

real variable. Thence we obtain the degree of approximation of $\sigma_n^r(z, f) - f(z)$ as stated above. Incidentally, we give a new criterion of uniform convergence for the Fourier series.

Sur les fonctions sommes de séries trigonométriques absolument convergentes

J. P. KAHANE

(Paris)

Soit A la classe des fonctions

$$\varphi(x) = \sum_n a_n e^{inx} \text{ avec } \|\varphi\| = \sum_n |a_n| < \infty.$$

On pose $F \circ f(x) = F(f(x))$. Paul Lévy a posé les problèmes suivants :

- 1) Quelles sont les fonctions F telles que : f réelle $\in A \Rightarrow F \circ f \in A$?
- 2) Quelles sont les fonctions réelles telles que : $F \in A \Rightarrow F \circ f \in A$?

Ces problèmes conduisent à étudier la croissance de $\|e^{imf}\|$ quand $|m| \rightarrow \infty$. Voici les résultats rappelés, ou indiqués : C désigne la classe des fonctions réelles 2π -périodiques :

- 1) $f' \in C \Rightarrow \|e^{imf}\| = O(|m|)$ (Marcinkiewicz) ;
- 2) $f \in C, f(x) = \sum_n a_n e^{inx} \Rightarrow \|e^{imf}\| < \pi(1 + |ma_m|)$ (Marcinkiewicz) ;
- 3) $\|e^{imf}\| = O(1) \Rightarrow f$ linéaire (Beurling-Helson) ;
- 4) $f'' \in C, \|e^{imf}\| = O(\sqrt{|m|}) \Rightarrow f$ linéaire ;
- 5) $f \in C, f$ analytique $\Rightarrow \|e^{imf}\| = O(\sqrt{|m|})$;
- 6) $f \in C, f$ linéaire par intervalles $\Rightarrow \|e^{imf}\| = O(\log |m|)$.

Hypothèses

- 1) $f \in A, f \in C \Rightarrow \|e^{imf}\| = O(|m|^p)$ pour un p assez grand (L. Schwartz) ;
- 2) $\|e^{imf}\| = O(\log |m|) \Rightarrow f$ linéaire.

Sur quelques propriétés spéciales des nomogrammes

LASCU BAL

(Cluj)

Partant des équations fonctionnelles qui caractérisent certains types de nomogrammes, on cherche les conditions pour qu'une équation à un certain nombre de variables puisse être représentée par un type donné de nomogramme.

La généralisation de certaines formules d'interpolation pour les fonctions de plusieurs variables et certaines considérations sur la formule d'intégration numérique de Gauss

D. D. STANCU
(Cluj)

Dans la première partie du travail l'auteur s'occupe de certaines généralisations de la formule d'interpolation de Lagrange pour les fonctions de plusieurs variables, en considérant différents réseaux de nœuds. Le reste des formules d'interpolation est exprimé à l'aide des différences divisées. On donne plusieurs formules de moyenne concernant les différences divisées partielles.

Dans la seconde partie du travail, l'auteur fait d'abord la remarque suivante sur la formule de quadrature de Gauss. Si l'on considère la formule d'interpolation de Lagrange-Hermite, qui utilise comme nœuds les racines du polynôme

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^s (x - x_i) (x - \alpha_k)^{2k},$$

où $r_1 + r_2 + \dots + r_s \leq n$, et si l'on prend l'intégrale de $\omega(x)$ sur l'intervalle (a, b) qui contient ces nœuds on obtient une formule de quadrature de la forme

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + \sum_{j=1}^s \sum_{k=0}^{r_j-1} B_{j,k} f^{(k)}(\alpha_j) + R.$$

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines du polynôme de Legendre $P_n(x)$ de degré n , relatif à l'intervalle (a, b) , tous les coefficients $B_{j,k}$ disparaissent, quels que soient les α_k , et la formule de quadrature écrite ci-dessus se réduit à la formule classique de Gauss.

En s'appuyant sur cette observation, on établit, pour le cas de deux variables, la formule de cubature de type de Gauss

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m A_{i,k} f(x_i, y_k) + \rho,$$

où x_i ($i = \overline{1, n}$), y_k ($k = \overline{1, m}$) sont les racines des polynômes de Legendre $X_n(x)$, $X_m(y)$ de degrés n et m , relatif à l'intervalle $(-1, +1)$. Pour les coefficients $A_{i,k}$ on donne les formules

$$\begin{aligned} A_{i,k} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{X_n(x)}{(x - x_i) X'_n(x_i)} \frac{X_m(y)}{(y - y_k) X'_m(y_k)} dx dy = \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{X_n(x)}{(x - x_i) X'_n(x_i)} \frac{X_m(y)}{(y - y_k) X'_m(y_k)} \right)^2 dx dy = \\ &= \frac{4}{(1 - x_i^2)(1 - y_k^2) [X'_n(x_i) X'_m(y_k)]^2}, \\ A_{i,k} &= A_{n-i+1, m-k+1} \end{aligned}$$

et pour le reste on obtient l'évaluation

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{4^{n+1}}{2n+1} \frac{n!}{[(n+1)(n+2)\dots 2n]^3} \frac{\partial^{2n} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{2n}} + \\ &+ \frac{4^{m+1}}{2m+1} \frac{m!}{[(m+1)(m+2)\dots 2m]^3} \frac{\partial^{2m} f(\xi, \eta)}{\partial \eta^{2m}} - \\ &- \frac{4^{n+m+1}}{(2n+1)(2m+1)} \frac{n! m!}{[(n+1)(n+2)\dots 2n]^3 [(m+1)(m+2)\dots 2m]^3} \frac{\partial^{2n+2m} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{2n} \partial \eta^{2m}}. \end{aligned}$$

Une classe de formules de moyenne

I. STAMATE
(Cluj)

L'auteur donne des formules de moyenne pour les coefficients d'un polynôme de degré n , analogues à la formule des accroissements finis et à celle donnée par D. Pompeiu dans la revue *Mathematica* **22**, 143—146 (1946).

Sur le calcul des coefficients des séries trigonométriques convergentes presque partout

M. RĂDULESCU
(Cluj)

L'auteur étudie le calcul des coefficients des séries trigonométriques qui convergent en dehors d'un ensemble fermé du type U . Pour le calcul de ces coefficients, on donne au préalable une généralisation de la notion d'intégrale.

Une classe d'ensembles du type «M»

M. RĂDULESCU
(Cluj)

Un ensemble A inclus dans l'intervalle fermé $(0, 2\pi)$ s'appelle de type M (multiplicité), s'il y a une série trigonométrique

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$