

BIOLOGIE

I. BĂRBAT, S. CERNEA et E. BĂLIBANU, L'action que l'hétérauxine et le produit 2,4 D, à l'état pur ou associés à la vitamine B ₁ , exercent sur la productivité de la betterave à sucre et sur le racinement des boutures de vigne.....	127
ELENA ROMAN, Nouvelle contribution à la connaissance de la faune des Monogènes de la République Populaire Roumaine	135
ELENA LUPU et ELENA ROMAN, Un cas d'adaptation d'un Trématode ectoparasite sur <i>Misgurnus fossilis</i>	145

SCIENCES MÉDICALES

GR. BENETATO, I. BACIU, R. OPREAN et M. TELIA, Sur le métabolisme du cerveau. Note I. Variations du débit circulatoire et de la consommation d'oxygène du cerveau chez le Chien, en raison du débit circulatoire général et de la consommation totale d'oxygène sous l'action de différents médicaments	151
ȘT. M. MILCU, N. RADIAN, I. NEGOCESCU, C. PETRESCU, FL. COCU et H. STANCU, L'action de la chlorpromazine sur l'effet calorigène de la thyroxine	161
ȘT. M. MILCU, I. NEGOCESCU, C. PETRESCU et FL. COCU, Contributions à l'étude de l'antagonisme entre la thyroxine et les hormones stéroïdes	169
GH. TUDORANU, C. PAVELESCU et M. NEGULESCU, Contribution à l'étude de l'hémophilie. Labilité de l'antithromboplastine et ses connexions possibles avec le système nerveux central. Le rôle des traumatismes dans l'hémophilie	179
I. BRUCĂR et C. BĂLĂCEANU-STOLNICI, Recherches sur les chimiorécepteurs oculaires. Note I. Technique des recherches sur les chimiorécepteurs oculaires	185
C. BĂLĂCEANU-STOLNICI et I. BRUCĂR, Recherches sur les chimiorécepteurs oculaires. Note II. Réflexes chimiorécepteurs à point de départ oculaire	189
A. PANDELE, O. RUSSU, S. BELOIU, DINU MIHĂESCU et C. MIHĂESCU, Recherches sur le test à l'histamine et dosage de la vitamine C dans l'étude de la prophylaxie de l'anoxie fœtale et du « trauma » obstétrical intracranien....	203
C. OPRISIU, I. MIHĂESCU et T. LUPAȘ, L'influence des facteurs neuro-hormonaux sur les homotransplants chez le rat	211
ER. UNGUREANU, M. DUPOUR, M. SÂNDULESCU, A. CRISTESCU, CL. POPESCU et N. BÎRSAN, Fumigation de H.C.H. dans la campagne contre les vecteurs	217

COMUNICĂRILE

ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Tomul VI

1956

Nr. 1

COMITETUL DE REDACȚIE : Academician I. S. Gheorghiu ; academician Gh. Macovei ; academician I. Murgulescu ; academician St. S. Nicolau ; academician S. Stoilov ; academician St. M. Milcu — redactor responsabil.

MATEMATICĂ

ASUPRA UNOR TEOREME DE MEDIE

DE

ELENA MOLDOVAN

Comunicare prezentată de T. POPOVICIU, membru corespondent al Academiei R.P.R., în ședința din 29 iunie 1955

1. Această lucrare cuprinde câteva observații asupra unor teoreme de medie, ce se stabilesc pentru funcții depinzând de un număr finit, dat de parametri.

Fie

$$y = F(x; a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (1)$$

o funcție de variabila reală x și de n parametri reali $a_1, a_2, \dots, a_n$, definită pentru $a \leq x \leq b$, $-\infty < \alpha_i \leq a_i \leq \beta_i < +\infty$, $i = 1, 2, \dots, n$. Facem asupra funcției (1) următoarele ipoteze:

1° Ea este continuă în raport cu totalitatea argumentelor sale în întreg domeniul său de definiție.

2° Dacă se dau n puncte distincte, ale intervalului $[a, b]$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ și n numere arbitrare $y_1, y_2, \dots, y_n$, aparținând domeniului valorilor funcției (1), atunci sistemul de ecuații

$$F(x_i; a_1, a_2, \dots, a_n) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

cu necunoscutele $a_1, a_2, \dots, a_n$, are soluție și una singură.

Observăm că, în felul acesta, am pus în evidență o mulțime de funcții, continue pentru $x \in [a, b]$, fiecare dintre aceste funcții corespunzând unui sistem determinant de valori ale parametrilor $a_1, a_2, \dots, a_n$. Această mulțime de funcții, supusă condițiilor 1° și 2°, o numim mulțime interpolatoare și o notăm în cele ce urmează cu $\mathcal{F}$.

Cu $L(x_1, x_2, \dots, x_n; y|x)$ notăm acea funcție a mulțimii $\mathcal{F}$, care pe punctele $x_1, x_2, \dots, x_n$ ia respectiv valorile $y_1, y_2, \dots, y_n$. Sau, pentru a pune în evidență că y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sînt valori ale unei funcții $y = f(x)$, pe punctele x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, cum se întîmplă întotdeauna, folosim notația $L(x_1, x_2, \dots, x_n; f|x)$.

Teoremele de medie, pe care le stabilim în paragraful următor, se referă la acele funcții ale mulțimii $\mathcal{F}$, care satisfac n dintre ecuațiile sistemului

$$F(x_i; a_1, a_2, \dots, a_n) = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (3)$$

unde punctele

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}, \quad (4)$$

aparțin intervalului $[a, b]$, iar

$$y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, \quad (5)$$

sint $n + 1$ numere arbitrare. Se știe [1] că două funcții distincte, aparținând mulțimii $\mathcal{F}$, nu pot avea mai mult de $n - 1$ puncte de intersecție, iar dacă au $n - 1$ puncte de intersecție, diferența celor două funcții schimbă semnul în fiecare punct de intersecție. În ceea ce privește sistemul (3) se pot întâmpla două cazuri; sau există o funcție în $\mathcal{F}$, care satisface sistemul (3), sau o asemenea funcție nu există și atunci există $n + 1$ funcții distincte din $\mathcal{F}$, fiecare satisfăcând câte n dintre cele $n + 1$ ecuații ale sistemului (3) (pentru amănunte a se consulta [1]).

2. Se consideră date punctele (4) și numerele (5).

Teorema 1. Dacă $x_0 \in [a, b]$, $x_0 > x_{n+1}$, atunci numărul $L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x_0)$, $i = 2, 3, \dots, n$, este cuprins între numerele $L(x_1, x_2, \dots, x_n; y | x_0)$ și $L(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y | x_0)$.

Demonstrația teoremei 1 se bazează pe două leme.

Lema 1. Dacă $x_0 \in [a, b]$, $x_0 > x_{n+1}$, atunci

$$L(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y | x_0) \leq L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x_0) \quad (6)$$

$$i = 2, \dots, n$$

sau

$$L(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y | x_0) \geq L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x_0) \quad (7)$$

$$i = 2, \dots, n,$$

după cum

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; y | x_{n+1}) \geq y_{n+1} \quad (8)$$

sau

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; y | x_{n+1}) \leq y_{n+1}, \quad (9)$$

egalitatea avînd loc peste tot, dacă și numai dacă există în $\mathcal{F}$, o funcție care satisface sistemul (3).

Lema 2. Dacă $x_0 \in [a, b]$, $x_0 > x_{n+1}$, atunci au loc inegalitățile

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x_0) \geq$$

$$\geq L(x_1, x_2, \dots, x_n; y | x_0), \quad i = 2, \dots, n \quad (10)$$

sau

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x_0) < L(x_1, x_2, \dots, x_n; y | x_0),$$

$$i = 2, 3, \dots, n, \quad (11)$$

după cum are loc (9) sau (8).

Pentru demonstrația lemelor de mai sus ne servim de proprietatea menționată în paragraful precedent, cu privire la numărul punctelor de intersecție a două funcții distincte ale mulțimii $\mathcal{F}$.

Demonstrația lemei 1. Dacă în $\mathcal{F}$ există o funcție care satisface sistemul (3), atunci în (8) are loc semnul egalității și la fel și în (6). Dacă în $\mathcal{F}$ nu există o funcție care să satisfacă sistemul (3), atunci are loc

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x_i) > y_i$$

sau

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x_i) < y_i,$$

după cum i este de aceeași paritate sau de paritate contrară cu $n + 1$, cînd

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; y | x_{n+1}) > y_{n+1} \quad (12)$$

și inegalitățile de sens contrar, cînd

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; y | x_{n+1}) < y_{n+1}. \quad (13)$$

Prin urmare, dacă are loc inegalitatea (12), atunci pentru $x_n < x < x_{n+1}$ avem

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x) < L(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y | x)$$

$$i = 2, 3, \dots, n$$

și pentru $x > x_{n+1}$ trebuie să avem

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x) > L(x_2, x_3, \dots, x_n; y | x)$$

$$i = 2, 3, \dots, n.$$

Funcțiile $L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{n+1}; y | x)$ și $L(x_2, x_3, \dots, x_n; y | x)$ intersectîndu-se în punctele de abscise $x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}$ și neputînd avea mai mult de $n - 1$ puncte de intersecție.

În mod analog se observă că, dacă are loc inegalitatea (13), atunci pentru $x_n < x < x_{n+1}$ avem

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x) > L(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y | x),$$

$$i = 2, 3, \dots, n$$

și pentru $x > x_{n+1}$ avem

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x) < L(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y | x),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Lema 1 este astfel stabilită. Demonstrația lemei 2 este analogă. Din cele două leme, rezultă imediat că avem

$$\min_{j=1,2} L(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n-1}; y | x_0) \leq$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y | x_0) \leq$$

$$\leq \max_{j=1,2} L(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n-1}; y | x_0), \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (14)$$

unde $x_0 > x_{n+1}$, semnul egalității avînd loc simultan și numai dacă există în $\mathcal{F}$ o funcție care satisface sistemul (3).

Teorema 2. Dacă $x_0 \in [a, b]$, $x_0 < x_1$, atunci are, de asemenea, loc proprietatea exprimată prin (14).

Teorema 3. Dacă $x_0 \in [x_j, x_{j+n-1}]$, atunci numărul $L(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n-1}, y | x_0)$ este cuprins între numerele

$$L(x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n-2}; y | x_0) \text{ și } L(x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{j+n-1}; y | x_0).$$

Teorema 4. Dacă E_m este o mulțime de m puncte distincte ale intervalului $[a, b]$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m, \quad (m \geq n+1) \quad (15)$$

și Y_m o mulțime de numere arbitrare

$$y_1, y_2, \dots, y_m,$$

atunci

$$\begin{aligned} \min_{j=i_1, i_1+1, \dots, i_n-n+1} L(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n-1}; y | x_0) &\leq \\ &\leq L(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}; y | x_0) \leq \max_{j=i_1, i_1+1, \dots, i_n-n+1} \\ &L(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n-1}; y | x_0), \end{aligned} \quad (16)$$

unde

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq m, \quad x_0 \in [a, b], \quad x_0 > x_{i_n}.$$

Teoremele 2 și 3 rezultă dintr-un raționament analog cu cel făcut la stabilirea teoremei 1. Teorema 4 se demonstrează prin inducție completă asupra numărului $k = i_n - i_1$ (demonstrația amănunțită este dată în lucrarea autorului *O generalizare a noțiunii de convexitate*, în curs de tipărire).

Aplicarea acestor teoreme de medie la interpolarea prin polinoame de gradul $n-1$, conduce la stabilirea teoremelor de medie cunoscute pentru diferențe divizate.

3. Să considerăm acum funcția (1) și să presupunem că ea este soluția generală a ecuației diferențiale

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (17)$$

Menținem ipotezele 1° și 2° făcute asupra funcției (1), într-un interval $[a, b]$, care, evident, depinde acum direct de structura ecuației diferențiale (17).

Teorema 5. Dacă $f(x)$ este o funcție de n ori continuu derivabilă în intervalul $[a, b]$ și are în acest interval $n+1$ puncte de intersecție distincte, $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ cu o integrală a ecuației (17), atunci există în intervalul (x_1, x_{n+1}) un punct ξ , în care

$$f^{(n)}(\xi) = G(\xi, f(\xi), \dots, f^{(n-1)}(\xi)). \quad (18)$$

Demonstrație. În intervalul (x_1, x_2) curba reprezentativă a integralei, care în punctele $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ se intersectează cu $f(x)$, este situată fie deasupra, fie sub curba reprezentativă a funcției $f(x)$. De aceea integrala care satisface condițiilor

$$F(x_i; a_1, \dots, a_n) = f(x_i), \quad i = 3, 4, \dots, n+1,$$

$$F(x_0; a_1, \dots, a_n) = f(x_0), \quad x_1 < x_0 < x_2,$$

are cu $f(x)$ cel puțin două puncte comune în intervalul (x_1, x_2) . Aceasta din cauza continuității funcției $f(x)$ și din cauză că în $[a, b]$ două integrale distincte nu pot avea mai mult de $n-1$ puncte de intersecție. Aceeași obser-

vație se poate face asupra intervalului (x_n, x_{n+1}) , pentru integrala care satisface condițiilor

$$F(x_i; a_1, \dots, a_n) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$F(x'_0; a_1, \dots, a_n) = f(x'_0), \quad x_n < x'_0 < x_{n+1}.$$

Se observă acum ușor că o integrală, care satisface condițiilor

$$F(x_0; a_1, \dots, a_n) = f(x_0),$$

$$F(x_i^*; a_1, \dots, a_n) = f(x_i^*), \quad x_i < x_i^* < x_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$F(x'_0; a_1, \dots, a_n) = f(x'_0),$$

are cu funcția $f(x)$, $n+1$ puncte de intersecție.

În felul acesta am găsit un interval interior intervalului $[x_1, x_{n+1}]$, în care $f(x)$ are cu o integrală a ecuației (17), $n+1$ puncte de intersecție. Repetind acest raționament se pune în evidență un șir de intervale

$$[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}], [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}], \dots, [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}], \dots, \quad (19)$$

care au următoarele proprietăți:

$$(a) \quad x_1^{(k)} > x_1^{(k+1)} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$x_2^{(k)} < x_2^{(k+1)} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(b) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (x_2^{(k)} - x_1^{(k)}) = 0.$$

Proprietatea (a) rezultă din construcția intervalelor (19). Proprietatea (b) se stabilește imediat făcând ipoteza contrară și ajungând la o contradicție.

În felul aceste există un punct ξ comun intervalelor (19), către care tind cele $n+1$ puncte de intersecție, și în acest punct ξ , din ipoteza făcută asupra derivabilității funcției $f(x)$ și asupra funcției (1), rezultă că există o integrală $g(x)$ a ecuației (17), astfel ca să avem

$$f(\xi) = g(\xi), \quad f^{(k)}(\xi) = g^{(k)}(\xi) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Existența punctului ξ , care figurează în (18), este astfel stabilită.

În cazul cînd asupra funcției $f(x)$ se face numai ipoteza continuității în intervalul $[a, b]$, iar asupra lui (1) numai ipotezele 1° și 2°, rezultă

Teorema 6. Dacă $f(x)$ este o funcție continuă în $[a, b]$ și are în acest interval $n+1$ puncte de intersecție distincte, $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ cu o funcție din $\mathcal{F}$, atunci există în intervalul (x_1, x_{n+1}) un punct ξ , care are proprietatea ca într-un interval oricît de mic, cu centrul în ξ , există $n+1$ puncte distincte în care $f(x)$ se intersectează cu o funcție a mulțimii $\mathcal{F}$.

Demonstrația teoremei 6, rezultă direct din prima parte a demonstrației teoremei 5. În cazul interpolării prin polinoame de gradul $n-1$, această teoremă ne conduce la cunoscuta teoremă de medie, pentru diferențe divizate [2]:

Teorema 7. Dacă $f(x)$ este o funcție continuă în $[a, b]$ și există în $[a, b]$ $n+1$ puncte distincte $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$, astfel ca $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f(x)] = 0$, atunci există în intervalul (x_1, x_{n+1}) un punct ξ , astfel ca într-un interval oricît de mic cu centrul în ξ să existe $n+1$ puncte distincte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$, pentru care $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}; f(x)] = 0$.

4. Teorema 6 stabilită în paragraful precedent, pe lângă faptul că generalizează un mare număr de teoreme de medie devenite clasice, are și aplicație imediată. Știm [3] că, pentru ca o funcție continuă să fie convexă (concavă) față de mulțimea interpolatoare $\mathcal{F}$, este necesar și suficient ca ea să aibă, cu orice funcție din $\mathcal{F}$, cel mult n puncte de intersecție. De aici rezultă că, pentru ca o funcție $f(x)$, de n ori continuu derivabilă în $[a, b]$ să fie convexă (concavă) față de mulțimea $\mathcal{F}$ formată din soluțiile ecuației (17), este suficient ca $f^{(n)}(x)$ să fie $>$ sau $<$ $G(x, f(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$ (în $[a, b]$, fără să avem în nici un punct al intervalului $[a, b]$ $f^{(n)}(x) = G(x, f(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$). Se poate arăta că în enunțul de mai sus, în cazul convexității, este valabil semnul $>$, iar în cazul concavității semnul $<$.

Aceste observații, datorite interpretării geometrice a noțiunii de convexitate, respectiv concavitate, conduc la construirea unui procedeu de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale, care, într-un anumit sens, poate fi considerat ca o generalizare a cunoscutului procedeu de integrare numerică datorită lui Ciaplihin.

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ О СРЕДНЕМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Для функций, зависящих от данного конечного числа параметров и удовлетворяющих условиям 1° и 2°, устанавливаются теоремы о среднем, выраженные (14) и (16). В предположении, что (1) является общим решением дифференциального уравнения (17), устанавливается для n -раз дифференцируемой функции теорема 5. Приводятся замечания, касающиеся приложений теоремы 5.

SUR CERTAINS THÉORÈMES DE MOYENNE

(RÉSUMÉ)

On établit pour des fonctions de la forme (1), qui sont continues par rapport à l'ensemble des arguments $x, a_1, \dots, a_n$ et ont un caractère d'interpolation, des théorèmes de moyenne exprimés par (14) et (16). Puis on établit un théorème de moyenne pour l'équation (17). On en donne des applications.

BIBLIOGRAFIE

1. M. I. Morozov, IAN, 1952, t. 16, nr. 1, p. 75—102.
2. T. Popovici, Magyar tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai osztályának közleményei, 1954, t. IV, nr. 3, p. 353—356.

SOLUȚII APROAPE-PERIODICE ALE SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE NELINIARE

DE

A. HALANAY

Comunicare prezentată de academician S. STOILOV în ședința din 29 iunie 1955

1. M. Cartwright și J. Littlewood au formulat în treacăt o teoremă care poate servi pentru demonstrarea existenței soluțiilor periodice ale sistemelor neliniare. Iată cum poate fi formulată această teoremă în forma ei cea mai generală:

Se consideră sistemul

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t),$$

$$X(x, t + \omega) = X(x, t);$$

dacă sistemul admite o soluție mărginită $x(t)$ astfel încât soluțiile $x(t)$ și $x(t + \omega)$ se apropie asimptotic pentru $t \rightarrow \infty$, atunci sistemul admite o soluție periodică.

Demonstrație. Șirul de puncte $x(n\omega)$ este mărginit, deci există un subșir convergent $\lim_{v \rightarrow \infty} x(v\omega) = \xi$. Fie $u(t)$ soluția sistemului care verifică condițiile

inițiale $u(0) = \xi$. Conform ipotezei, $x(t + \omega)$ și $x(t)$ se apropie asimptotic, deci $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t + \omega) - x(t)] = 0$. Rezultă $\lim_{v \rightarrow \infty} x[(v + 1)\omega] = \xi$. Considerăm soluțiile $x_v(t) = x(t + v\omega)$. Atunci $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v(0) = \xi = u(0)$, deci pe intervalul $0 \leq t \leq \omega$ rezultă $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v(t) = u(t)$.

Cum $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v(\omega) = \xi$, rezultă $u(\omega) = \xi = u(0)$, deci $u(t)$ este o soluție periodică a sistemului.

Se vede imediat că cererea din enunț este îndeplinită dacă sistemul admite o soluție mărginită asimptotic stabilă în mare. Sub această formă teorema admite o extindere la cazul sistemelor aproape-periodice.

2. Fie dat sistemul $\frac{dx}{dt} = X(x, t)$. O soluție $x_0(t)$ a sistemului se va numi uniform asimptotic stabilă în raport cu un domeniu D dacă pentru