

CLASIFICAREA SUPRAFETELOR BAZATĂ PE GEOMETRIA INTRINSECĂ

DE

EUGEN GERGELY

Comunicare prezentată de academician GR. C. MOISIL în şedinţa din 13 ianuarie 1954

Vom înţelege prin suprafaţă, o mulţime de puncte în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni, care se bucură de următoarele două proprietăţi: fiecare punct are o vecinătate homeomorfă cu un cerc şi două puncte oarecare pot fi unite cu o curbă de o lungime finită. Vom numi puncte cu vecinătate convexă, acele puncte ale suprafeţei care posedă o vecinătate convexă, în sensul introdus de A. D. Alexandrov şi pe care există o metrică convexă. Dacă pentru un punct dat se poate găsi un plan ce trece prin punctul dat şi astfel ca o vecinătate a punctului să fie de o parte a planului sau în plan, atunci zicem că punctul considerat admite un plan local de sprijin. Punctele cu vecinătate convexă pot fi definite şi ca acele puncte care au vecinătăţi formate numai din puncte cu plan local de sprijin. O mulţime de puncte ale suprafeţei poartă denumirea de «domeniul convex al suprafeţei», dacă este conexă şi formată din puncte cu vecinătăţi convexe.

Fiecare domeniu convex este un domeniu în sens obişnuit, adică o mulţime conexă formată numai din puncte interioare.

Punctele cu vecinătăţi neconvexe pot fi domenii închise, curbe sau puncte izolate. Ele reprezintă mulţimea complementară a domeniilor convexe faţă de suprafaţa întreagă.

Frontierele domeniilor convexe sînt curbe continue sau puncte izolate, dacă în reprezentarea topologică a vecinătăţilor punctelor de pe suprafaţă, frontierele imaginilor topologice ale punctelor cu vecinătate convexă sînt curbe continue.

Frontierele domeniilor convexe le vom denumi curbe de separare ale suprafeţei.

În cele ce urmează ne ocupăm cu suprafeţele la care curbele de separare şi punctele izolate de separare formează o mulţime nicăieri densă.

Suprafeţele astfel obţinute le clasificăm, din punctul de vedere al geometriei lor intrinseci, cu ajutorul curbelor de separare.

Din definiţia dată suprafeţei, rezultă că, curbele de separare nu pot fi înlănţuite şi nici nu pot avea noduri.

Mulţimea curbelor şi a punctelor izolate de separare este cel mult numerabilă.

Curbele de separare au două borduri bine definite, fiindcă suprafețele noastre, în baza definiției, sînt bilatere. Bordurile curbilor de separare se notează cu un indice, care arată dacă domeniul la care aparține bordul e convex sau nu.

Suprafețele care, printr-o transformare topologică, se transformă una într-alta cu păstrarea sistemului curbilor și a punctelor izolate de separare, precum și a indicilor de bord, zicem că formează o clasă de suprafețe.

Geometria intrinsecă «în mare» a suprafețelor din clase deosebite este esențial diferită, iar geometria intrinsecă «în mare» a suprafețelor din aceeași clasă este identică în proprietăți esențiale (o subclasificare este încă posibilă).

Proprietățile importante ale curbilor de separare sînt următoarele:

Curbele de separare pot avea puncte comune, pot fi tangente sau să coincidă pe o porțiune a lor.

Într-un punct al suprafeței nu pot trece decît un număr finit de curbe de separare, adică într-un punct al suprafeței se pot întîlni numai un număr finit de domenii convexe și neconvexe.

La o curbă de separare închisă se pot atașa numai un număr finit de domenii convexe și neconvexe.

Fiecare curbă de separare închisă are o lungime finită.

Există și curbe de separare deschise și de lungime finită. La capetele unei astfel de curbe se pot atașa numai domenii convexe.

Urmează că, curbele de separare sînt de următoarele tipuri:

- curbe continue, închise, de lungime finită și fără noduri;
- curbe continue, deschise, de lungime finită și fără noduri;
- curbe infinite, continue și fără noduri.

În afară de acestea, pe domeniile convexe pot să existe puncte izolate de separare, ele formînd o mulțime cel mult numerabilă.

Sistemul complet al curbilor de separare constă dintr-o mulțime de curbe de tipul *a*), *b*), *c*), care pot avea puncte de contact, dar nu pot fi înlănțuite și pot alcătui sisteme izolate și neînlănțuite în mulțime cel mult numerabilă.

La un bord al unei curbe de separare închisă se atașează numai un singur domeniu convex, la celălalt bord pot fi atașate un număr finit de domenii convexe și neconvexe.

La un bord al unei curbe infinite de separare se poate atașa un domeniu convex infinit, iar la celălalt bord se pot atașa domenii convexe și neconvexe în mulțime cel mult numerabilă, în sfîrșit, la o curbă de separare deschisă, de lungime finită, se pot atașa la un bord un domeniu convex, conținînd și capetele curbei, la celălalt bord, domenii convexe și neconvexe în număr finit.

Domeniile atașate la curbele de mai sus le reprezentăm prin următoarele tipuri de construcție:

- calota sferică, ca tipul unui domeniu convex finit;
- suprafața convexă infinită, care poate avea găuri;
- domeniul constînd din punctele cu vecinătate convexă ale unei suprafețe de conexiune n (cu $2n$ curbe de separare);
- domeniul neconvex al unei suprafețe de tip tor;
- domeniul neconvex finit cu o singură curbă de separare;
- domeniul neconvex finit pe un hiperboloid x cu o pînză ca reprezentant al unui domeniu neconvex cu o singură curbă sau două curbe de separare;
- domeniul cu puncte neconvexe pe un hiperboloid cu o pînză infinită într-un sens și limitată de o curbă de separare în celălalt sens, ca reprezentantul unui domeniu neconvex atașat la o curbă de separare închisă.

Toate clasele de suprafețe, care aparțin la sistemele de curbe cu proprietățile arătate, pot fi reprezentate cu ajutorul tipurilor de construcție indicate.

Teoremă. Unui sistem de curbe și puncte izolate cu proprietățile înșirate mai sus, îi aparține întotdeauna o suprafață, al cărei sistem de curbe și puncte izolate de separare este tocmai sistemul dat.

Un reprezentant al clasei de suprafețe ce aparține sistemului de curbe și puncte dat, poate fi construit totdeauna cu ajutorul celor 7 tipuri enumerate.

Astfel proprietățile enunțate caracterizează sistemul curbilor de separare al suprafețelor considerate.

Suprafețele al căror sistem de curbe și puncte de separare pot fi transformate topologic una într-alta, aparțin la aceeași clasă de suprafață.

Sistemele de curbe de separare ale suprafețelor din aceeași clasă sînt homeomorfe.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВАНИИ ПРИСУЩЕЙ ИМ ГЕОМЕТРИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор классифицирует множество весьма общих поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве на основании присущей им геометрии. В основе классификации лежат так называемые разделяющие кривые, являющиеся границей областей, содержащих только точки с выпуклыми смежными окрестностями. Точки с выпуклыми смежными окрестностями определены на основании результатов, полученных А. Д. Александровым. Автор устанавливает характерные свойства разделяющих кривых и элементы построения поверхностей.

Конечным результатом является следующая теорема:

Системе кривых и отдельных точек, обладающих известными свойствами, всегда принадлежит поверхность, системой разделяющих кривых и отдельных точек которой является именно данная система. Поверхность, представляющая класс поверхностей, принадлежащих к данной системе кривых и точек, может быть всегда построена при помощи 7 элементарных типов. Поверхности, системы разделяющих кривых и точек которых могут быть топологически преобразованы одна в другую, принадлежат одному и тому же классу поверхностей. Системы разделяющих кривых поверхностей одного и того же класса гомеоморфны.

LA CLASSIFICATION DES SURFACES, BASÉE SUR LA GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE

(RÉSUMÉ)

L'Auteur fait une classification d'un ensemble très général de surfaces dans l'espace euclidien à trois dimensions, classification fondée sur leur géométrie intrinsèque. À la base de cette classification se trouvent les ainsi nommées courbes de

séparation, constituant la frontière des domaines qui ne contiennent que des points à voisinages convexes. Les points à voisinages convexes sont définis en vertu des résultats obtenus par A. D. Alexandrov et exposés dans sa « *Géométrie intrinsèque des surfaces convexes* ». L'Auteur établit les propriétés caractéristiques de séparation et les éléments de construction des surfaces.

Le théorème suivant contient le résultat final:

Une surface dont le système de courbes et de points de séparation isolés est justement le système donné, appartient toujours à un système de courbes et de points isolés ayant certaines propriétés. Un représentant de la classe de surfaces appartenant au système donné de courbes et de points peut toujours être construit à l'aide de 7 types élémentaires. Les surfaces dont le système de courbes et les points de séparation peuvent être topologiquement transformées l'une dans l'autre appartiennent à la même classe de surfaces. Les systèmes de courbes de séparation des surfaces de la même classe sont homéomorphes.