

REPREZENTAREA ECUAȚIILOR CU PATRU VARIABLE CU AJUTORUL NOMOGRAMEI ROMBOIDALE

DE

FR. RADO, L. BAL, E. GERGELY și GH. IONESCU

1°. În problema construcției nomogramelor pentru ecuațiile cu patru variabile $F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$, s-au obținut un mare număr de tipuri de nomograme elementare, folosind metoda elementelor mobile. În afară de aceasta, unele ecuații, care admit separarea de forma

$$F(z_1, z_2) = G(z_3, z_4),$$

se pot reprezenta cu ajutorul unei nomograme compuse, formată din două nomograme cu rețele. Condițiile unei astfel de separări au fost obținute de Ed. Goursat [1].

Pentru a lărgi clasa ecuațiilor cu patru variabile, reprezentabile monografic, Bolgrano T. [2] și Neisuler I. [3] au căutat condiții ca o ecuație cu 4 variabile să se scrie sub forma.

$$z_4 = F[h(z_1, z_2), g(z_1, z_3)]$$

care conduce la reprezentarea ecuației cu patru variabile cu ajutorul unei nomograme compuse din 3 nomograme cu rețele. În acest fel de reprezentare, se repetă una din variabile, ceea ce constituie un dezavantaj, deoarece variabila repetată în mod practic, nu poate fi luată ca necunoscută.

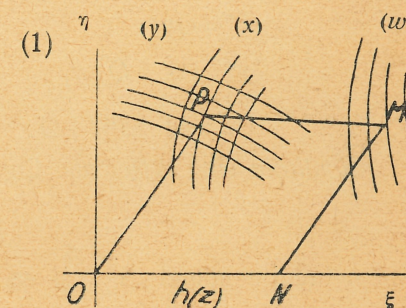
În cadrul nomogramelor elementare, foarte utilă în practică, intră și nomograma romboidală sau nomograma cu paralelogram, care reprezintă ecuațiile cu patru variabile de forma

$$w = F[\varphi(x, y) + h(z), \psi(x, y)]$$

și are înfățișarea următoare

$$\begin{aligned} P \quad \xi &= \varphi(x, y) \\ \eta &= \psi(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(\xi, \eta) \quad w &= F(\xi, \eta) \\ N(0, h(z)) \quad \xi &= \varphi(x, y) + h(z) \\ \eta &= \psi(x, y). \end{aligned}$$



517.94 : 518.3
518.3 : 517.94

În clasificarea generală a nomogramelor, după structura lor geometrică, pentru nomograma cu paralelogram, avem formula de structură:

$$P_{0\infty} \dashv D'_0, \quad P_{12} \dashv O', \quad C^4 \dashv P'_3,$$

în planul mobil avînd familia de curbe cotate și admitînd două mișcări de translație, iar în planul fix un cîmp binar și o scară rectilinie.

Deși în ecuația funcțională se repetă două variabile, totuși nomograma nu comportă elemente gradate repetate. Pentru acest fel de ecuații, se pot construi și nomograme compuse din patru nomograme cu rețele, în care avem repetate două variabile.

În cazul particular cînd scara rectilinie e regulată ecuația funcțională e de forma:

$$w = f(x, y, z) = F[\varphi(x, y) + z, \psi(x, y)]$$

și condiția necesară și suficientă este dată de relația

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{z^2} \\ f_{xz^2} & f_{yz^2} & f_{z^3} \end{vmatrix} = 0.$$

2°. Pentru cazul general, vom demonstra înainte următoarele două leme:

Lema 1. Condițiile necesare și suficiente pentru ca ecuația diferențială

$$y'' + p(x, \alpha) y' + q(x, \alpha) = 0,$$

să admită o integrală independentă de α (nenulă) sînt:

$$Q_\alpha = 0 \quad (3)$$

și

$$Q_x + Q^2 + pQ + q = 0 \quad (4)$$

unde s-a notat

$$Q = -\frac{q_\alpha}{p_\alpha}.$$

Condițiile sînt necesare:

$$p_\alpha y' + q_\alpha y = 0$$

$$Q = -\frac{q_\alpha}{p_\alpha} = \frac{y'}{y} = \text{funcție numai de } x; \text{ deci } Q_\alpha = 0,$$

$$y' = Qy,$$

$$y'' = (Q' + Q^2)y,$$

$$(Q' + Q^2 + pQ + q)y = 0, \quad Q' + Q^2 + pQ + q = 0.$$

Condițiile sînt suficiente. Condițiile fiind satisfăcute,

$$I_1 = e^{\int_{x_0}^x Q dx}$$

este o funcție numai de x și ea verifică ecuația diferențială considerată.

Lema II. Condițiile necesare și suficiente, pentru ca ecuația

$$y'' + p(x, \alpha, \beta) y' + q(x, \alpha, \beta) y = 0,$$

să admită o integrală independentă de α și β (nenul), sînt:

$$Q_\alpha = 0, \quad Q_\beta = 0 \quad \text{și} \quad Q_x + Q^2 + pQ + q = 0$$

unde iarăși

$$Q = \frac{q_\alpha}{p_\beta}.$$

$Q = \frac{y'}{y}$ funcție de x , $Q_\alpha = Q_\beta = 0$. Rezultă, ca mai sus, condiția a 3-a.

y_1 , de mai sus, depinde numai de x și verifică ecuația diferențială.

Observație. Condițiile (3) și (4) din lema I sînt independente.

Intr-adevăr, dacă

$$p = -2x, \quad q = x^2$$

atunci

$Q = x$ și condiția (4) este verificată în timp ce (3) nu este.

Dacă

$$p = \alpha + x, \quad q = x^2 + 1,$$

atunci

$Q = 0$ și condiția (3) este verificată și (4) nu este verificată.

La fel cele 3 condiții din lema II sînt independente.

3°. Condiții necesare și suficiente pentru ca $f(x, y, z)$ să fie de forma $F[\varphi(x, y) + h(z), \psi(x, y)]$,

$$a) \quad f(x, y, z) = F[\varphi(x, y) + h(z), \psi(x, y)],$$

$$f_x = F_\varphi \varphi_x + F_\psi \psi_x,$$

$$f_y = F_\varphi \varphi_y + F_\psi \psi_y,$$

$$f_z = F_\varphi h'(z),$$

$$\begin{vmatrix} f_x & \varphi_x & \psi_x \\ f_y & \varphi_y & \psi_y \\ f_z & h'(z) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Notăm

$$c(z) = \frac{1}{h'(z)}, \quad a(x, y) = \frac{\psi_y}{\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x} b(x, y) = \frac{-\psi_x}{\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x},$$

atunci

$$a(x, y) f_x + b(x, y) f_y = c(z) f_z,$$

$$a(x, y) \frac{f_x}{f_z} + b(x, y) \frac{f_y}{f_z} = c(z)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{f_x}{f_z} & \frac{f_y}{f_z} & c(z) \\ \left(\frac{f_x}{f_z}\right)_z & \left(\frac{f_y}{f_z}\right)_z & c'(z) \\ \left(\frac{f_x}{f_z}\right)_{z^2} & \left(\frac{f_y}{f_z}\right)_{z^2} & c''(z) \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

$$\text{unde s-a notat} \quad c''(z) + p(z; x, y) c'(z) + q(z; x, y) c(z) = 0 \quad (5')$$

$$p(z; x, y) = \frac{\left(\frac{f_x}{f_z}\right)_z \frac{f_y}{f_z} - \left(\frac{f_y}{f_z}\right)_z \frac{f_x}{f_z}}{\frac{f_x}{f_z} \left(\frac{f_y}{f_z}\right)_z - \frac{f_y}{f_z} \left(\frac{f_x}{f_z}\right)_z}, \quad (6)$$

$$q(z; x, y) = \frac{\left(\frac{f_x}{f_z}\right)_z \left(\frac{f_y}{f_z}\right)_{z^2} - \left(\frac{f_y}{f_z}\right)_z \left(\frac{f_x}{f_z}\right)_{z^2}}{\left(\frac{f_x}{f_z}\right)_z \left(\frac{f_y}{f_z}\right)_z - \frac{f_y}{f_z} \left(\frac{f_x}{f_z}\right)_z}.$$

Notăm, mai departe,

$$Q = -\frac{q_x(z; x, y)}{p_x(z; x, y)}. \quad (7)$$

Aplicind lema II, avem

$$Q_x = 0, \quad Q_y = 0, \quad Q_z + Q^2 + pQ + q = 0. \quad (8)$$

Deci condițiile (8) sînt necesare pentru ca f să fie de forma $F[\varphi + h, \psi]$.

b) Condițiile (8) sînt în același timp suficiente. Se dă $f(x, y, z)$ și se formează expresiile (6) și (7). Presupunem că condițiile (8) sînt îndeplinite.

Pe baza lemei II, rezultă că există o funcție $c(z)$, care verifică (5'). Acest $c(z)$ poate fi construit după cum se arată în lema; $c(z) = e^{\int Q dz}$. Ecuația (5') se poate scrie sub forma (5), deci vronskianul funcțiilor $\frac{f_x}{f_z}$, $\frac{f_y}{f_z}$ și $c(z)$, privite ca funcții de z dispăre; urmează

$$a(x, y) f_x + b(x, y) f_y = c(z) f_z. \quad (9)$$

Determinăm pe $\varphi(x, y)$ și $\psi(x, y)$ astfel cu

$$\frac{\psi_y}{\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x} = a(x, y), \quad \frac{-\psi_x}{\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x} = b(x, y).$$

Atunci (9) se scrie astfel

$$\psi_y f_x - \psi_x f_y = c(z) (\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x) f_z. \quad (10)$$

Sistemul asociat

$$\frac{dx}{-\psi_y} = \frac{dy}{\psi_x} = \frac{\frac{1}{c(z)} dz}{\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x} = \frac{\psi_x dx + \psi_y dy}{0} = \frac{\varphi_x dx + \varphi_y dy + \frac{1}{c(z)} dz}{0}.$$

Ecuația (10) admite următoarele două integrale particulare

$$\psi(x, y) \quad \text{și} \quad \varphi(x, y) + h(z)$$

unde

$$h(z) = \int_{z_0}^z \frac{1}{c(z)} dz.$$

Deci, orice funcție care verifică (10) este de forma

$$F[\varphi(x, y) + h(z), \psi(x, y)]$$

prin urmare

$$f = F[\varphi(x, y) + h(z), \psi(x, y)].$$

Nomograma cu paralelogram prezintă interes, deoarece permite nomografierea unor relații cu 4 variabile, mai generale decât cazul lui Goursat

Intr-adevăr, cazul lui Goursat

$$f = F(z, \psi(x, y))$$

apare din ecuație chiar și simplificată (considerată în nr. 2°),

$$f = F[z + \varphi(x, y), \psi(x, y)]; \quad \text{pentru } \varphi(x, y) = 0.$$

Condițiile (8) fiind ecuații cu derivate parțiale de ordin 5, nomograma cu paralelogram poate fi privită ca mai cuprinzătoare decât cazurile lui Neisuler.

Ca exemplu vom da nomograma ecuației

$$w = xyz(xyz + 1) - (x + y)$$

care admite reprezentarea sub forma:

$$w = e^{2(\ln xy + \ln z)} + e^{\ln xy + \ln z} - (x + y).$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ С ПОМОЩЬЮ РОМБОИДАЛЬНЫХ НОМОГРАММ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Авторы ставят цель найти необходимые и достаточные условия для того чтобы можно было решать с помощью ромбоидальной номограммы уравнение с четырьмя переменными. Уравнения которые допускают такое решение имеют вид (1).

С помощью некоторых лемм относящихся к дифференциальным уравнениям II порядка с I или 2 параметрами находятся условия (5), необходимые и достаточные чтобы уравнение $F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$ могло быть представлено в виде (1).

LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS À QUATRE VARIABLES À L'AIDE DU NOMOGRAMME ROMBOÏDAL

(RÉSUMÉ)

Les auteurs se proposent de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation à quatre variables puisse être résolue par un nomogramme romboïdal. Les équations qui admettent une telle résolution s'expriment sous la forme (1).

À l'aide de certains lemmes concernant les équations différentielles de second ordre à 1 et 2 paramètres, on trouve les conditions (5) nécessaires et suffisantes pour que l'équation $F(z_1, z_2, z_3, z_4)=0$ puisse être représentée sous la forme (1).

BIBLIOGRAFIE

1. Goursat Ed., Bul de la Soc. Mat. France, t. 27, p. 27 (1899).
2. Belgrano J., Gaceta Mat. (1), 3, p. 143—152 (1951).
3. Neišuler L. J., Trudi Mat. Inst. Steklova, t. XX, p. 87—108 (1947).
4. Hovanski S. G., Viciislitelnaia Matematika i viciislitelnaia tehnika, Sb. II, p. 1—93 (1955).