

DESPRE CONURILE ȘI CONICELE GEOMETRIEI LUI LOBACEVSCHI-BOLYAI

DE

EUGEN GERGELY

*Comunicare prezentată de academician GR. C. MOISIL în ședința științifică a Filialei Cluj
din 18—21 decembrie 1954*

Lucrarea de față tratează așezarea în spațiu a conurilor — în primul rând a acelor de rotație — geometriei lui Lobacevski-Bolyai, generalizarea unor formule pentru calculul ariei și al volumului acestor conuri, precum și definiția proiectivă și clasificarea conicelor.

Lucrarea constă din trei părți. În prima parte se tratează chestiunile referitoare la așezarea conurilor, în a doua parte se face generalizarea unor formule de arie și de volum, iar în a treia parte se dă definiția proiectivă a conicelor și se face clasificarea lor bazată pe această definiție.

§ 1. Așezarea conurilor în spațiul Lobacevski-Bolyai

Se știe [1] că în geometria lui Lobacevski-Bolyai avem trei feluri de conuri de rotație, după cum axa și dreapta ce se rotește în jurul axei sînt: a) secante, b) asimptotic-paralele, c) divergente. După Liebmann [1], conul în cazul b) se numește con asimptotic.

În cele ce urmează conul de la cazul b) îl vom numi con asimptotic de speța întâia, iar conului obținut în cazul a), îi vom zice con asimptotic de speța a doua.

În ce privește așezarea în spațiu a conurilor de rotație și legătura între ele, demonstrăm următoarele proprietăți:

1) *Toate conurile asimptotice de speța întâia sînt congruente.*

Toate figurile formate dintr-o dreaptă t și dintr-o dreaptă oarecare a , asimptotică la t , sînt congruente între ele.

Într-adevăr, să considerăm dreapta b , asimptotică și coplanară cu t , dar diferită de a (fig. 1). Să notăm cu l distanța unui punct P al dreptei b de la dreapta t . Unghiul α format de perpendiculara PA și de dreapta b este

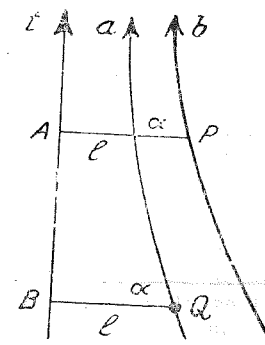


Fig. 1

unghiul de paralelism corespunzător lui l , adică

$$\alpha = \Pi(l).$$

Pe dreapta a există însă un punct Q , a cărui distanță la t este tocmai l . Dreapta a fiind asimptotică la t , unghiul format de BQ și de a este de asemenea egal cu α . Astfel figura formată de dreptele t și b este congruentă cu figura alcătuită de dreptele t și a . De aici urmează că cele două conuri asimptotice de speța întâia, obținute prin rotirea dreptelor a , respectiv b în jurul axei t , sînt de asemenea congruente.

2) Fiecare con asimptotic de speța întâia posedă un plan asimptotic la con și perpendicular pe axă. Astfel conurile de acest tip sînt așezate numai în unul dintre semispațiile determinate de acest plan asimptotic (fig. 2).

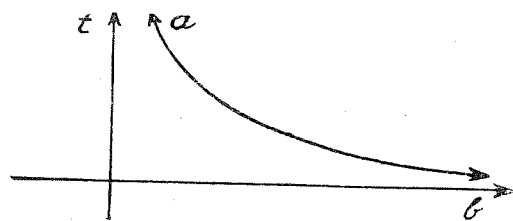


Fig. 2

3) Fiecare con asimptotic de speța a doua are două plane asimptotice, perpendiculare pe axă și un astfel de con este așezat în întregime între cele două plane asimptotice (fig. 3).

Într-adevăr, fie $\alpha < \frac{\pi}{2}$ unghiul ascuțit format de t și a . Să notăm cu m distanța corespunzătoare unghiului de paralelism α . Măsurînd distanța m de la O pe axă ($OA = m$), planul σ dus prin A , perpendicular pe axă, va fi asimptotic la toate generatoarele conului, deci acest plan este planul asimptotic al conului.

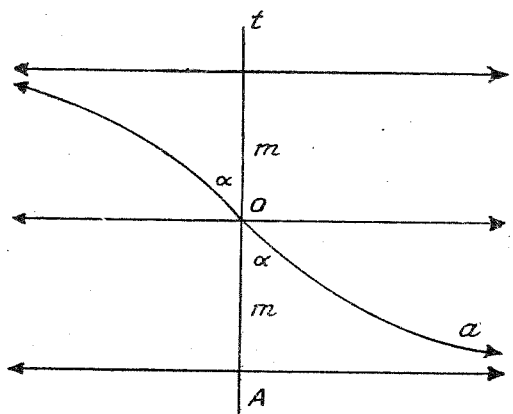


Fig. 3

Conul se află în întregime în acel semispațiu, în care se află vârful O . Planul σ , simetric la σ față de O , are aceeași proprietate față de cealaltă pînză a conului, ca și planul σ față de pînza considerată mai înainte.

Cele două plane asimptotice sînt divergente, deoarece axa este perpendiculara lor comună și astfel conul cu vârful în O este așezat în porțiunea infinită a spațiului dintre cele două planuri divergente.

Două conuri de acest fel sînt congruente, dacă unghiurile de la vîrfuri sînt egale.

4) Dacă la un con general (deci nu de rotație) există o dreaptă a ce trece prin vârful lui și formează cu toate generatoarele conului unghiuri

α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), atunci conul este așezat numai în unul dintre semispațiile determinate de un plan bine definit.

Pe raza a măsurăm de la vârful O al conului în direcția unghiurilor α , distanța m dată de relația $k = \Pi(m)$, obținînd astfel punctul P . În P ducem un plan σ perpendicular pe a .

Avînd în vedere că funcția $\Pi(x)$ este monoton-descrescătoare, acest plan nu taie nici una dintre generatoare și astfel conul este așezat în întregime în acea jumătate a spațiului dintre semispații determinate de planul σ , în care se află și vârful conului.

5) În cazul c) conul este simetric față de planul perpendicular pe axă prin perpendiculara comună a axei și a unei generatoare. Conul este așezat între două plane perpendiculare pe axă (deci divergente) simetrice față de O (fig. 4).

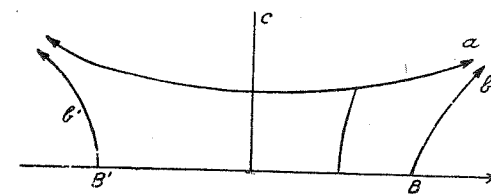


Fig. 4

Într-adevăr, fie a și t două drepte divergente, iar c perpendiculara lor comună. Punctele de intersecție cu t ale perpendicularelor duse din punctele lui a la t — după cum se știe [2] — au cîte o poziție limită B și B' , situate simetric față de O la o distanță finită (O fiind punctul de intersecție al perpendicularărilor comune cu t). Dreptele b și b' , perpendiculare pe t în punctele B , respectiv B' sînt asimptotice la dreapta a . Planele duse perpendiculare pe axă prin b și b' sînt deci plane asimptotice ale conului de tip c).

Cele două plane asimptotice sînt și aici divergente, axa fiind perpendiculara lor comună.

Două conuri de acest tip sînt congruente, dacă perpendiculararele comune axei și unei generatoare au aceeași lungime la ambele conuri.

§ 2. Cîteva formule generale pentru calculul ariei și volumului conurilor de rotație

În literatura de specialitate a geometriei Lobacevski-Bolyai unui autori — urmînd drumul indicat de Lobacevski în *Pangeometria* — consideră constanta de curbura a spațiului lui Lobacevski-Bolyai drept unitate (de ex. Liebmann [1]), iar alții pe baza *Appendixului* lui Bolyai — consideră constanta de curbura ca un parametru (de ex. V. I. Kostin [2], Bonola [3], Killing [4]).

După cum se știe, relația dintre spațiul euclidian și cel Lobacevski-Bolyai are două aspecte. Pe de o parte, spațiul Lobacevski-Bolyai este local euclidian, ceea ce înseamnă că în mic proprietățile spațiului Lobacevski-Bolyai se apropie de proprietățile spațiului euclidian. Pe de altă parte, în cazul cînd parametrul de curbura tinde către infinit, limita întregului spațiu Lobacevski-Bolyai este întregul spațiu euclidian.

În cele ce urmează dăm formulele generale de volum al diferitelor părți ale conului asimptotic de speța întâia și al unei părți a conului de tip c). Aceste formule generale, care conțin constanta de curbura, nu figurează în literatura de specialitate pînă în prezent.

Volumul conului asimptotic de speța întâi limitat într-o direcție de cercul cu raza r și nelimitat în cealaltă direcție, este calculat de Liebmann [1], constanta de curbura fiind considerată ca 1. Formula găsită de el este

$$V = 2\pi \ln \operatorname{ch} r.$$

Fie k constanta de curbura a spațiului. Formula generală găsită de noi este

$$V = 2\pi k^3 \ln \operatorname{ch} \frac{r}{k}. \quad (1)$$

Mersul calculelor este același ca la Liebmann [1], elementul de volum însă ce figurează în coordonatele de suprafață F a lui Bolyai este (cu notațiile [1]):

$$d\xi d\eta d\zeta e^{-\frac{2\zeta}{k}},$$

iar ecuația liniei L (fig. 6) în coordonatele carteziene x și z

$$\frac{z}{e^{\frac{\zeta}{k}}} = \operatorname{ch} \frac{x}{k};$$

lungimea arcului liniei L , după cum se știe

$$\rho = k \operatorname{sh} \frac{x}{k}.$$

Integrala de calculat este deci:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho_1} \int_{\zeta_0}^{\infty} \rho d\rho d\zeta e^{-\frac{2\zeta}{k}} = \\ &= 2\pi \int_0^{\rho_1} \int_{\zeta_0}^{\infty} \rho e^{-\frac{2\zeta}{k}} d\rho d\zeta \end{aligned}$$

ρ și ζ_0 legate cu relația

$$e^{-\frac{\zeta_0}{k}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{k}\right)^2}},$$

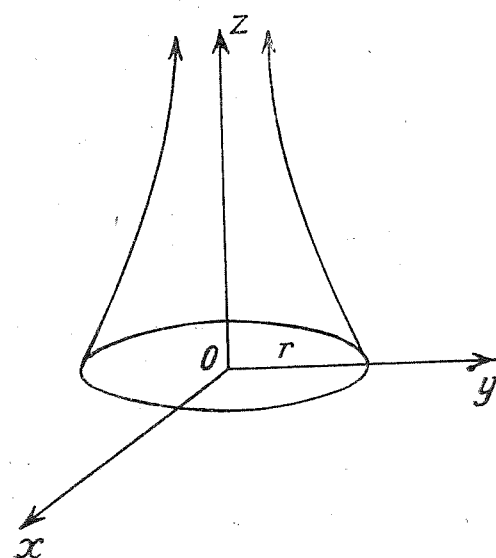


Fig. 5

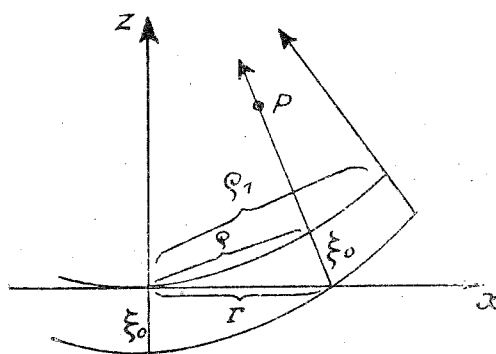


Fig. 6

iar în afară de aceasta

$$\operatorname{th} \frac{r}{k} = \frac{\rho_1}{k}.$$

Calculând integrala dublă găsim formula (1).

Dacă $k \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, deoarece în spațiul euclidian corpul corespunzător este un cilindru limitat într-o direcție de un cerc cu raza r și nelimitat în cealaltă direcție.

Din această formulă se obține ușor volumul porțiunii cuprinse între două secțiuni perpendiculare pe axă a conului asimptotic de speța întâi (fig. 7).

Să notăm razele secțiunilor cu r_1, r_2 ; fie m distanța celor două secțiuni măsurate pe axă. Luând ca axă y chiar axa t a conului, iar ca axă x una dintre dreptele planului secțiunii de rază r , ce trece prin O , ecuația dreptei generatoare, după cum se știe, va fi:

$$\operatorname{tg} h \frac{x}{k} = \operatorname{tg} h \frac{r_1}{k} \cdot e^{-\frac{y}{k}}.$$

Dreapta trece prin punctul (r_2, m) și astfel:

$$\operatorname{tg} h \frac{r_2}{k} = \operatorname{tg} h \frac{r_1}{k} \cdot e^{-\frac{m}{k}}. \quad (2)$$

Aceasta este relația între r_1, r_2 și m .

Volumul corpului studiat este

$$V = 2\pi k^3 \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{r_1}{k}}{\operatorname{ch} \frac{r_2}{k}}.$$

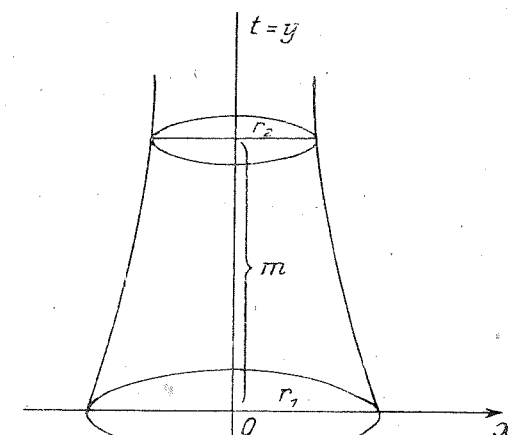


Fig. 7

În cazul când $k \rightarrow \infty$, $r_1 \rightarrow r_2$ și ținând seama de (2), din V primim valoarea $r_1^2 \pi m$, adică volumul cilindrului de rază r și de înălțimea m din spațiul euclidian.

Pentru volumul acelei porțiuni a conului de tip c), care este limitată de secțiunea circulară generată prin rotirea perpendicularei comune dintre axă și generatoare și de secțiunea circulară perpendiculară pe axă, dusă la distanța m de prima secțiune. Liebmann [1] găsește (socotind constanta de curbura 1) formula următoare:

$$V = \pi (h \operatorname{ch} a - m),$$

unde a este lungimea perpendicularei comune dintre axă și generatoare, iar h lungimea generatoarei — dintre cele două secțiuni circulare (fig. 8). În mod analog, ca la efectuarea calculelor de la punctul 1, și ținând seama de ecuația dreptelor divergente pentru un k arbitrar, găsim

$$V = \pi k^2 \left(h \operatorname{ch} \frac{a}{k} - m \right).$$

Dacă $k \rightarrow \infty$ și dacă ținem seama că în acest caz $m=h$, obținem și aici valoarea $V = a^2 \pi m$, adică volumul cilindrului circular euclidian, deoarece corpul studiat în spațiul Lobachevski-Bolyai devine cilindru circular în spațiul euclidian.

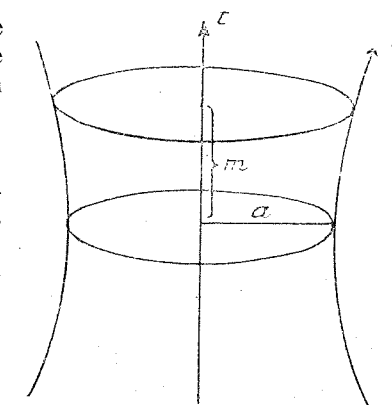


Fig. 8

§ 3. Despre conicele și secțiunile conice în geometria lui Lobacevski-Bolyai

Cu conicele și secțiunile de con ale geometriei lui Lobacevski-Bolyai s-au ocupat mai mulți autori în literatura matematică: [4], [5], [1]. Aceștia pleacă de la unele definiții generale ale conicelor din planul euclidian și aplicând acestea la figurile corespunzătoare din planul Lobacevski-Bolyai, obțin conicele în planul lui Lobacevski-Bolyai. În geometria planului Lobacevski-Bolyai liniile de curbura constantă se numesc cicluri, adică dreapta, cercul, linia L a lui Bolyai (oriciclu), linia echidistantă la dreapta (hiperciclu). După una dintre definițiile conicelor din planul Lobacevski-Bolyai ([1] și literatura citată acolo), conicele sînt locurile geometrice ale punctelor egal depărtate de două cicluri. Pentru ca conicele astfel găsite să poată fi definite și ca secțiuni de con, se generalizează însăși noțiunea conului de rotație ([1] și literatura citată acolo).

Se consideră acele suprafețe riglate, a căror directrice este un ciclu oarecare, iar generatoarele sînt în plane perpendiculare atît pe planul ciclului, cît și pe ciclu și în afară de aceasta fac un unghi constant cu planul ciclului. Aceste suprafețe conțin conurile de rotație de speța întâia, speța a doua și de tip $c)$ și încă două suprafețe noi, suprafețele ale căror directrice sînt linii L sau linii echidistante. Autorii amintiți [1] au arătat, pe de o parte, că ecuațiile conicelor definite mai înainte, în coordonatele lui Weierstrass, sînt ecuații omogene de gradul doi, iar pe de altă parte, că reprezentările lor în planul Klein sînt conice euclidiene și coincid cu toate secțiunile de con ale conurilor generalizate.

Proprietățile amintite se pot demonstra prin calcule destul de lungi.

În cele ce urmează dăm o definiție pur proiectivă a conicelor din planul lui Lobacevski-Bolyai; vom arăta că astfel se găsește aceeași clasă de curbe ca și cu definițiile de pînă acum. Definiția nouă este mai convenabilă, deoarece rezultatele mai sus amintite se pot găsi direct. Mai întîi însă este necesar să dăm definiția exactă a proiectivităților referitoare la dreptele punctate și la fasciculele de drepte din planul Lobacevski-Bolyai. În prezent ne ocupăm numai cu proiectivitățile dreptelor punctate cu suport real și ale fasciculelor de drepte avînd un centru real sau asimptotic. Ca și în geometria euclidiană, două drepte punctate se numesc perspective, dacă dreptele ce unesc punctele corespunzătoare formează un fascicul de drepte cu centru real sau asimptotic. Două drepte punctate prezintă o proiectivitate, dacă aceasta poate fi obținută prin două perspectivități succesive. În mod analog se definesc fasciculele de drepte proiective: două fascicule de drepte sînt perspective, dacă dreptele corespunzătoare se taie pe aceeași dreaptă și sînt proiective, dacă se pot obține prin două perspectivități consecutive. Definiția proiectivităților s-a făcut numai pe baza axiomelor de legătură. Natural, această definiție este cunoscută [5], [1].

Acum definim conicele în felul următor:

Locul geometric al punctelor de intersecție ale razelor corespondente din două fascicule de drepte proiective îl numim conică.

Această definiție este identică cu definiția proiectivă a conicelor din planul euclidian, însă figurile geometrice obținute pe baza acestei definiții sînt mult mai variate. Un alt avantaj al definiției date de noi, față de definițiile deja cunoscute și amintite mai sus, este tocmai această analogie cu definiția din planul euclidian. Deci nu este necesar să ne folosim de noțiunea ciclurilor, a distanței, precum și de extinderea noțiunii conului de rotație și astfel iese la iveală mai clar relația între conicele euclidiene și cele Lobacevski-Bolyai.

În cele ce urmează, vom demonstra că conicele definite de noi și cele definite cu metodele arătate mai sus sînt identice.

Fasciculele de drepte proiective cu centrul real din planul Lobacevski-Bolyai în reprezentare pe planul Klein sînt tot fascicule de drepte proiective, deoarece definiția proiectivității s-a făcut numai pe baza axiomelor de legătură. Deci în reprezentare pe planul Klein punctele de intersecție ale acelor drepte, care corespund la drepte secante sau asimptotic paralele din planul Lobacevski-Bolyai sînt așezate pe o conică sau pe o porțiune de conică din planul Klein (se poate întîmpla că sînt așezate numai pe porțiune de conică, deoarece în general sînt și drepte corespondente divergente). Punctele conicelor din planul Klein la rîndul lor sînt proiectate din două puncte reale ale lor cu ajutorul fasciculelor de drepte proiective; acestea corespund în planul Lobacevski-Bolyai pe baza axiomelor de legătură la fasciculele de drepte proiective și ca urmare, conicelor le corespund tot conice.

Identitatea conicelor definite de noi și a secțiunilor plane ale conului generalizat de rotație se arată direct. Într-adevăr să luăm două puncte ale ciclului directrice referitor la conul generalizat și să proiectăm acum din ambele puncte toate celelalte puncte ale ciclului. Cele două fascicule de drepte obținute sînt proiective, fiindcă după cum se știe [1], în reprezentare pe planul Klein, ciclurilor le corespund conice. Razele fasciculelor de drepte proiective și generatoarele trecînd prin acele puncte ale ciclului, care aparțin razelor considerate, formează un fascicul general de plane. Dreptele de intersecție ale acestui fascicul cu un plan secant al conului formează fascicule generale de drepte, care din punctul de vedere al proiectivității definite pe baza axiomelor de legătură sînt și ele proiective. Astfel în planul secant al conului ele definesc o conică (după definiția dată de noi).

Observare. Reprezentările în planul Klein a ciclurilor sînt conice. Astfel ciclurile, deci și liniile L și cele echidistante au aceleași proprietăți proiective, ca și conicele.

În cele ce urmează vom da o clasificare a conicelor definite de noi. În geometria euclidiană clasificarea se face pe baza paralelismului, adică referind la dreapta de la infinit. În planul Lobacevski-Bolyai — după cum se știe — totalitatea punctelor asimptotice este o mulțime de ordinul doi în sensul că la fiecare dreaptă din planul Lobacevski-Bolyai aparțin două puncte asimptotice. Conicele le vom raporta la această mulțime de ordinul doi și astfel este natural că vom obține mai multe clase de conice, ca în geometria euclidiană. Aceasta rezultă și din faptul că pe baza definiției noastre și linia L a lui Bolyai, precum și linia echidistantă aparțin conicelor.

Vom constata cîteva proprietăți ale fasciculelor de drepte perspective și proiective din planul Lobacevski-Bolyai (ne vom ocupa numai cu fasciculele cu suport real, finit).

Fie a axa de perspectivitate a celor două fascicule, A și B punctele de suport. Se pot distinge trei cazuri.

1) A și B sînt în același semiplan determinat de a , iar dreapta AB nu este asimptotică în nici o direcție la a (fig. 9). În acest caz dreptele asimptotice la a , plecînd în aceeași direcție din A și B , se corespund în cele două fascicule perspective; la fel se întîmplă cu dreptele b și b_1 , asimptotice la a , în cealaltă direcție. Deci în cele două fascicule perspective sînt două perechi de raze asimptotice corespunzătoare (corespondența perspectivă între toate razele cu suportul A și B este posibilă numai după introducerea așa-ziselor puncte ideale ale lui a . Cu aceasta însă nu ne ocupăm aici).

2) A și B sînt în același semiplan definit de a , iar B este pe una dintre dreptele asimptotice la a , plecînd din punctul A (fig. 10). Și în acest caz sînt două perechi de raze asimptotice corespondente în cele două fascicule de drepte perspective, razele uneia dintre aceste perechi însă coincid.

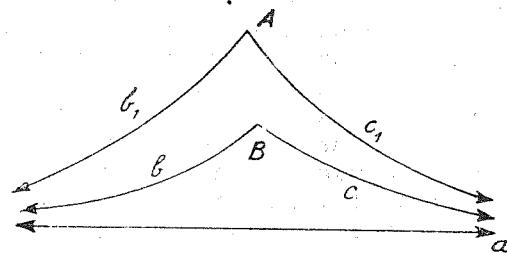


Fig. 9

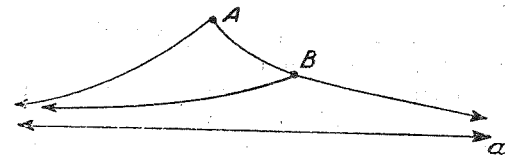


Fig. 10

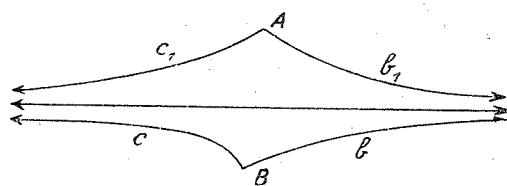


Fig. 11

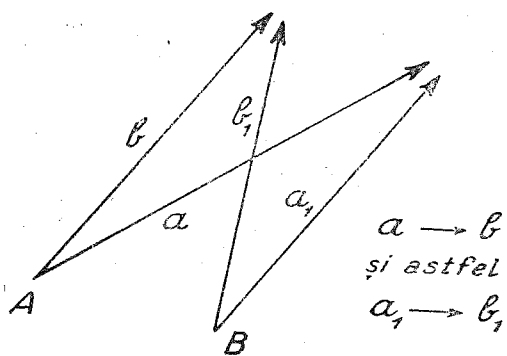


Fig. 12

nu au raze corespondente. Cu introducerea punctelor ideale, corespondența este și aici biunivocă.

Astfel pe baza definiției conicelor date de noi, există următoarele clase de conice:

I. Fasciculele de drepte dirijate în același sens:

- A. Nu există perechi de raze asimptotice corespondente.
- B. Există două perechi de raze asimptotice corespondente.

3) Punctele de suport ale fasciculelor de drepte sînt în cele două semiplane definite de a . Sînt două perechi de raze asimptotice corespondente (fig. 11).

Proiectivitatea între două fascicule de drepte poate fi obținută prin două perspectivități consecutive cu ajutorul intercalării unui fascicul intermediar.

Pe baza acestora, în două fascicule de drepte proiective, în general, pot fi 0, 2 sau 4 perechi de raze asimptotice corespondente.

Perechile de drepte asimptotice corespondente pot coincide în cazul degenerat (fig. 12). Afară de aceasta, proiectivitatea fasciculelor de drepte poate fi dirijată în același sens sau în sens opus.

La fasciculele de drepte dirijate în sens opus — după cum reiese din studiul mai amănunțit al proiectivității — totdeauna există perechi de raze asimptotice corespondente, iar la fasciculele de drepte dirijate în același sens, se pot întîmpla și cazuri, cînd nu există perechi de raze asimptotice corespondente. Dacă nu introducem punctele ideale ale dreptelor, atunci în foarte multe cazuri în fiecare dintre fasciculele proiective de drepte se pot găsi astfel de raze, care în celălalt fascicul

B_1 . Cele două perechi de raze sînt distincte și astfel în ambele fascicule de drepte există raze, care nu corespund la nici o rază din celălalt fascicul.

B_2 . Cele două perechi de raze asimptotice corespondente coincid.

C. Există 4 perechi de raze asimptotice corespondente.

C_1 . Cele 4 perechi de raze sînt distincte; există deci raze, care nu admit raze corespondente.

C_2 . Două perechi de raze asimptotice coincid, celelalte două sînt distincte; există deci raze, care nu admit raze corespondente.

C_3 . Perechile de raze asimptotice coincid două cîte două. Orice rază are rază corespondentă.

C_4 . Trei perechi de raze asimptotice coincid, a patra pereche este distinctă; sînt raze, care nu admit raze corespondente.

C_5 . Toate cele patru perechi de raze asimptotice coincid; există raze, care nu admit raze corespondente.

II. Fasciculele de drepte dirijate în sens opus.

A. Există patru perechi de raze asimptotice corespondente.

B_1 . Există două perechi de raze asimptotice distincte.

B_2 . Există două perechi de raze asimptotice corespondente, care coincid.

Observație. La fasciculele de drepte dirijate în sens opus există totdeauna raze, care nu corespund cu nici o rază din celălalt fascicul.

În total deci am obținut 11 clase de conice. F. Klein obține și el 11 clase de conice [4] pe baza conicei fundamentale din reprezentarea Klein. Liebmann [1] enumeră 9 clase de conice. La clasificare el n-a luat în considerare că două clase de conice conțin încă cîte o subclasă importantă. La clasificarea făcută pe baza definiției date de noi nu este necesar să studiem tangentele imaginare ale conicelor (ca în [5]) și în general proprietățile conicelor valabile în planul euclidian. Clasificarea noastră se bazează numai pe perechile de raze asimptotice corespondente ale fasciculelor de drepte proiective din planul Lobacevski-Bolyai și astfel rămîne strict în cadrul geometriei intrinsece a planului Lobacevski-Bolyai.

Într-o lucrare viitoare ne vom ocupa cu geometria elementară a fasciculelor de drepte din planul Lobacevski-Bolyai și în legătură cu aceasta cu extinderea planului Lobacevski-Bolyai pe calea geometriei elementare.

О КОНУСАХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЯХ ЛОБАЧЕВСКОГО — БОЛЬЯЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящем сообщении автор указывает некоторые свойства обобщенных конусов и дает новое определение конических сечений геометрии Лобачевского — Больяй, а также классификацию неевклидовых конических сечений.

В § 1 автор рассматривает расположение конусов в пространстве Лобачевского — Больяй, в частности в связи с асимптотическими плоскостями.

В § 2 приводятся несколько новых общих формул для расчета площадей и объемов обобщенных конусов, в случае когда постоянная кривизна является переменным параметром.

В § 3 автор рассматривает проективные пучки в плоскости Лобачевского-Болляй и дает общее проективное определение и классификацию конических сечений геометрии Лобачевского-Болляй, доказывая при этом тождественность определенных таким образом конических сечений с плоскими сечениями обобщенных конусов.

SUR LES CÔNES ET CONIQUES DE LA GÉOMÉTRIE DE LOBATCHEVSKY-BOLYAI

(RÉSUMÉ)

Dans cette Note, l'Auteur donne certaines propriétés des cônes généralisés, une nouvelle définition des coniques de la géométrie de Lobatchevsky-Bolyai et la classification des coniques non euclidiens.

Dans le § 1, l'Auteur s'occupe de la disposition des cônes dans l'espace de Lobatchevsky-Bolyai, notamment en rapport avec les plans asymptotiques.

Dans le § 2, il donne quelques nouvelles formules générales pour le calcul des aires et des volumes des cônes généralisés, lorsque la constante de courbure est un paramètre variable.

Dans le § 3, l'Auteur s'occupe des faisceaux projectifs dans le plan de Lobatchevsky-Bolyai. Il donne la définition générale projective et la classification des coniques dans la géométrie de Lobatchevsky-Bolyai et démontre l'identité des coniques ainsi définis, avec les sections planes des cônes généralisés.

BIBLIOGRAFIE

1. Liebmann, *Nichteuklidische Geometrie*. Göschen, Sammlung Schubert, Berlin-Leipzig, 1912.
2. V. I. Kostin, *Osnovaniia geometrii*. Moscova, Ucpedghiz, 1948.
3. Banola-Liebmann, *Die nichteuklidische Geometrie*. Teubner, Leipzig-Berlin, 1908.
4. Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*. Paderborn, 1893.
5. F. Klein, *Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie*. Springer, Berlin, 1928.
6. N. I. Lobachevski, *Pangeometria*. Leipzig, 1902.
7. I. Bolyai, *Appendix*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1953.
8. F. Enriques, *Fragen der Elementargeometrie*. Leipzig, Teubner, Berlin, 1911.

CONTRIBUȚII LA O TEORIE A STATISTICII GRUPELOR DE PETE SOLARE

DE

V. NADOLSCHI

Comunicare prezentată de M. HAIMOVICI, membru corespondent al Academiei R.P.R.,
în ședința din 30 iunie 1955

1. Se știe că observarea fenomenelor fotosferice și mai ales a petelor solare se face din secolul al XVII-lea, iar o statistică sistematică a acestor fenomene, bazată pe un material obținut prin mijloacele de observație ce se perfecționează mereu, din prima jumătate a secolului trecut, fiind inițiată prin lucrările lui Carrington, Spörer și Wolf urmați apoi de Wolfer, Hanski, Maunder și alții. Aceste lucrări statistice sînt continuate astăzi de serviciile solare ale mai multor observatoare astronomice, fiind coordonate de o secție specială a Uniunii astronomice internaționale și centralizate la Observatorul din Zürich. Statistica empirică a petelor și grupelor de pete solare a permis punerea în evidență a mai multor fenomene remarcabile, în legătură cu activitatea solară, cum ar fi periodicitatea undecimală a petelor, legea lui Spörer, evoluția în timp a ariei grupelor de pete, variația latitudinii heliografice medii a grupelor în cursul unui ciclu și altele, precum a permis, considerată împreună cu statisticile unor fenomene terestre, să stabilească corelații cunoscute dintre activitatea solară și aceste fenomene, furnizînd astfel bazele empirice pentru formularea problemei « Pămînt-Soare ».

Trebuie să remarcăm însă că, în general, datele acestei statistici empirice se prezentau sub o formă puțin potrivită unei prelucrări teoretice a lor în vederea elaborării unei teorii mulțumitoare a fenomenelor fotosferice. Fiind, în general, date brute ale observațiilor, viciate de intervenția altor fenomene fără legătură directă cu activitatea solară, sau combinații mai mult sau mai puțin arbitrare ale acestor date, elementele furnizate de statistica solară empirică nu reprezentau mărimi fizice direct legate de adevăratele cauze ale fenomenelor fotosferice și deci nu puteau servi decît într-o măsură imperfectă, la descoperirea și studiul acestor cauze. Este suficient să ne gîndim la modul arbitrar în care a fost definit *numărul relativ Wolf*, care totuși constituie și astăzi elementul de bază al statisticii empirice. Apoi, faptul că în toate aceste statistici se iau în considerație numai elementele *observate* și numai de pe partea *vizibilă* a globului solar, adică numai o parte a elementelor de acest fel, existente în realitate la un moment dat etc.