ACADEMIA R.P.R. BAZA TIMIŞOARA
LUCRĂRILE CONSFĂTUIRII DE GEOMETRIE
DIFERENŢIALĂ DIN 9—12 IUNIE 1955.

GEOMETRIA SUPRAFEŢELOR CONVEXE ŞI LEGĂTURA LOR CU GEOMETRIA DIFERENŢIALĂ

DE

E. GERGELY

INTRODUCERE

În ceea ce privește problema figurilor convexe (în plan și în spațiu) — se poate afirma că probleme de genul acesta s-au pus deja în antichitate. Bine înțeles, scopul acestei conferințe nu este de a da o tratare istorică a acestei probleme. Noi ne vom ocupa de situația actuală, privind, în special, rezultatele moderne din acest domeniu de cercetare. Totuși, țin să remarc faptul că rezultatul cel mai vechi, în această privință, este o teoremă (sau mai bine zis o afirmație) a lui Archimede, care poate fi formulată astfel:

dacă dintre două curbe închise și convexe, una este înăuntrul celeilalte, atunci cea din afară este totdeauna mai lungă.

Sărim acum multe secole și reamintim doar un rezultat al lui Cauchy, din 1813. Această teoremă o putem enunța astfel:

un poliedru convex este determinat dacă se cunosc: forma, mărimea și ordinea suprafețelor laterale.

În privința metodelor de demonstrare și a rezultatelor obținute, în această disciplină, trebuie să subliniem că studierea suprafețelor convexe este în strînsă legătură cu teoria corpurilor convexe; astfel, în cele ce urmează, vom insista de mai multe ori asupra acestui fapt.

Dezvoltarea suprafețelor convexe o putem împărți în 4 perioade:

a) prima perioadă o socotim pînă la apariția geometriei diferențiale;

b) a doua perioadă pînă la apariția lucrărilor lui Minkovski;

c) a treia etapă ar fi timpul în care au apărut lucrările lui Minkovski, pînă la apariția metodelor spațiului metric;

d) a patra etapă începe cu apariția metodelor spațiului metric, mai ales în lucrările lui A. D. Alexandrov și în lucrările elevilor săi.

În cele ce urmează, mai întîi vom motiva, pe scurt, această împărțire în etape, apoi vom caracteriza, în linii mari, cercetările și rezulta-

tele obţinute în cele 4 perioade; după aceasta ne vom ocupa de probleme mai importante — privind în special noile cercetări, metode şi rezultate.

În privinţa împărţirii istorice de mai sus, trebuie să accentuăm că de aici nu reiese nici de cum că metodele de cercetare dintr-o etapă anterioară, cu închiderea etapei, ar fi pierdut valabilitatea şi eficacitatea lor, sau că problemele mai vechi să nu fi avut şi mai departe efect inspirator. Metodele noi şi problemele noi — ca în general în matematică — îmbogăţesc şi pun sub o lumină nouă pe cele vechi, dar folosirea metodelor matematice continuă astfel se întîmplă şi în teoria suprafeţelor convexe.

Pe lîngă împărţirea istorică, are o importanţă deosebită împărţirea problemelor în sensul „geometriei în mic" şi „geometriei în mare". În afară de aceasta, se mai cunoaşte împărţirea din punctul de vedere al metodelor folosite, astfel: metodele geometriei elementare, metodele geometriei diferenţiale, metoda lui Minkovski şi metoda spaţiului metric.

Din cele spuse mai înainte, reiese clar că aplicarea metodelor de geometrie diferenţială constituie numai o parte din cercetarea proprietăţilor la suprafeţe convexe. Ţinînd seama, însă, de scopul acestei sesiuni, mă voi strădui să mă ocup în special cu metodele de acest gen la fiecare problemă ridicată. Ţin, însă, să remarc că metodele de geometrie diferenţială, şi mijloacele de cercetare folosite restrîng clasa suprafeţelor de studiat şi astfel ele nu se pot folosi la chestiunile privitoare la clasele importante de suprafeţe, mai ales la problemele „în mare". Este necesar deci să ne ocupăm şi de metodele legate de spaţiul metric, mai ales dacă ţinem seama că rezultatele cele mai noi au fost obţinute tocmai prin aceste metode.

§ 1. Motivarea împărţirii pe etape a dezvoltării teoriei suprafeţelor convexe. Caracterizarea etapelor

Pînă la descoperirea calculului diferenţial şi integral, studierea figurilor convexe s-a făcut cu ajutorul metodelor de geometrie elementară, care în parte anticipează metodele diferenţiale şi integrale, însă sub formă geometrică, servind mai ales la cercetarea problemelor izoperimetrice în legătură cu curbele şi suprafeţele cunoscute în acel timp.

Calculul diferenţial şi integral, după cum se ştie, a adus o schimbare profundă în special în studiul proprietăţilor „în mic", adică în chestiunile privitoare la vecinătatea punctului; împărţirea punctelor suprafeţei în puncte eliptice, iperbolice şi parabolice, iar paralel cu aceasta — studierea suprafeţelor sau a regiunilor de suprafeţe care conţin numai puncte eliptice, iată care sînt chestiunile care atrag atenţia din ce în ce mai mult asupra studierii suprafeţelor convexe. În urma cercetărilor şi rezultatelor lui Gauss, problemele în legătură cu transformările izometrice, apoi cercetarea figurilor convexe în spaţiile riemanniene, în sfîrşit cercetarea curbelor şi sistemelor de curbe pe suprafeţele convexe, sînt chestiuni care trezesc interesul cercetătorilor.

Cercetarea curbelor de suprafaţă, studierea problemelor izoperimetrice şi a altor probleme extremale, apoi studierea problemelor de „rigiditate" a suprafeţelor, sînt acelea care ne conduc la studiul „în mare" al problemelor de geometrie diferenţială şi constituiesc obiectul acestor cercetări.

Suprafeţele folosite în aceste cercetări sînt, de cele mai multe ori, diferenţiabile, chiar analitice şi rezultatele obţinute se referă de asemenea la suprafeţe de astfel de clase. Se ştie că acest fapt reiese din natura mijloacelor matematice ce se folosesc în geometria diferenţială.

Cercetările lui Minkovski, în domeniul corpurilor convexe şi al suprafeţelor ei, socotind şi lucrările anterioare şi ulterioare ale altor cercetători, aduc o nouă metodă şi — concomitent cu aceasta — noi rezultate în teoria figurilor convexe. Astfel lucrările lui Minkovski şi rezultatele obţinute în aceste lucrări într-adevăr înseamnă o nouă etapă în dezvoltarea acestei teorii. Bine înţeles, în aceste cercetări, metodele geometriei diferenţiale sînt folosite numai într-o mică măsură. Ca mijloace de cercetare se folosesc: funcţiile convexe şi ecuaţiile lor funcţionale, apoi funcţiile de sprijin şi de distanţă — indiferent dacă ele sînt derivabile sau nu — şi, în sfîrşit, expresii de integrale şi anumite forme liniare.

Este foarte important că rezultatele şi teoriile geometrice ale lui Minkovski au găsit o aplicare largă în teoria numerelor, în teoria formelor şi în teoria cristalelor.

După constatarea lui Minkovski, figurile convexe au un rol asemănător în geometria contemporană — constatarea datează din 1916 — ca figurile de gradul al doilea, în geometria proiectivă.

Studierea diferitelor spaţii metrice, apoi dezvoltarea topologiei şi a analizei funcţionale au fost acelea care au dat un nou avînt în cercetările geometrice. Hilbert, Cohn-Vossen şi mai ales A. D. Alexandrov şi grupul cercetătorilor din jurul lui, au elaborat o nouă metodă şi au adus rezultate bogate în studiul figurilor convexe.

Cu ajutorul acestei metode, mai ales în urma activităţii matematicienilor sovietici, s-a descoperit o serie întreagă de proprietăţi importante, în cazul suprafeţelor convexe, mult mai generale, şi chiar în domeniul geometriei „în mare" s-a dat o metodă generală şi prin aceasta o posibilitate de cercetări sistematice, tocmai acolo unde metodele geometriei diferenţiale nu se aplică sau se aplică greoi.

După părerea noastră această metodă şi rezultatele de aici constituiesc o nouă perioadă în studierea figurilor convexe.

§ 2. Noţiunile mai importante ale metodei spaţiilor metrice

Socotim necesar, înainte de toate, să dăm o privire generală asupra noţiunilor mai importante din lucrările de genul lui A. D. Alexandrov pe baza cărţii lui: *„Geometria intrinsecă a suprafeţelor convexe"* (1948).

În lucrarea aceasta, cercetările se referă mai ales la spaţiul cu 3 dimensiuni, dar tratarea problemelor analoge este posibilă şi la varietăţi metrice mai generale.

Suprafaţa este o mulţime de puncte în care:

1) fiecare punct are o vecinătate omeomorfă cu cercul;

2) două puncte oarecare ale mulţimii se pot lega printr-o curbă continuă situată în mulţimea dată.

Curba continuă este imaginea continuă a unei secţiuni de dreaptă.

Dacă, la o suprafaţă, toate perechile de puncte se pot lega printr-o curbă de lungime finită, atunci limita precisă inferioară a lungimii curbelor, care leagă două puncte date, se numeşte distanţa de suprafaţă. Acea-

stă distanță de suprafață o notăm cu $\varrho(X, Y)$ între punctele X și Y și pentru funcția această sînt valabile; $\varrho(X, Y)=0$ atunci și numai atunci, dacă punctele X și Y sînt identice; $\varrho(X, Y)=\varrho(Y, X)$ și este valabilă și inegalitatea triunghiulară $\varrho(X, Y) \leq \varrho(X, Z)+ (Y, Z)$. Astfel suprafața se cercetează ca un spațiu metric avînd metrica $\varrho(X, Y)$; metrica aceasta o numim intrinsecă, fiindcă este independentă de acel spațiu, în care mulțimea dată este scufundată. Despre o geometrie intrinsecă a unei suprafețe putem vorbi numai dacă două puncte oarecare se pot lega cu o curbă continuă și de lungime finită.

In cadrul geometriei intrinseci intră numai acele noțiuni și teoreme care se pot defini și demonstra numai pe baza distanței de suprafață.

Două spații metrice sînt izometrice dacă între punctele lor există o corespondență biunivocă, la care distanțele tuturor perechilor de puncte corespunzătoare sînt identice. In acest caz, geometria lor intrinsecă este identică.

Suprafața convexă este un domeniu care conține numai punctele de margine ale unui corp convex. O suprafață convexă întreagă este mulțimea întreagă a punctelor de margine ale unui corp convex. In spațiul euclidian, o suprafață convexă întreagă este omeomorfă cu sfera sau cu planul sau cu suprafața laterală a unui cilindru infinit de rotație.

Toate suprafețele convexe au o metrică intrinsecă adică au o geometrie intrinsecă.

Liniile cele mai scurte, pe suprafața convexă, sînt acelea la care se realizează metrica suprafeței. Intr-o suprafață convexă și întreagă, pentru fiecare pereche de puncte, există o linie, cea mai scurtă care le leagă.

Un domeniu la o suprafață convexă se numește convex, dacă fiecare pereche de puncte a domeniului se poate lega cu o linie cea mai scurtă. care se află în domeniu. Geometria intrinsecă a unui domeniu convex este independentă de mărimea suprafeței în care se află. La fiecare punct al unei suprafețe convexe există o vecinătate convexă. O suprafață întreagă convexă este o vecinătate convexă pentru fiecare punct al ei.

Suprafața de poliedru este o suprafață care este formată dintr-un număr finit sau numerabil de poligoane, iar toate vecinătățile unui punct oarecare al acestei suprafețe pot aparține numai la un număr finit de fețe.

Un spațiu metric are metrica de poliedru dacă fiecare punct al lui are o vecinătate izometrică cu un con și distanța între două puncte arbitrare ale lui este egală cu limita precisă inferioară a lungimii liniilor din mulțimea acelor linii care leagă aceste puncte. Metrica poliedrică se numește de curbură pozitivă dacă fiecare punct are o vecinătate cu un unghi întreg $<2\pi$.

Condiția necesară și suficientă ca un spațiu metric să fie izometric, cu o suprafață de poliedru închis și convex, este ca să fie omeomorfă cu sfera, să aibă o metrică de poliedru cu curbură pozitivă și distanța de suprafață să fie limita precisă inferioară a lungimii liniilor care leagă perechile de puncte ale suprafeței.

Noțiunile mai importante ale geometriei intrinseci.

Liniile geodezice ale suprafeței sînt acele linii continue pe suprafață, ale căror porțiuni, destul de mici, sînt curbele cele mai scurte.

Triunghiul de suprafață este un domeniu pe suprafață, care este mărginit de trei linii din cele mai scurte.

Triunghiul geodezic de suprafață este un domeniu pe suprafață omeomorf cu un cerc și mărginit de 3 linii geodezice (nu neapărat de cele mai scurte).

Cercul de suprafață este mulțimea punctelor de pe suprafață, pentru care distanța de suprafață de un punct dat al suprafeței nu este mai mare decît o distanță dată. Linia de cerc este mulțimea punctelor de suprafață situate la o distanță dată de suprafață de un punct.

Definiția unghiului. Printr-un punct O al suprafeței să ducem 2 curbe de suprafață $X(t)$ și $Y(s)$; punctele le numim pe scurt X_t și Y_s. Construim în plan triunghiul cu laturile $\varrho(OX_t)$, $\varrho\ (OY_s)$, $\varrho\ (X_t Y_s)$.

Să notăm cu $\gamma\ (t, s)$ unghiul în acest triunghi opus de latura $X_t Y_s$. Unghiul a două curbe date îl numim $\lim \gamma(t, s)$, dacă $t \to 0$ $s \to 0$. Este posibil că limita aceasta în unele puncte ale unei suprafețe, pentru unele curbe, să nu existe și atunci spunem că acele curbe n-au un unghi determinat.

Două linii, cele mai scurte care trec printr-un punct al unei suprafețe, au totdeauna un unghi bine determinat.

Conul tangent unei suprafețe într-un punct O al ei. Transformăm suprafața omologic în punctul O de pe suprafață, O fiind centru de omologie; raportul de omologie să tindă la infinit; suprafața se transformă într-un con convex și aceasta este conul tangent în punctul O.

Semitangenta unei curbe de suprafață este poziția de limită a unei semidrepte, care leagă un punct O al curbei cu un alt punct A al curbei, dacă A tinde spre O.

Teorema lui I. M. Liebermann. Fiecare linie, cea mai scurtă la o suprafață convexă în fiecare punct are semitangente din dreapta și din stînga.

Curbură de mulțime. Mulțimea de puncte de suprafață o acoperim cu triunghiuri de suprafață și sumăm excesiunile $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ ale triunghiurilor. Suma aceasta, pe o suprafață convexă, este totdeauna pozitivă. Limita precisă inferioară numerelor astfel obținute, considerînd toate acoperirile posibile, o numim curbura de mulțime.

§ 3. Vecinătatea convexă. Mulțimea punctelor cu vecinătatea convexă

In sensul definiției metodei diferențiale pe o suprafață din E^3, un punct este de vecinătate convexă, dacă indicatoarea lui Dupin este o elipsă sau un cerc, și astfel curbura K a lui Gauss în acest punct, este pozitivă. Dacă suprafața într-o vecinătate a punctului este derivabilă de un număr suficient de ori, atunci punctul are o vecinătate unde condiția de vecinătate se îndeplinește pentru fiecare punct; aceasta este o vecinătate convexă a punctului. Părțile suprafeței, formate din punctele de vecinătate convexe, formează domenii deschise.

In cele ce urmează, suprafețele finite, închise, analitice la care $K>O$, se vor numi ovaloide. Fiecare punct de pe un ovaloid are o vecinătate convexă.

In geometria spațiului metric — cum am spus — o vecinătate convexă a unui punct este un domeniu convex care conține punctul dat. Fiecare punct al suprafeței are vecinătăți convexe.

§ 4. Liniile geodezice și cele mai scurte pe suprafețe convexe

În privința geometriei intrinseci a suprafețelor, au un rol deosebit de mare liniile geodezice și cele mai scurte și mai departe linii cu curbura geodezică constantă.

Printre suprafețele cu curbura constantă, pozitivă, deci și printre suprafețele convexe, există unele la care toate liniile geodezice sînt închise și la care cercurile geodezice de distanță și de curbură sînt identice și care sînt transformabile în plan astfel, încît liniile geodezice să fie transformate în dreptele planului.

Este important rezultatul lui Poincaré pentru liniile geodezice ale unui ovaloid, după care imaginea sferică a unei linii geodezice închise împarte în două părți egale suprafața sferei de rază de unitate, iar un alt rezultat ar fi că dintre toate curbele închise pe ovaloid, avînd imaginile sferice care înjumătățesc suprafața sferei, linia cu lungimea cea mai scurtă dintre cele considerate este o linie geodezică. Pe fiecare ovaloid există cel puțin trei linii geodezice închise.

Între curbele, care leagă fiecare pereche de puncte pe un ovaloid, se găsește totdeauna o curbă, cea mai scurtă și aceasta aparține unei curbe geodezice.

Bonnet, deja în anul 1855, a cunoscut faptul că dacă la un ovaloid $K<1/A^2$, atunci distanța de suprafață pentru fiecare pereche de puncte este mai mică decît πA și astfel diametrul intrinsec al suprafeței este mai mic ca πA. Pe suprafețele care îndeplinesc condiția aceasta, punctele conjugate, în sensul calculului variațional, ale unui punct O sînt față de punctul O la o distanță de suprafață mai mică decît πA.

O teoremă a lui Caratheodory stabilește că pe ovaloid, în fiecare punct, există o direcție astfel că linia geodezică, în direcția aceasta, este închisă și are un punct conjugat la punctul dat.

Toate aceste rezultate sînt demonstrate cu condiția că suprafețele să fie diferențiabile de mai multe ori sau analitice. Metoda spațiului metric nu este legată de aceste condiții și astfel rezultatele sale sînt valabile pe suprafețele generale definite în § 2.

Pentru liniile cele mai scurte pe suprafețele generale A. D. Alexandrov, demonstrează că dacă într-un domeniu compact al suprafeței două puncte ale domeniului se pot lega cu linii de lungime finită în domeniu, atunci există în domeniu linia cea mai scurtă; limita unui șir convergent al liniilor celor mai scurte este tot o linie, cea mai scurtă. Dacă o varietate are o metrică completă, atunci la fiecare pereche de puncte aparține o linie, cea mai scurtă.

Astfel, pe o suprafață convexă întreagă și închisă, fiecare pereche de puncte se poate lega cu o linie, cea mai scurtă. Dar în schimb, pe o suprafață generală convexă într-un punct pot exista și direcții în care nu pornesc linii, cele mai scurte.

În cercetările privitoare la problemele liniilor celor mai scurte are un rol deosebit o proprietate de unicitate, pe care A. D. Alexandrov o numește *„neaplicabilitatea uneia pe alta"*. Aceasta e următoarea: *dacă două linii, cele mai scurte, la o porțiune a lor sînt identice, atunci una este o parte a alteia.* Teorema este valabilă nu numai la suprafețele convexe, dar și în varietăți metrice mai generale.

Generalizările liniilor geodezice sînt așa zisele linii cvasigeodezice. La definiția acestora avem nevoie de noțiunea de „învîrtire a unei curbe". Unghiurile în vîrfurile unei linii geodezice frînte să fie α_i și β_i; linia aceasta are două laturi, unghiurile spre o latură să fie unghiurile α_i, spre cealaltă latură β_i. Învîrtirea liniei frînte spre o latură $\varphi=\sum(\pi-\alpha_i)$, spre latura cealaltă $\psi=\sum(\pi-\beta_i)$.

Dacă L este o curbă pe suprafață fără puncte multiple cu capetele A și B și L_i o linie geodezică frîntă cu aceleași capete la o latură a curbei date și capetele au unghiurile α_i și β_i cu curba dată, atunci învîrtirea curbei o definim

$$\varphi=\lim_{L_i\to L}(\varphi_i+\alpha_i+\beta_i),$$

unde L este învîrtirea liniei L_i.

La suprafața convexă limita aceasta există și este independentă de șirul liniilor L_i.

Liniile cvasigeodezice sînt acelea, la care pentru fiecare porțiune a liniei învîrtirile, spre amîndouă laturile sînt nenegative.

La liniile geodezice învîrtirea spre fiecare latură este nulă și astfel cvasigeodezicele sînt generalizări naturale ale geodezicelor.

Limita unui șir a cvasigeodezicelor este linia cvasigeodezică. Dacă un șir de suprafețe convexe (F_n) converge spre o suprafață convexă F, atunci cvasigeodezicele suprafețelor F_n converg spre cvasigeodezicele suprafeței F. Pe toate suprafețele convexe în fiecare punct, în fiecare direcție merge una, eventual și mai multe linii cvasigeodezice. A. V. Pogorelov a demonstrat că, în fiecare suprafață convexă închisă, sînt cel puțin trei cvasigeodezice închise.

§ 5. Triunghiurile și poligoanele pe suprafețe convexe

Laturile poligoanelor și triunghiurilor pe suprafețe sînt liniile cele mai scurte. Un poligon de suprafață omeomorf cu cercul se poate împărți în triunghiuri de suprafață la care suma a două laturi totdeauna este neapărat mai mare ca latura a treia. Acest fapt este foarte important la triangularea suprafețelor convexe. Pe o suprafață convexă suma unghiurilor la un triunghi destul de mic este $>2\pi$. Pe o suprafață de curbură constantă pozitivă suma unghiurilor unui triunghi geodezic este totdeauna mai mare ca 2π.

§ 6. Proprietățile metricii suprafețelor convexe. Realizarea metricii cu ajutorul suprafețelor convexe

În legătură cu problemele amintite în titlu, H. Weyl, în 1916, a demonstrat o teoremă importantă, anume că toate varietățile, omeomorfe cu sfera, de curbură pozitivă și analitice se pot scufunda în spațiul euclidian, adică există în spațiul euclidian o suprafață analitică, închisă, pe care se realizează metrica dată. Rezultatul lui H. Weyl a fost precizat de G. Lewy, în 1938.

A. D. Alexandrov, în lucrările sale, începînd din 1941 cu metoda spațiului metric, a generalizat acest rezultat la suprafețele generale definite de el.

A. D. Alexandrov a studiat problema mai întîi pe suprafețe de poliedru; după aceea cu șirurile suprafețelor de poliedru aproximează suprafețele generale și demonstrează că o metrică dată — cu condiții speciale — este realizabilă. Teorema principală a lui, referitoare la suprafețele de poliedru, stabilește că fiecare metrică de poliedru, dată pe sfera întreagă și de curbură pozitivă, este realizabilă cu ajutorul unei suprafețe de poliedru convexă și închisă. La demonstrare folosește faptul că o astfel de metrică se poate da cu o rețea de triunghiuri.

In cazul suprafețelor generale, rezultatele lui sînt următoarele:

1) un spațiu metric cu o metrică omeomorfă cu sfera de curbură pozitivă este izometrică cu o suprafață închisă convexă;

2) un spațiu metric cu o metrică, omeomorfă cu plan, completă și de curbură constantă este izometric cu o suprafață convexă infinită și completă;

3) pe toate varietățile cu metrica pozitivă toate punctele au vecinătăți izometrice cu o suprafață convexă.

La demonstrații au un rol foarte important: definiția unghiurilor, împărțirea poligoanelor pe suprafață în triunghiuri destul de mici, faptul că o metrică destul de apropiată de o metrică de poliedru realizabilă este de asemenea realizabilă și proprietatea metricii de curbură pozitivă, că într-o astfel de varietate, unghiul întreg în jurul fiecărui punct nu este mai mare decît 2π.

Proprietatea mai însemnată a metricei suprafețelor convexe este curbura pozitivă care se definește ca o funcție de mulțime în spațiul metric.

Afară de aceasta pe o suprafață convexă închisă metrica este omeomorfă cu o metrică dată pe sferă iar pe o suprafață *infinită* convexă omeomorfitatea cu plan este necesară.

Definiția curburei este o generalizare a curburei lui Gauss, dar nu depinde de proprietățile de derivabilitate a suprafeței.

§ 7. Problemele de unicitate pe suprafețe convexe cu metrică dată. Aplicarea suprafețelor convexe

O problemă importantă a suprafețelor convexe este de a vedea în ce măsură o metrică dată realizabilă, determină suprafața care realizează această metrică, dacă în această realizare luăm în considerare numai suprafețele convexe. Natural unicitatea se înțelege în sensul că aici nu se ia în considerare mișcarea în spațiu și simetrizarea.

Este cunoscut că o parte destul de mică a unei suprafețe analitice convexe se poate deforma, metrica ei rămînînd neschimbată și astfel metrica „în mic" nu determină suprafața convexă (Levy 1908).

Din rezultatele mai vechi este important rezultatul deja amintit de Cauchy despre suprafețele de poliedru.

L. P. Olovianisnicov, distinsul matematician sovietic, care a căzut în marele război pentru apărarea patriei, a demonstrat, în 1941, că o suprafață convexă, izometrică cu o suprafață de poliedru convexă și închisă este congruentă cu această suprafață de poliedru.

In privința problemelor de unicitate, referitoare la realizarea metricei generale, dată pe sferă și de curbura pozitivă, avem încă relativ puține rezultate. Încă în 1838, Minding a constatat, pentru suprafețele analitice, că între acestea, afară de sferă, nu există o altă suprafață închisă de curbură pozitivă constantă.

Teorema a fost demonstrată precis de Liebermann, în anul 1899, tot în cazul suprafețelor analitice.

Două teoreme ale lui Cohn-Vossen aduc noi contribuții la rezolvarea problemei de unicitate. Într-o lucrare apărută în volumul I. al U.M.N. el a demonstrat că: dacă două suprafețe de trei ori derivabile închise, convexe și de curbură constantă sînt izometrice, atunci sînt congruente. Pentru ovaloide, cu condiția analiticității, acest fapt a fost demonstrat deja de H. Liebermann și de H. Weyl.

Cohn-Vossen, fără condiția de analiticitate, a demonstrat că singura suprafață convexă închisă și de curbură constantă este sfera.

In anul 1938 A. D. Alexandrov a demonstrat că, dacă se consideră imaginile sferice a două suprafețe convexe și închise și dacă fiecărui domeniu pe sferă îi corespund, două domenii pe suprafețe cu aria egală, atunci suprafețele sînt congruente și în poziție identică.

Situația este alta la suprafețele convexe neînchise; aici unicitatea necesită mai multe condiții.

Cohn-Vossen a demonstrat că, dacă dintr-o suprafață convexă închisă eliminăm un domeniu cît mai mic, suprafața rămasă nu este determinată de metrica ei, ci este aplicabilă.

După S. P. Olovianisnikov (1941), toate suprafețele convexe întregi și omeomorfe cu plan, dacă curbura lor întreagă este mai mică decît 2π, au transformări izometrice netriviale. Demonstrația lui este foarte interesantă. El transformă suprafața dată F, dintr-un punct al suprafeței ca centru într-un con convex. Curbura întreagă a conului este identică cu curbura întreagă a suprafeței date. Luînd o suprafață de con, convexă și de curbură întreagă identică cu cea de mai înainte, dar de altfel arbitrară, atunci la aceste suprafețe de con aparține o suprafață izometrică cu F fără să fie congruentă cu F și conul de tangență al ei este tocmai conul dat t. Cu schimbarea conului, primim suprafețele izometrice cu F. Pentru F nu se cere nici o condiție de derivabilitate.

A. V. Pogorielov a demonstrat unicitatea pentru suprafețele întregi convexe și infinite, dacă curbura întreagă este 2π, dar teorema conține încă cîteva condiții. Referitor la unicitatea metrică a suprafețelor convexe de rotație, există o teoremă a lui A. D. Alexandrov, din anul 1936. El a demonstrat că o suprafață convexă de rotație este rigidă atunci, și numai atunci, cînd nu conține domeniile de plan și imaginea lui sferică este sfera întreagă.

A. V. Pogorielov, într-o lucrare din anul 1949, introduce noțiunea de „curbură parțială mărginită" a suprafeței. O suprafață S în E^3 are o curbură parțială mărginită atunci cînd există un număr M astfel ca raportul măsurii imaginii sferice a unui domeniu oarecare pe S și al măsurii domeniului însuși să fie mai mic decît M.

Dacă F_2 este o suprafață convexă închisă cu curbură parțială mărginită și F_2 este izometrică cu o suprafață convexă F_1, atunci suprafețele F_2 și F_1 sînt congruente.

Teorema arată că o suprafață convexă închisă și izometrică cu un elipsoid, este un elipsoid.

O altă consecință este că o suprafață convexă închisă, avînd o geometrie intrinsecă analitică, este analitică și ca suprafață privită în E^3.

A. V. Pogorielov arată unicitatea și pentru așa zisa calotă convexă. O calotă convexă este o suprafață convexă mărginită de o curbă închisă plană C și astfel, ca proiecția perpendiculară a suprafeței pe planul curbei C să fie interiorul curbei C. Dacă F_1 este o calotă convexă cu curbura parțială mărginită și F_2 tot o calotă convexă izometrică cu F_1, atunci F_1 și F_2 sînt congruente.

O lucrare a lui S. J. Stoker (1950) se referă la acele suprafețe convexe regulate care, la o transformare topologică și derivabilă de trei ori, sînt imaginile unei sfere și au $K>0$. Suprafața este determinată, dacă K este dat pe sferă și este determinată atunci dacă R_1+R_2 este dat pe sferă. În lucrare se demonstrează și teorema despre rigiditatea sferei.

§ 8. Probleme de curbură pe suprafețe convexe

Metoda spațiului metric este de mare folos și în tratarea problemelor de curbură a suprafețelor convexe. (Definiția în § 2). Notăm curbura unei mulțimi M cu $\omega(M)$.

Pe baza definiției date în § 2 curbura unui triunghi T deschis de suprafață $\omega(T)=\alpha+\beta+\gamma-\pi$. Curbura unei linii, cea mai scurtă, deschisă, este nulă și curbura unui punct X, $\omega(X)=2\pi-\theta$, unde θ este unghiul total în jurul punctului X. Curbura unui punct este totdeauna nenegativă. În general curbura unei mulțimi de puncte a suprafeței este egală cu măsura imaginii sferice a mulțimii. La determinarea imaginii sferice trebuie să luăm în seamă normalele planelor de sprijin corespunzătoare punctelor mulțimii.

Definiția metrică a curburei este astfel generalizarea curburei lui Gauss.

Dacă unghiurile unui triunghi de suprafață sînt α, β, γ iar curbura interiorului ω și unghiurile triunghiului plane în care laturile sînt de aceeași lungime ca în triunghiul dat de suprafața α_0, β_0, γ_0 atunci

$$0 \leqq \alpha-\alpha_0 \leqq \omega, \quad 0 \leqq \beta-\beta_0 \leqq \omega, \quad 0 \leqq \gamma-\gamma_0 \leqq \omega.$$

Sînt interesante triunghiurile de suprafață cu curbura nulă. Aceste triunghiuri sînt izometrice cu triunghiurile plane corespunzătoare.

Drept consecință, condiția necesară și suficientă ca un domeniu G al suprafeței convexe să fie local izometric cu planul, care înseamnă că fiecare punct al domeniului are o vecinătate izometrică cu un domeniu plan, este ca curbura fiecărui triunghi de suprafață (în domeniul G) să fie nulă și astfel curbura întregului domeniu să fie nulă.

§ 9. Curbele de suprafață pe suprafețele convexe

Proprietățile cele mai importante ale curbelor geodezice și cele mai scurte le-am văzut deja în § 4.

Reamintim, aici, că pe suprafețele convexe care nu sînt în fiecare punct netede, nu pornește din fiecare punct în fiecare direcție linia cea mai scurtă. Exemplu: pe conul de rotație, mărginit printr-un cerc paralel, nu există o linie cea mai scurtă, tangentă la cercul paralel de bază.

Direcția curbei de suprafață (din punctul de vedere al geometriei intrinseci) necesită deci o definiție nouă, fiindcă direcția curbei este dată astfel prin linia cea mai scurtă tangentă la curbă în punctul dat. Spunem despre o curbă, că într-un punct are o direcție bine determinată, dacă în punctul acela formează cu sine însăși un unghi bine determinat, în sensul definiției unghiului dată în § 2. Atunci unghiul este totdeauna nul.

Toate liniile cele mai scurte în fiecare punct au o direcție bine determinată.

O condiție, necesară și suficientă, ca două curbe care trec printr-un punct O să aibă un unghi α bine determinat este ca unghiul între liniile cele mai scurte OX_t și OY_s să tindă spre α dacă $t, s \to O$.

O condiție echivalentă cu acestea este ca în punctul O amîndouă curbele să aibă direcția bine definită.

Prin definiție, două curbe ce trec printr-un punct O au aceeași direcție, dacă unghiul lor este bine determinat și nul.

Dacă o curbă în punctul O are o direcție determinată, atunci există și o curbă, cea mai scurtă, tangentă la curba dată în acest punct, adică o curbă cea mai scurtă care formează cu curba dată un unghi bine determinat și nul.

Între generatoarele conului de tangentă în punctul O și direcțiile de curbe pe suprafață este o relație biunivocă și unghiurile corespunzătoare sînt identice. Generatoarele conului tangent sînt semitangentele curbelor de suprafață.

Proprietățile învîrtirii curbelor de suprafață. (Definiția în § 4).

Dacă pe o suprafață convexă o curbă L mărginește un domeniu G, omeomorfă cu cerc și de curbură ω, atunci

$$\omega = 2\pi - \varphi$$

unde φ este învîrtirea curbei în direcția domeniului G.

Relația între învîrtirea și curbura curbei este dată de teorema următoare: suma învîrtirilor de la dreapta și de la stînga ale unei curbe fără puncte multiple este egală cu curbura curbei fără capete.

O relație importantă este și între rectificabilitatea și învîrtirea unei curbe; dacă învîrtirea unei curbe pe suprafață convexă este de variație mărginită (ca funcțiune de arc) atunci este rectificabilă și învîrtirea este o funcțiune complet aditivă a arcului.

Curbele importante de suprafețe sînt curbele care mărginesc domeniile convexe. Învîrtirea unui arc al unei astfel de curbe (spre domeniu) este nenegativă. O consecință a acestui fapt este că un domeniu convex și compact, pe o suprafață convexă, poate fi de trei tipuri:

1) suprafața întreagă închisă;

2) domeniul închis omeomorf cu cerc;

3) domeniul izometric cu suprafaţa laterală a unui cilindru de rotaţie.

Liniile de cerc pe suprafaţă pot diferi esenţial de forma obişnuită a cercului — şi din punctul de vedere topologic. Pot fi de exemplu omeomorfe cu un arc de cerc în plan.

Cu toate acestea, există o analogie interesantă cu teorema perpendicularităţii între raza şi tangenta unui cerc în plan. Dacă A este un punct la un cerc de suprafaţă cu centrul O şi dacă şirul punctelor pe circonferinţa cercului, (X_n) tinde spre A, astfel ca razele pe suprafaţa OX_n (liniile cele mai scurte) tind spre linia cea mai scurtă OA, atunci unghiul între liniile cele mai scurte AX_n şi OA tinde spre 90°.

La fiecare punct O al suprafeţei există un număr pozitiv r_0, astfel ca orice linie de cerc pe suprafaţă cu o rază mai mică decît r_0, să fie o curbă simplă, închisă, omeomorfă cu o linie de cerc în plan.

Raportul lungimii şi razei unui cerc în plan este 2π. Pe suprafeţele convexe relaţia este următoarea:

Lungimea unei linii de cerc pe suprafaţă să fie $l(r)$, unde r este lungimea razei; $\frac{l(r)}{r}$ nu este constant, dar nu creşte împreună cu r; este valabilă inegalitatea următoare

$$\theta \geqq \frac{l(r)}{r} \geqq \theta - \omega(r)$$

unde θ este unghiul întreg în jurul centrului $\omega(r)$ curbura „cercului" mărginit de linia de cerc dată. În locul liniei întregi de cerc putem lua numai o secţiune de cerc mărginită de un arc şi de razele pe suprafaţă la capetele arcului. În locul unghiului θ trebuie să punem acum unghiul φ alcătuit de două raze la capetele arcului.

$$\varphi \geqq \frac{l(r)}{r} \geqq \varphi - \omega(r)$$

$\omega(r)$ este curbura secţiunii de cerc fără centru.

Aici am vorbit numai de liniile de cerc de distanţă. Pe suprafeţele convexe diferenţiabile s-au studiat şi liniile de cerc de curbură constantă; o condiţie necesară ca pe o suprafaţă aceste două tipuri de linii de cerc să fie identice, este ca curbura K să fie constantă. De exemplu: sfera.

§ 10. Ariile pe suprafeţele convexe

Pe suprafeţele derivabile sau analitice, ariile pe suprafeţe se calculează prin integrarea elementului de suprafaţă. Fără condiţia de regularitate metoda aceasta nu se poate aplica.

Un poligon de suprafaţă se poate împărţi în triunghiuri de suprafaţă astfel, ca la densitatea convenabilă a împărţirii diametrul triunghiurilor să fie mai mic ca un număr dat $\varepsilon > 0$. La fiecare triunghi de suprafaţă alcătuim triunghiul pe plan cu aceeaşi lungime de latură ca la triunghiul pe suprafaţă şi sumăm ariile pe poligonul întreg. Dacă $\varepsilon \to 0$, suma tinde spre o limită şi limita aceasta o numim aria poligonului de suprafaţă. Toate poligoanele de suprafaţă convexă au aria bine determinată şi aria astfel definită este o funcţie complet aditivă.

După determinarea ariei poligonului, cu metoda cunoscută a măsurii putem determina aria (măsura) tuturor mulţimilor închise, deschise sau de tip Borel pe suprafaţă.

La demonstrarea teoremei, metrica suprafeţei se aproximează cu metrica poliedrică. Pentru aria unui triunghi T într-o mulţime cu metrica poliedrică şi pentru aria S_0 a unui triunghi plan T_0 cu laturile de aceeaşi lungime ca T, este valabilă inegalitatea următoare:

$$0 \leqq S - S_0 \leqq \frac{1}{2}\omega d^2$$

unde ω este curbura interiorului triunghiului T şi d este diametrul intrinsec al triunghiului. O inegalitate identică este valabilă şi pentru poligoane, dacă le împărţim în triunghiuri cu diametru intrinsec $\leqq d$.

Dacă suprafaţa este situată într-un astfel de sistem de coordonate, în care suprafaţa să nu aibă un plan de sprijin paralel cu axa z şi luînd în considerare teorema lui Reidemeider, după care proiecţia pe plan a punctelor de pe o suprafaţă convexă, în care nu există plan tangent, este de măsură nulă, atunci aria poligonului de suprafaţă, în sensul definiţiei date mai înainte, este dată de integrala

$$\iint_{P'} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy$$

unde z_x, z_y, 1 sînt cosinusurile de direcţie ale normalei de suprafaţă în punctele în care există plan tangent. Aria dată cu definiţia intrinsecă este generalizarea ariei definite pe suprafeţele regulate.

Cu ajutorul definiţiei intrinsece a ariei se pot demonstra şi următoarele proprietăţi extremale:

Dintre suprafeţele de poliedru deschise omeomorfe cu cerc, dat fiind circomferinţa şi numărul laturilor, presupunînd totodată curbura $< 2\pi$, suprafaţa cu aria cea mai mare este egală tocmai cu suprafaţa laterală a piramidei regulate drepte. Mai departe, dintre suprafeţele convexe deschise omeomorfe cu cerc, avînd circomferinţa dată şi curbura $< 2\pi$ suprafaţa cu aria cea mai mare este conul de rotaţie. Aria aceasta este egală $\frac{l^2}{2(2\pi - \omega)}$ l fiind lungimea cercului de bază.

Astfel pentru aria S a suprafeţelor convexe de tip dat este valabilă inegalitatea următoare

$$S \leqq \frac{l^2}{2(2\pi - \omega)},$$

unde $2\pi - \omega$ este învîrtirea marginii suprafeţei şi o notăm cu τ. Astfel

$$2\tau S \leqq l^2.$$

§ 11. Curbura de împărţire a geometriei metrice

Geometria metrică generalizează pe suprafeţele convexe curbura lui Gauss pe baza imaginii sferice.

Curbura de domeniu, pe o suprafaţă convexă, a fost definită mai înainte. Curbura aceasta împărţită cu aria domeniului se numeşte curbura de împărţire a domeniului sau i se mai zice şi curbura lui Gauss. Curbura

de împărţire a unui punct se obţine dacă un domeniu care conţine punctul se restrînge la punctul considerat şi luăm limita curburei de împărţire a domeniilor.

Este posibil că limita aceasta nu există, fiindcă depinde de domenii, de modul restrîngerii lor la punct. Dacă această limită este independentă de acest mod, atunci suprafaţa are în punctul considerat o curbură de împărţire definită.

Dacă în fiecare punct al unui domeniu pe suprafaţă există o curbură de împărţire definită, atunci această curbură este o funcţie continuă în acest domeniu.

Curbura de împărţire are un rol asemănător cu curbura obişnuită a lui Gauss.

Dacă curbura de împărţire pentru fiecare domeniu într-o vecinătate a punctului O de pe suprafaţă este mai mică ca un număr pozitiv K, atunci există un număr $r_0>0$ cu ajutorul căruia în O în fiecare direcţie se poate trasa linia cea mai scurtă în aşa fel, ca lungimea ei să nu fie mai mică decît r_0, şi astfel în vecinătatea tuturor punctelor, în care curbura de împărţire este mărginită, se pot introduce coordonate geodezice polare şi prin aceasta forma elementului de arc este

$$ds^2=dr^2+G(r,\varphi)d\varphi.$$

Funcţia $G(r,\varphi)$ este pozitivă, după r de două ori derivabilă şi valoarea curburei de împărţire

$$K(r,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{G(r,\varphi)}}\cdot\frac{\partial^2\sqrt{G(r,\varphi)}}{\partial r^2}$$

adică pe partea suprafeţei convexe cu proprietăţile indicate mai sus sînt valabile relaţiunile cunoscute din geometria diferenţială.

Suprafeţele, unde curbura de împărţire pentru fiecare domeniu este $>K(<K_1=K)$, au un interes deosebit. Acestea sînt suprafeţe cu curbura de împărţire mărginite.

Dacă pe o suprafaţă curbura de împărţire în toate domeniile este egală cu un număr fix $K>0$, atunci fiecare punct pe suprafaţă are o vecinătate, care este izometrică cu o porţiune a sferei S_k cu raza $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Dacă F este închisă, atunci suprafaţa este izometrică cu o sferă şi astfel şi identică cu ea.

Dacă pe o suprafaţă convexă curbura de împărţire este mărginită de sus, atunci în vecinătatea fiecărui punct al suprafeţei F putem introduce coordonatele polare geodezice. Într-o astfel de vecinătate U curbura de împărţire să fie $\geqq K_1$ şi $\leqq K_2$. Pe sfera $S_K(K=1, 2)$, introducem coordonatele polare geodezice şi la fiecare punct al vecinătăţii U să ordonăm punctul de pe sfera cu aceleaşi coordonate. La o curbă de pe suprafaţă corespund pe sfere curbele L_1 şi L_2. Atunci pentru lungimile curbelor este valabilă

$$S(L_1)\geqq S(L)\geqq S(L_2).$$

Din curbura de împărţire putem trage concluzii asupra lungimii liniilor celor mai scurte care aparţin unei linii geodezice. Dacă într-o vecinătate

a liniei geodezice curbura de împărţire este $\leqq K$, atunci toate arcele liniei geodezice situate în această vecinătate şi mai scurte ca $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ sînt liniile cele mai scurte. Dacă curbura de împărţire în această vecinătate este $\geqq K>0$, atunci arcele mai lungi ca $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$ nu sînt liniile cele mai scurte.

Curbura de împărţire este în legătură cu suma de unghiuri de suprafaţă. Dacă într-un triunghi de suprafaţă curbura de împărţire este $\geqq K(\leqq K)$, şi dacă triunghiul este situat pe o jumătate de sferă, atunci unghiurile lui nu sînt mai mici (mai mari), ca unghiurile triunghiului T_K pe o sferă S_K cu raza $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, unde lungimea laturilor este egală cu lungimile laturilor triunghiului de pe suprafaţă.

Dacă unghiul de la un vîrf A al triunghiului T este egal cu unghiul corespunzător din T_K, atunci T sau este izometric cu T_K sau vîrfurile B şi C se pot lega cu o linie, cea mai scurtă, astfel ca această linie să taie din T un triunghi izometric cu T_K.

O noţiune importantă este K — convexitatea şi K — concavitatea. Într-o varietate R; L şi M sînt două linii cele mai scurte dintr-un punct O, X şi Y sînt punctele variabile ale curbelor $OX=x$, $OY=y$, $OZ=z$. Să luăm un triunghi pe sfera S_K cu laturile x, y, z şi unghiul opus de z să-l notăm cu $\gamma_K(x, y)$. Metrica este K-convex atunci dacă pentru fiecare L şi M $\gamma_K(x, y)$ este o funcţie necrescătoare de x şi y, pentru fiecare pereche de valori, pentru care există XY linia cea mai scurtă. Dacă $\gamma_K(x, y)$ este o funcţie nedescrescătoare, atunci vorbim de K-concavitate.

Proprietăţile curburei de împărţire au arătat, că suprafeţele generale convexe în mare măsură sînt asemănătoare cu suprafeţele netede, derivabile.

Aceasta se vede şi din teoremele următoare:

Mai înainte avem nevoie de clasificarea punctelor de pe suprafaţa convexă. Pe o suprafaţă convexă sînt:

1) punctele conice, unghiul întreg al conului tangent $<2\pi$;
2) punctele de muchii, conul tangent constă din două planuri;
3) punctele netede, conul tangent este un plan.

După un rezultat amintit deja mai înainte punctele în general sînt netede, mulţimea punctelor conice este sau finită sau numerabilă, fiindcă curbura suprafeţei întregi este finită.

H. Busemann şi W. Feller în 1935 au demonstrat că toate suprafeţele convexe — cu excepţia unei mulţimi de puncte de măsură nulă — sînt de două ori derivabile şi atunci în punctele netede există curbura secţiunii normale, este valabilă teorema lui Euler şi există indicatoarele lui Dupin.

Curbura de împărţire se poate folosi şi pentru caracterizarea punctelor de pe suprafaţă. Dacă curbura de împărţire într-un domeniu destul de mic, care conţine punctul A, nu este mai mare ca un număr pozitiv dat, atunci punctul A este un punct neted sau un punct al unei muchii drepte a suprafeţei (dar fără să fie un capăt al muchiei).

Dacă pe o suprafaţă convexă, închisă sau infinită întreagă (dar a cărei metrică nu este în întregime euclidiană) curbura de împărţire este

mărginită, atunci toate punctele sînt netede. Iar dacă în general pe o suprafață generală curbura de împărțire este mărginită, atunci există o suprafață netedă convexă, care este izometrică cu suprafața dată.

O condiție suficientă ca o suprafață să fie netedă este ca curbura de împărțire în fiecare domeniu să rămînă între două valori pozitive.

Observăm că existența curburei lui Gauss încă nu garantează existența curburilor principale.

Luînd în considerare teoremele de realizare a metricii (§ 5) vedem că un element de arc cu curbura nenegativă se poate realiza „în mic" cu o suprafață convexă iar un element de arc nenegativ, dat pe sfera întreagă se poate realiza cu o suprafață convexă închisă și un element de arc dat pe plan și complet este realizabil cu o suprafață întreagă infinită.

§ 12. Metoda lui Minkovski pentru cercetarea corpurilor și suprafețelor convexe. Inegalitățile de tip Minkovski

Minkovski, după mărturisirea lui, a studiat figurile convexe în legătură cu problema clasică izoperimetrică. El a cercetat legăturile între datele lor importante și a stabilit între ele inegalități. A folosit noțiunea elementelor de sprijin și funcțiile de sprijin. Mijloacele sale matematice sînt mai ales funcțiile convexe.

În mulțimea suprafețelor convexe, el definește trecerea la limită cu introducerea măsurii de vecinătate a două corpuri convexe.

Măsura de vecinătate a două corpuri convexe K și L este numărul $v(v=N(K, L)$ cel mai mic avînd proprietatea că distanța oricărui punct al suprafeței L de corpul K este $\leq v$ și invers.

Fie $K_1, K_2, K_3, \ldots$ un șir de corpuri convexe și $F_1, F_2, F_3, \ldots$ suprafețele lor convexe, aceste șiruri converg spre un K respectiv F atunci:

$$\lim_{n\to\infty} N(K_n K)=0.$$

În cercetările de genul lui Minkovski se folosesc simetrizarea lui Steiner și construcția lui Schwartz.

La simetrizarea lui Steiner, corpul convex se transformă tot într-un corp convex simetric la un plan, volumul corpului transformat este egal cu volumul corpului dat, dar aria suprafeței se micșorează, sau rămîne neschimbată. La construcția lui Schwartz corpul convex se transformă într-un corp de rotație și volumul rămîne neschimbat.

Să notăm cu J volumul unui corp convex finit, iar cu $\mathcal{O}$ aria lui și M să fie integrala de suprafață a curburii medii a suprafeței considerate. Atunci

$$\mathcal{O}^3-36\pi J^2\geq 0$$

este inegalitatea izoperimetrică. Semnul de egalitate este valabil numai pentru sferă. Alte inegalități ale lui Minkovski sînt

$$\mathcal{O}^2-3J\cdot M\geq 0, \quad M^3-4\pi\mathcal{O}\geq 0.$$

Din acestea urmează o proprietate extremală a sferei; dintre suprafețele convexe, închise cu aria dată, integrala curburii medii este cea mai mică pentru sferă.

Între noțiunile introduse de Minkovski este important volumul mixt a trei corpuri convexe; această noțiune a lui Minkovski se referă la suprafețe cu planuri tangente bine definite și cu razele de curbură principală, finite, dar pe baza geometriei metrice, noțiunea aceasta se poate generaliza și pentru corpuri convexe generale. Dacă identificăm cele trei corpuri, volumul mixt este volumul obișnuit. Să notăm cu A_{123} volumul mixt al corpurilor K_1, K_2, K_3. Dacă K_2 este sfera cu raza 1, atunci $3A_{112}$ este aria suprafeței corpului K_1, $3A_{122}$ curbura totală a suprafeței și A_{222} natural volumul sferei cu raza 1, adică $\frac{4\pi}{3}$.

O teoremă interesantă a lui Minkovski este următoarea: aria unei suprafețe convexe închise și finite se obține în felul următor: considerăm ariile secțiunilor ortogonale ale cilindrilor circumscrise corpului și luăm de patru ori valoarea medie a integralei acestor arii pe sfera de rază unitate.

Dacă K_0 și K_1 sînt două corpuri convexe, atunci

$$K_\vartheta=(1-\vartheta)K_0+\vartheta K_1$$

este o mulțime liniară a corpurilor convexe. Volumul corpului să notăm cu $J(\ )$. Funcția $\sqrt[3]{J(\ )}$ este o funcție convexă de și este liniară atunci și numai atunci, dacă toate corpurile K_ϑ sînt asemenea.

$$J(\vartheta)=J+\mathcal{O}\vartheta+M\vartheta^2+\frac{4\pi}{3}\vartheta^3.$$

Cu ajutorul funcției de sprijin, Minkovski determină aria corpului convex închis, finit

$$\mathcal{O}=\int\left(H^3-\frac{1}{2}\triangle H\right)d\omega,$$

unde H este funcția de sprijin $\triangle H$ parametrul întîi al lui Beltrami și $d\omega$ elementul de suprafață al sferei cu raza 1. O altă expresie pentru aria suprafeței convexe închise:

$$\mathcal{O}=\frac{1}{2}\int(R_1+R_2)Hd\omega$$

și o formulă a lui Weingarten:

$$\mathcal{O}=\int\left(H+\frac{1}{2}\triangle_2 H\right)Hd\omega.$$

Este posibilă definirea funcționalelor convexe, pentru mulțimea mărginită și închisă a corpurilor convexe. De exemplu:

$$\sqrt[3]{J_K}=V_K.$$

Pentru aceasta este valabilă

$$V_{(1-\vartheta)K_0+\vartheta(K_1)}\geq(1-\vartheta)V_{K_0}+\vartheta V_{K_1}$$

aceasta este expresia convexității funcționalei. Funcționale convexe sînt și $\sqrt{\mathcal{O}}$ și integrala curburii medii. Fiindcă $\mathcal{O}=\int\frac{d\omega}{K}$ și fiindcă dînd valoarea lui K pe imaginea sferică, suprafața convexă este determinată, — $\mathcal{O}$ este

o funcțională liniară într-o mulțime închisă și mărginită a corpurilor convexe.

O consecință a inegalităților lui Minkovski este teorema demonstrată de H. Hadwiger după care dintre suprafețele de rotație, convexe și închise zona de sferă, simetrică dă minimul integralei de curbură medie, în cazul dacă volumul și aria sînt date.

O problemă importantă este problema sistemului complet al inegalităților. Sistemul complet al inegalităților este mulțimea inegalităților între mărimile importante ale unei figuri care determină univoc figura sau o clasă de figuri, în cazul nostru o clasă de figuri convexe. Problema aceasta încă n-a fost clarificată pe deplin, sînt numai cîteva rezultate răzlețe.

În cercetările mai recente, s-au studiat inegalitățile și pentru suprafețele convexe în E^n.

§ 13. Suprafețele convexe în spațiile de curbură constantă

Suprafețele convexe se pot defini și în spațiul Lobacevschi-Bolyai și în spațiul sferic. Rezultatele și proprietățile obținute aici sînt generalizările naturale ale proprietăților din spațiul euclidian. Teoremele acelea, în care se folosește axioma paralelismului, nu mai sînt valabile și în spațiul Lobacevschi-Bolyai.

Generalizarea în spațiul sferic este mai complicată fiindcă aici dreptele sînt închise și se taie între ele. Se poate însă demonstra că în spațiul sferic fiecare suprafață convexă este într-o semisferă și astfel proprietățile amintite ale dreptelor în spațiu nu joacă un rol așa de important.

În spațiul Lobacevschi-Bolyai metrica unei suprafețe convexe împlinește condiția de convexitate, dar triunghiurile plane trebuie să fie înlocuite cu triunghiurile pe suprafețe de curbură constantă a spațiului și astfel este vorba de o K-convexitate.

În spațiul R_K — de curbură K — unghiurile unui triunghi pe o suprafață convexă nu sînt mai mici decît unghiurile unui triunghi cu aceleași laturi pe o suprafață de curbură constantă în R_K. Definiția unghiului este valabilă neschimbat fiindcă condiția de K-convexitate garantează existența unui unghi bine determinat între două linii cele mai scurte.

Într-un spațiu sferic toate corpurile convexe sînt finite și astfel toate suprafețele convexe sînt închise. Toate suprafețele sînt izometrice cu o suprafață a spațiului euclidian la care curbura de împărțire este mai mare decît K — curbura spațiului — și astfel din privința geometriei intrinseci suprafețele spațiului sferic nu dau nimic nou.

Este un fapt demonstrat că toate suprafețele convexe ale spațiului euclidian în care fiecare pereche de puncte se poate lega cu o linie cea mai scurtă și curbura de împărțire este $\leqq K$, este izometrică cu o suprafață convexă a spațiului sferic cu curbura K.

În geometria spațiului Lobacevschi-Bolyai planul nu este o suprafață cu curbura constantă, este convex, dar nu este izometric cu nici o suprafață convexă a spațiului euclidian și astfel nu există nici o suprafață cu laturile plane. Deci putem constata că suprafețele spațiului Lobacevschi-Bolyai sînt noi din punct de vedere al geometriei intrinseci. De exemplu numărul tipurilor diferite topologic ale suprafețelor convexe este infinit.

La studierea problemelor putem folosi avantajos realizarea spațiului Lobacevschi-Bolyai în interiorul unei sfere.

Teoria suprafețelor convexe în E^n, în spațiul Hilbert nu este încă tratată sistematic.

Încheiere. Suprafețele convexe — cum am văzut — alcătuiesc un domeniu vast și important al cercetărilor geometrice. Cu mijloace diferite de cercetare se pot studia proprietăți tot mai generale ale obiectelor studiate.

Raportul prezent nu are pretenția de a fi complet. M-am ocupat mai pe larg cu metoda spațiului metric și rezultatele ei, fiindcă, după părerea mea, metoda aceasta dă o foarte mare posibilitate de aprofundare a problemelor. După clarificarea proprietăților în mic — aceasta s-a făcut deja și de geometria diferențială clasică — metoda spațiului metric a dat posibilitatea sistematică pentru clarificarea multor chestiuni, în mare.

Aplicarea metodei spațiului metric aparține mai ales matematicienilor sovietici. Ea pornește de la date mai imediate, de la modul mai apropiat al observării realității și astfel dă rezultate mai generale.

Dar totodată această metodă dovedește că, în cazul corpurilor convexe, și metodele diferențiale dau rezultate destul de generale și acestea au dat o inspirație pentru definițiile mai generale.

Funcțiile de mulțime, noțiunile definite pe mulțimile punctelor sau figurilor mai generale arată că și în matematică proprietățile esențiale le putem cunoaște mai adînc, dacă le cercetăm scufundate într-o mulțime cît mai largă.

Este natural că încă multe probleme așteaptă clarificarea lor. Geomateria metrică pe lîngă rezultatele ei, n-a studiat încă multe alte probleme.

Sînt o serie de probleme nestudiate încă, astfel cercetarea metrică a relațiilor între figuri convexe și spațiul de scufundare, adică relații între geometria intrinsecă și geometria spațiului înconjurător; mai departe cercetarea sistemelor planelor de sprijin, mulțimea normalelor tuturor planelor de sprijin; proprietățile suprafețelor asociate la corpuri generale convexe și așa mai departe.

Cum am amintit, problema suprafețelor convexe în spațiile mai generale, constituie încă un domeniu larg de cercetare.

Un rol de viitor, revine metodei spațiului metric, aplicarea ei în cercetarea suprafețelor generale, în geometria intrinsecă a părților neconvexe ale suprafețelor și în problemele legate de suprafețele generale care constă din domenii cu metrică convexă și neconvexă.