

COMUNICĂRILE

ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Tomul VII

1957

Nr. 3

COMITETUL DE REDACTIE: Academician I. S. Gheorghiu; academician Gh. Macovei;
academician I. Murgulescu; academician Șt. S. Nicolau; academician S. Stoilov;
academician Șt.-M. Milcu — redactor responsabil.

MATEMATICĂ

GENERALIZAREA TEORIEI POLARE LA OVALE ȘI OVALOIDE

DE

EUGEN GERGELY

*Comunicare prezentată la cel de al IV-lea Congres al matematicienilor romini
din 28 mai 1956*

Teoria figurilor plane convexe și de asemenea a suprafețelor și corpurilor convexe constituie un domeniu vast și important al geometriei. Lucrarea de față se ocupă cu generalizarea corespondenței polare la o clasă importantă a figurilor și suprafețelor convexe, anume la ovale și ovaloide.

Această generalizare o putem realiza în mai multe moduri, folosind o anumită proprietate caracteristică a corespondenței polare, proprietate ce se poate extinde și la ovale și ovaloide.

1° În cazul ovalelor dintr-un punct exterior se pot duce două tangente bine determinate la ovală; dreapta care unește punctele de contact ale tangentelor o numim dreapta polară a punctului exterior.

2° Considerăm o dreaptă oarecare ce trece printr-un punct dat exterior sau interior și care intersectează ovala. Curba polară a punctului este locul geometric al acelor puncte care formează un sistem armonic cu punctul dat relativ la punctele de intersecție.

În mod analog se definește suprafeța polară la o ovaloidă.

3° O altă generalizare pentru ovale se face prin curbele conjugate. Curba conjugată corespunzătoare unui punct dat (interior sau exterior) se definește ca fiind locul geometric al punctelor de intersecție ale tangentelor duse în extremitățile coardelor care trec prin punctul dat. În cele ce urmează ne vom ocupa de generalizarile 2° și 3°.

I. OVALE

1. Curbe polare

a. Curba polară a unui punct exterior

Triunghiul format din tangentele a și b duse prin punctul exterior K și de coarda determinată de punctele de contact A și B ale tangentelor a și b îl numim triunghiul tangențial al punctului K . Punctele A și B împart ovala în două arcuri, arcul interior (în interiorul triunghiului tangențial) și arcul exterior. Considerăm toate dreptele care trec prin punctul K și totodată intersectează ovala. Punctul de intersecție al unei astfel de drepte cu arcul interior îl vom nota cu C , iar D intersecția dreptei cu coarda AB o vom nota cu D . Punctul determinat E este astfel ca o pereche de puncte C, E să fie conjugată cu perechea KD . Mulțimea punctelor E , o vom numi, în cele ce urmează, corespunzătoarea armonică a arcului interior. Corespunzătoarea armonică împreună cu arcul interior formează o ovală și curba polară a punctului K în raport de această ovală este tocmai coarda AB .

Dacă corespunzătoarea armonică este situată în întregime în interiorul ovalei, atunci curba polară este situată — afară de extremitățile sale — în interiorul domeniului determinat de coarda AB și de arcul exterior al ovalei. În cazul când corespunzătoarea armonică este situată în întregime în exteriorul ovalei, atunci curba polară este situată — afară de extremitățile sale — în interiorul triunghiului de contact. În sfârșit corespunzătoarea armonică poate avea puncte de intersecție, puncte de contact sau arcuri comune cu ovala. Curba polară în punctele corespunzătoare intersectează coarda AB , respectiv coarda AB este tangentă curbei polare, în sfârșit un segment al coardei AB este o parte a curbei polare.

Notăm cu α unghiul format de tangenta a dusă din K și de dreapta c care intersectează ovala, iar cu x segmentul orientat al dreptei c situat între arcul exterior și corespunzătoarea armonică (direcția pozitivă se consideră de la K spre arcul exterior); atunci $x(\alpha)$ este o funcție continuă segmentar monotona (sau constantă). Arcurile curbei polare, corespunzătoare arcurilor monotone ale funcției $x(\alpha)$, sînt concave, respectiv convexe, față de arcul exterior.

Curba polară a unui punct exterior are în fiecare punct o tangentă bine determinată și această tangentă se poate construi ușor.

Construcția tangentei este următoarea: fie B un punct al curbei polare a punctului exterior K . Construim tangentele în punctele de intersecție ale dreptei KB cu ovala; tangenta la curba polară în punctul B este dreapta care unește punctul B și punctul de intersecție al tangentelor.

Demonstrația construcției precedente este o consecință imediată a definiției curbei polare.

Teoremă. Prin fiecare punct interior al ovalei în fiecare direcție se duce o singură curbă polară.

Ideia, demonstrației este următoarea: Fie a o dreaptă oarecare ce trece printr-un punct dat interior B și S un punct exterior al dreptei a față de ovală. Coardele determinate de punctele de contact ale tangentelor duse din S acoperă simplu întregul domeniu interior al ovalei și astfel din această mulțime de coarde trece numai o singură coardă prin punctul B . Considerăm această coardă și punctul K , care împreună cu B formează o pereche armonică conjugată față de ovală. Curba polară a punctului K trece prin B și tangenta ei în B este tocmai dreapta a . Construcția este univocă.

b. Curba polară a unui punct interior

Curba polară a unui punct interior este situată în întregime în exteriorul ovalei și are cel puțin o ramură, cu un punct la infinit.

Partea primă a afirmației este evidentă; pentru partea a doua se poate demonstra ușor că prin fiecare punct B interior trece cel puțin o coardă pentru care B este punctul de mijloc.

Curba polară a unui punct interior B în fiecare punct are o tangentă bine determinată. Construirea tangentei în punctul K se face în modul următor. Tangentele duse în punctele de intersecție ale dreptei BK cu ovala se intersectează în punctul T . Dreapta KT este tangenta în punctul K a curbei polare a punctului B . Demonstrarea modului de construcție este analogă cu cea din cazul curbilor polare ce trec printr-un punct interior.

Teoremă. Printr-un punct exterior K trec dreptele care intersectează ovala și dreptele care nu intersectează ovala. Dreptele secante nu sînt tangentele curbilor polare, care trec prin K , iar în direcția fiecărei drepte nesecante trece o singură curbă polară.

Prima parte a teoremei este ușor de demonstrat, iar demonstrația părții a doua se face prin studierea curbei conjugate a punctului K . Se demonstrează că curba conjugată intersectează orice dreaptă dusă prin K într-un singur punct și cu aceasta teorema este demonstrată.

La demonstrație joacă un rol însemnat punctele conjugate pe o dreaptă e . Fie dată o dreaptă e , în exteriorul ovalei. Dintr-un punct Q al dreptei ducem tangentele la ovala. Dreapta care unește punctele de contact ale tangentelor intersectează dreapta dată într-un punct Q' , care se numește punctul conjugat al punctului Q pe dreapta e . Corespondența între Q și Q' este biunivocă și dacă Q descrie dreapta întreagă, atunci și Q' descrie dreapta întreagă. Este cunoscut că, în cazul elipsei, corespondența aceasta pe fiecare dreaptă este involutorică. Este o problemă deschisă dacă această corespondență la elipsă este involutorică numai pentru fiecare dreaptă sau și pentru fiecare punct. Pornind dintr-un punct Q , să construim șirul punctelor $Q', Q'', \dots, Q^{(n)}$... astfel ca fiecare punct să fie conjugat cu punctul precedent. În legătură cu acest șir de puncte se pune o serie de probleme de închidere.

2. Curbe conjugate

Am văzut că curba conjugată a unui punct exterior K intersectează fiecare dreaptă dusă prin K într-un singur punct.

Curba conjugată a unui punct exterior are o singură ramură și aceasta are un punct infinit.

Pentru a demonstra teorema se arată că printr-un punct exterior se duce un singur cvazidiametru, adică o dreaptă cu proprietatea că tangentele duse în punctele ei de intersecție cu ovala sînt paralele.

Curba conjugată a unui punct interior are un număr de ramuri infinite egal cu numărul cvazidiametrelor care trec prin punctul dat.

Teorema. *Curbele conjugate a două puncte se intersectează atunci și numai atunci cînd dreapta care unește aceste două puncte date intersectează ovala. Două curbe conjugate pot avea numai un singur punct de intersecție.*

Observație. În legătură cu ovala am introdus noțiunea; „ordinea ovalei relativ la cerc”. Acesta este numărul maxim al punctelor de intersecție ale unui cerc oarecare cu ovala. Dacă ovala nu are un arc de cerc, atunci ordinea relativ la cerc este un număr finit par. Folosind această noțiune putem da o clasificare a ovalelor.

II. OVALOIDE

1. Suprafața polară a unui punct exterior

Suprafața polară a unui punct (exterior sau interior) K are în fiecare punct B un plan tangent bine determinat.

Demonstrația se face cu ajutorul ovalelor, care sînt secțiunile cu ovaloide ale planelor ce trec prin dreapta BK .

Construirea planului tangent în punctul B la suprafața polară a unui punct K este următoarea: dreapta KB intersectează ovaloida în două puncte, planele tangente duse în aceste puncte se intersectează după o dreaptă e ; planul tangent la suprafața polară este planul care conține punctul B și dreapta e .

Teorema 1. *Fiecare element de suprafață într-un punct interior este elementul de tangentă a unei singure suprafețe polare.*

Demonstrația se face prin ajutorul congruenței de drepte adjungate a unui punct P . Prin punctul P trec drepte care intersectează ovaloida; planele tangente duse în punctele de intersecție ale acestor coarde se intersectează în anumite drepte. Aceste drepte formează congruența adjungată a punctului P .

Pentru studierea congruenței am folosit următoarea construcție: Fie E curba tangențială a unui punct exterior Q ; coardele ce trec prin punctele curbei E și printr-un punct interior dat P , intersectează ovaloida în punctele unei noi curbe E_1 pe care o numim curba proiectată a curbei E relativ la punctul P . Punctele de intersecție ale curbilor E și E_1 formează astfel de perechi de puncte încît coardele determinate printr-o pereche

trec prin punctul P . Aceste drepte ale congruenței adjungate punctului P , care corespund coardelor astfel determinate, trec prin punctul Q .

Se demonstrează că în fiecare plan care trece printr-un punct interior B există o singură dreaptă a congruenței adjungate a punctului B și cu aceasta teorema este demonstrată.

Teorema 2. *Fiecare plan care trece printr-un punct exterior K și care nu intersectează ovaloida este planul tangent în punctul K al unei singure suprafețe polare a unui punct interior. Acele plane duse prin K , care intersectează ovaloida, nu sînt plane tangente la o suprafață polară.*

Demonstrația se face și în acest caz cu ajutorul congruenței adjungate punctului K .

ОБОБЩЕНИЕ ПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ ОВАЛОВ И ОВАЛОИДОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе изучаются некоторые основные свойства полярных и сопряженных кривых относительно овалов, а также полярных поверхностей относительно оваловидов.

Доказывается, что через каждую внутреннюю точку в каждом направлении проходит одна и только одна полярная кривая соответственно полярная поверхность, а через каждую внешнюю точку в любом направлении проходит также одна и только одна полярная кривая соответственно поверхность, если только прямая соответственно плоскость избранного направления, проходящая через заданную точку, не пересекает овала (овалоида) в двух отдельных точках.

GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE POLAIRE AUX OVALES ET OVALOÏDES

(RÉSUMÉ)

Le travail traite des courbes polaires et des courbes conjuguées relativement aux ovales, et des surfaces polaires, relativement aux surfaces ovaloïdes. Les théorèmes démontrés constatent que, par un point intérieur, dans toutes les directions passe une courbe polaire unique, respectivement une surface polaire unique; mais, par un point extérieur, les tangentes des courbes polaires et les plans tangents des surfaces polaires sont seulement les droites, respectivement les plans, qui ne coupent pas l'ovale, respectivement la surface ovaloïde.