin{vmatrix} F'_z & F'_u \\ F''_{zv} & F''_{uv} \end{vmatrix}}{F'_v}$$

II. Условия необходимые и достаточные, для того чтобы уравнение $F(x, y, z, u, v) = 0$ можно было написать в виде $v = \Phi[\varphi(v, y, z), u]$ следующие:

$$F'_v \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ F''_{yu} & F''_{zu} \end{vmatrix} = F'_u \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ F''_{yv} & F''_{zv} \end{vmatrix}$$

$$F'_v \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xu} & F''_{yu} \end{vmatrix} = F'_u \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xv} & F''_{yv} \end{vmatrix}$$

DEUX THÉORÈMES RELATIFS À LA SÉPARATION DES VARIABLES D'UNE ÉQUATION À CINQ VARIABLES

(RÉSUMÉ)

Dans cette Note, les Auteurs démontrent deux théorèmes relatifs à la séparation des variables d'une équation à cinq variables.

I. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation $F(x, y, z, u, v) = 0$ puisse être mise sous la forme $v = \Phi[\varphi(x, y), \psi(z, u)]$ sont les suivantes:

$$\frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xz} & F''_{yz} \end{vmatrix}}{F'_z} = \frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xu} & F''_{yu} \end{vmatrix}}{F'_u} = \frac{\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xv} & F''_{yv} \end{vmatrix}}{F'_v}$$

$$\frac{\begin{vmatrix} F'_z & F'_u \\ F''_{zx} & F''_{ux} \end{vmatrix}}{F'_x} = \frac{\begin{vmatrix} F'_z & F'_u \\ F''_{zy} & F''_{uy} \end{vmatrix}}{F'_y} = \frac{\begin{vmatrix} F'_z & F'_u \\ F''_{zv} & F''_{uv} \end{vmatrix}}{F'_v}$$

II. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation $F(x, y, z, u, v) = 0$ puisse être mise sous la forme $v = \Phi[x, y, z, u]$ sont les suivantes:

$$F'_v \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ F''_{yu} & F''_{zu} \end{vmatrix} = F'_u \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ F''_{yv} & F''_{zv} \end{vmatrix}$$

$$F'_v \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xu} & F''_{yu} \end{vmatrix} = F'_u \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ F''_{xv} & F''_{yv} \end{vmatrix}$$

BIBLIOGRAFIE

1. B. A. Nevski, *Spravočnaja kniga po nomografii*. Gostehizdat, Moscova, 1951.
2. E. d. Goursat, Bull. de la Soc. Math. de la France, 1899, t. 27, p. 27.

CÎTEVA MULȚIMI RARE ÎN UNELE SPAȚII FUNCȚIONALE

DE

S. MARCUS

Comunicare prezentată de MIRON NICOLESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R., în ședința din 14 ianuarie 1954

În această Comunicare se demonstrează următoarele propoziții:

1. Mulțimea $\mathcal{C}$ a funcțiilor derivate integrabile*) în $[\alpha, \beta]$, continui într-un același punct $t_0 \in [\alpha, \beta]$, este rară**) în spațiul $\mathcal{D} \cdot \mathcal{J}$ al funcțiilor derivate integrabile în $[\alpha, \beta]$.
2. Mulțimea $\mathcal{D} \cdot \mathcal{J}$ a funcțiilor derivate integrabile în $[\alpha, \beta]$ este rară în spațiul $\mathcal{D}$ al funcțiilor derivate mărginite în $[\alpha, \beta]$.
3. Mulțimea $\mathcal{B}_\omega$ a funcțiilor de clasă Baire inferioară sau egală cu ω este rară în spațiul $\mathcal{B}_{\omega+1}$ al funcțiilor de clasă Baire $\omega + 1$.
4. Mulțimea $\mathcal{J} \cdot \mathcal{B}$ a funcțiilor integrabile boreliene în $[\alpha, \beta]$ este rară în spațiul $\mathcal{J}$ al funcțiilor integrabile în $[\alpha, \beta]$.
5. Corolar. Mulțimea $\mathcal{D} \cdot \mathcal{J}$ a funcțiilor derivate integrabile în $[\alpha, \beta]$ este rară în spațiul $\mathcal{J}$ al funcțiilor integrabile în $[\alpha, \beta]$.

Toate spațiile considerate sînt metrizate cu distanța

$$\rho(x, y) = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |x(t) - y(t)|.$$

Fiecare spațiu considerat este complet, deci de a doua categorie (în sensul lui, Baire).

Demonstrația propoziției 1. Deoarece $\mathcal{C}$ este o mulțime închisă în $\mathcal{D} \cdot \mathcal{J}$, este suficient să arătăm că $\mathcal{C}$ este o mulțime frontieră în $\mathcal{D} \cdot \mathcal{J}$. Să presupunem că $\mathcal{C}$ nu este o mulțime frontieră și fie $x_0 \in \text{Int. } \mathcal{C}$. Fie $y_0 \in \mathcal{C}$. Să considerăm transformarea continuă

$$x = y + (x_0 - y_0).$$

Fie $\varepsilon > 0$ destul de mic, pentru ca $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ să implice $x \in \mathcal{C}$. Există $\eta > 0$, astfel încît, pentru $\rho(y, y_0) < \eta$ să avem $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ (deoarece transformarea

*) Pretutindeni, integrabilitatea este considerată în sens riemannian.

**) Nicăieri densă.