

GENERALIZAREA FORMULEI DE CUADRATURĂ A LUI GAUSS-CHRISTOFFEL

DE

D. D. STANCU

*Comunicare prezentată la 27 martie 1957 în ședința Filialei Iași
a Academiei R. P. R.*

1. Se știe că o formulă de cuadratură sau de integrare numerică pentru o funcție $f(x)$, integrabilă într-un interval $[a, b]$, se prezintă de obicei sub forma

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + \varrho[f],$$

unde $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt n numere reale și distincte date, numite noduri, iar $\varrho[f]$ este restul formulei.

Dîndu-se nodurile x_i , coeficienții A_i se pot determina dintr-un sistem liniar, care se obține scriind că $\varrho[x^v] = 0$ ($v = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Coeficienții A_i se pot determina de asemenea prin integrarea polinomului de interpolare al lui Lagrange relativ la funcția $f(x)$ și nodurile x_i ($i = \overline{1, n}$).

În general, formula de cuadratură (1) are gradul de exactitate $n-1$, adică $\varrho[P] = 0$, oricare ar fi polinomul $P = P(x)$ de grad $n-1$.

Prin alegeri speciale ale nodurilor, s-ar putea ca formula (1) să aibă gradul de exactitate mai înalt. Gauss [1] a arătat că, dacă se aleg ca noduri cele n rădăcini reale și distincte ale polinomului lui Legendre, relativ la intervalul $[a, b]$, atunci formula (1) va avea gradul maxim de exactitate, adică $2n-1$. După 44 de ani, Christoffel [2] a perfecționat metoda de integrare numerică a lui Gauss, dînd expresii explicite foarte utile pentru coeficienții formulei de cuadratură a lui Gauss. Totodată el a dat și o importantă generalizare a acestei formule. Iată în ce constă această generalizare a lui Christoffel: el a construit o formulă cu $r+m$ noduri distincte, dintre care r sînt date (oarecare), iar celelalte m le-a ales astfel încît formula de cuadratură respectivă să aibă gradul de exactitate maxim.

2. În această lucrare, vom generaliza formula de cuadratură a lui Christoffel în felul următor: vom considera date nodurile $a_1, a_2, \dots, a_s$ — multiple, respectiv de ordinele $r_1, r_2, \dots, r_s$ — și vom căuta să determinăm alte n noduri reale, distincte și interioare intervalului de integrare, astfel încât formula de cuadratură, care se obține, să aibă gradul de exactitate maxim. Deci, noi vom studia cazul cînd nodurile fixe vor fi multiple și în plus ne vom ocupa de evaluarea restului — problemă de care nu s-a ocupat Christoffel.

3. Să introducem următoarele notații

$$(2) \quad u(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i), \quad v(x) = \prod_{j=1}^k (x - \gamma_j), \quad w(x) = c \prod_{l=1}^s (x - a_l)^{r_l} \quad (c \neq 0),$$

$$(3) \quad u_v(x) = \frac{u(x)}{x - x_v}, \quad v_\mu(x) = \frac{v(x)}{x - \gamma_\mu}, \quad w_\sigma(x) = \frac{w(x)}{(x - a_\sigma)^{r_\sigma}},$$

$$(4) \quad \omega_i(x) = u(x) v(x) w_i(x), \quad p = r_1 + r_2 + \dots + r_s.$$

În ipoteza că nodurile x_i, γ_j, a_l ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k}; l = \overline{1, s}$) sînt distincte între ele, formula de interpolare a lui Lagrange-Hermite relativă la $f(x)$ și la rădăciunile polinoamelor (2), se scrie

$$(5) \quad f(x) = L_{n+k+p-1}(x) + R(x),$$

unde

$$(6) \quad \begin{aligned} L_{n+k+p-1}(x) &= L(x_1, x_2, \dots, x_n, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{a_s, \dots, a_s}_{r_s}; f | x) = \\ &= \sum_{v=1}^n \frac{u_v(x)}{u_v(x_v)} \frac{v(x)}{v(x_v)} \frac{w(x)}{w(x_v)} f(x_v) + \sum_{\mu=1}^k \frac{u(x)}{u(\gamma_\mu)} \frac{v_\mu(x)}{v_\mu(\gamma_\mu)} \frac{w(x)}{w(\gamma_\mu)} f(\gamma_\mu) + \\ &+ \sum_{l=1}^s \sum_{j=0}^{r_l-1} \sum_{r=0}^{r_l-j-1} \frac{(x-a_l)^j}{j!} \left[\frac{(x-a_l)^r}{r!} \left(\frac{1}{\omega_l(x)} \right)_{a_l}^{(r)} \right] \omega_l(x) f^{(j)}(a_l), \end{aligned}$$

iar

$$(6') \quad c R(x) = u(x) v(x) w(x) [x, x_1, \dots, x_n, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{a_s, \dots, a_s}_{r_s}; f].$$

Prin $[b_1, b_2, \dots, b_{m+1}; f]$ am notat diferența divizată de ordinul m relativă la funcția $f(x)$ și la nodurile $b_1, \dots, b_{m+1}$.

4. Integrînd de la -1 la $+1$ ambii membri ai formulei de interpolare (5), se obține o formulă de cuadratură de forma¹⁾

1) Formulele care se obțin se pot transcrie pentru un interval finit oarecare $[a, b]$ făcînd schimbarea de variabilă

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}.$$

$$(7) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{v=1}^n A_v f(x_v) + \sum_{\mu=1}^k B_\mu f(\gamma_\mu) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{i,j} f^{(j)}(a_i) + \varrho[f].$$

Să presupunem că nodurile fixe, așezate oriunde pe axa reală, sînt astfel alese încît $w(x)$ să fie nenegativ în $[-1, +1]$. În aceste condiții, vom demonstra următoarea

Teoremă. Condiția necesară și suficientă ca în formula de cuadratură (7), unde $k=n$, să avem $B_i=0$ ($i=\overline{1, n}$), oricare sînt $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, este ca $x_1, x_2, \dots, x_n$ să fie cele n rădăcini reale, distincte și cuprinse în $(-1, +1)$ ale polinomului

$$(8) \quad U_n(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) & \dots & P_{n+p}(x) \\ P_n(a_1) & P_{n+1}(a_1) & \dots & P_{n+p}(a_1) \\ P'_n(a_1) & P'_{n+1}(a_1) & \dots & P'_{n+p}(a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n^{(r_1-1)}(a_1) & P_{n+1}^{(r_1-1)}(a_1) & \dots & P_{n+p}^{(r_1-1)}(a_1) \\ P_n(a_2) & P_{n+1}(a_2) & \dots & P_{n+p}(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n(a_s) & P_{n+1}(a_s) & \dots & P_{n+p}(a_s) \\ P'_n(a_s) & P'_{n+1}(a_s) & \dots & P'_{n+p}(a_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n^{(r_s-1)}(a_s) & P_{n+1}^{(r_s-1)}(a_s) & \dots & P_{n+p}^{(r_s-1)}(a_s) \end{vmatrix} : w(x),$$

unde

$$(9) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

este polinomul lui Legendre de gradul n .

Demonstrație. Ținînd seama că

$$B_\mu = \int_{-1}^{+1} \frac{u(x)}{u(\gamma_\mu)} \frac{v_\mu(x)}{v_\mu(\gamma_\mu)} \frac{w(x)}{w(\gamma_\mu)} dx,$$

se observă că, pentru a avea $B_1 = \dots = B_k = 0$, este necesar ca

$$\int_{-1}^{+1} u(x) v_\mu(x) w(x) dx = 0 \quad (\mu = \overline{1, k}).$$

Luînd $k=n$, se constată că e necesar ca $u(x)$ să fie astfel încît

$$\int_{-1}^{+1} w(x) u(x) g(x) dx = 0,$$

unde $g(x)$ e un polinom oarecare de gradul $n-1$.

Trebuie deci ca $u(x)$ să fie ortogonal relativ la intervalul $[-1, +1]$ și ponderea

$$w(x) = \prod_{i=1}^s (x - a_i)^{r_i},$$

față de orice polinom de gradul $n-1$ (căci $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sint arbitrari).

Dar se știe [3] că polinomul $U_n(x)$, care verifică aceste condiții, este dat, afară de un factor constant, de formula (8).

Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n$ sint rădăcinile polinomului ortogonal (8), atunci formula de cuadratură (7) se reduce la

$$(10) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{v=1}^n A_v f(x_v) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{r_i-1} C_{i,j} f^{(j)}(a_i) + \varrho[f]$$

și în cazul cind $k < n$.

Valorile x_i ($i=1, n$) le vom numi *nodurile fundamentale* ale formulei de cuadratură (10).

5. În anumite cazuri particulare, expresia polinomului $U_n(x)$ se poate simplifica. Astfel, dacă $w(x)$ e o funcție pară, rădăcinile sale fiind $\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_q$ ($2q=p$), de ordinele de multiplicitate pare $r_1, r_2, \dots, r_q$, formula (8) se reduce²⁾ la următoarea

$$(11) \quad U_n(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+2}(x) & P_{n+4}(x) & \dots & P_{n+p}(x) \\ P_n(a_1) & P_{n+2}(a_1) & P_{n+4}(a_1) & \dots & P_{n+p}(a_1) \\ P'_n(a_1) & P'_{n+2}(a_1) & P'_{n+4}(a_1) & \dots & P'_{n+p}(a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n^{(r_1-1)}(a_1) & P_{n+2}^{(r_1-1)}(a_1) & P_{n+4}^{(r_1-1)}(a_1) & \dots & P_{n+p}^{(r_1-1)}(a_1) \\ P_n(a_2) & P_{n+2}(a_2) & P_{n+4}(a_2) & \dots & P_{n+p}(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n(a_q) & P_{n+2}(a_q) & P_{n+4}(a_q) & \dots & P_{n+p}(a_q) \\ P'_n(a_q) & P'_{n+2}(a_q) & P'_{n+4}(a_q) & \dots & P'_{n+p}(a_q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_n^{(r_q-1)}(a_q) & P_{n+2}^{(r_q-1)}(a_q) & P_{n+4}^{(r_q-1)}(a_q) & \dots & P_{n+p}^{(r_q-1)}(a_q) \end{vmatrix} : w(x)$$

2) Această observație a fost făcută, în cazul particular al nodurilor simple, de G. Szegő [4].

6. Să ne ocupăm acum de calculul coeficienților formulei de cuadratură (10). Aceștia fiind independenți de $f(x)$ să facem succesiv

$$f(x) = \frac{u_v(x)}{u_v(x_v)} \frac{w(x)}{w(x_v)} \quad (v = \overline{1, n});$$

în felul acesta se obțin formulele

$$(12) \quad A_v = \int_{-1}^{+1} \frac{u_v(x) w(x)}{u_v(x_v) w(x_v)} dx \quad (v = \overline{1, n}),$$

valabile, bineînțeles, în ipoteza că $u(x)$ și $w(x)$ n-au rădăcini comune.

Dacă avem în vedere că, oricare este polinomul $v(x)$ de grad $k \leq n$, avem

$$v(x) = Cu(x) + \sum_{a=1}^n \frac{u_a(x)}{u_a(x_a)} v(x_a),$$

unde $u(x)$ are expresia de la (2), iar constanta $C \neq 0$ dacă $k=n$ și $C=0$ dacă $k < n$, atunci primele două sume din formula (6) devin

$$C \sum_{v=1}^n \frac{u_v(x)}{u_v(x_v)} \frac{u(x)}{v(x_v)} \frac{w(x)}{w(x_v)} f(x_v) + \sum_{\mu=1}^k \frac{u(x)}{u(\gamma_\mu)} \frac{v_\mu(x)}{v_\mu(\gamma_\mu)} \frac{w(x)}{w(\gamma_\mu)} f(\gamma_\mu) + \sum_{v=1}^n \sum_{a=1}^n \frac{u_v(x)}{u_v(x_v)} \frac{u_a(x)}{u_a(x_a)} \frac{v(x_a)}{v(x_v)} \frac{w(x)}{w(x_v)} f(x_v).$$

Dacă se integrează de la -1 la $+1$ și se ține seama că $u(x)$ coincide, exceptînd un factor constant, cu polinomul (8), rămîne doar suma

$$\sum_{v=1}^n \int_{-1}^{+1} \left[\frac{u_v(x)}{u_v(x_v)} \right]^2 \frac{w(x)}{w(x_v)} dx f(x_v).$$

Rezultă în felul acesta că, pentru coeficienții A_v ai formulei de cuadratură (10), avem și următoarele expresii

$$(13) \quad A_v = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{u_v(x)}{u_v(x_v)} \right)^2 \frac{w(x)}{w(x_v)} dx \quad (v = \overline{1, n}).$$

Întrucît $w(x)$ e pozitiv în $(-1, +1)$, putem trage concluzia că toți coeficienții A_v , ai formulei de cuadratură (10), sint pozitivi.

7. Coeficienții $C_{i,j}$ din formula (10), se pot exprima de asemenea independent de parametrii $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Pentru a găsi expresiile acestora, în cazul cind x_i ($i=1, n$) sint rădăcinile polinomului (8), să considerăm polinomul de interpolare

$$L_{n+p}(x) = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{a_s, \dots, a_s}_{r_s}; f|x) \\ = \sum_{v=1}^n \frac{u_v(x)}{u_v(x_v)} \frac{w(x)}{w(x_v)} f(x_v) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{r_i-1} l_{i,j}(x) f^{(j)}(a_i),$$

unde polinoamele fundamentale de interpolare $l_{i,j}(x)$, care conform definiției lor, trebuie să verifice relațiile

$$(14) \quad l_{i,j}^{(q)}(a_k) = 0 \quad (k \neq i; \quad q = 0, 1, \dots, r_k - 1) \\ l_{i,j}^{(q)}(a_i) = \begin{cases} 0, \text{ pt. } q \neq j & (q = 0, 1, \dots, r_i - 1) \\ 1, \text{ pt. } q = j & (i = 1, 2, \dots, s) \end{cases},$$

au expresiile

$$(15) \quad l_{i,j}(x) = \sum_{k=0}^{r_i-j-1} \frac{(x-a_i)^j}{j!} \left[\frac{(x-a_i)^k}{k!} \left(\frac{1}{h_i(x)} \right)_{a_i}^{(k)} \right] h_i(x),$$

unde

$$h_i(x) = u(x)w_i(x).$$

Întrucît coeficienții formulei de cuadratură sînt independenți de $f(x)$, să facem în formula (10)

$$f(x) = l_{i,j}(x)$$

$$(j = 0, 1, \dots, r_i - 1; \quad i = 1, 2, \dots, s).$$

Ținînd seama de (14) vom obține

$$(16) \quad C_{i,j} = \int_{-1}^{+1} l_{i,j}(x) dx \\ (j = 0, 1, \dots, r_i - 1; \quad i = 1, 2, \dots, s).$$

8. Pentru calculul coeficienților A_v se pot da formule explicite, care par să fie foarte utile în practică.

Dacă se normalizează polinomul ortogonal $U_n(x)$, din (8), se obține polinomul

$$(17) \quad \hat{U}_n(x) = \pm \frac{1}{\gamma_n} \sqrt{\frac{(-1)^p c \beta_n}{\beta_{n+p} G_n G_{n+1}}} U_n(x),$$

unde β_k este coeficientul lui x^k din polinomul lui Legendre $P_k(x)$, iar semnul în membrul al doilea se ia astfel încît coeficientul lui x^n din polinomul $\hat{U}_n(x)$ să fie pozitiv; am mai folosit notațiile

$$\gamma_n^2 = \int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1};$$

$$G_k = G_k(a_1, \dots, a_1; \dots; a_s, \dots, a_s) =$$

$$= \begin{vmatrix} P_k(a_1) & P_{k+1}(a_1) & \dots & P_{k+p-1}(a_1) \\ P'_k(a_1) & P'_{k+1}(a_1) & \dots & P'_{k+p-1}(a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_k^{(r_1-1)}(a_1) & P_{k+1}^{(r_1-1)}(a_1) & \dots & P_{k+p-1}^{(r_1-1)}(a_1) \\ P_k(a_2) & P_{k+1}(a_2) & \dots & P_{k+p-1}(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_k(a_s) & P_{k+1}(a_s) & \dots & P_{k+p-1}(a_s) \\ P'_k(a_s) & P'_{k+1}(a_s) & \dots & P'_{k+p-1}(a_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_k^{(r_s-1)}(a_s) & P_{k+1}^{(r_s-1)}(a_s) & \dots & P_{k+p-1}^{(r_s-1)}(a_s) \end{vmatrix}$$

Aplicînd formula lui Christoffel-Darboux, avem

$$(19) \quad K_{n-1}(t, x) = \sqrt{\lambda_n} \frac{\hat{U}_n(t) \hat{U}_{n-1}(x) - \hat{U}_n(x) \hat{U}_{n-1}(t)}{t - x},$$

unde

$$\text{iar} \quad K_{n-1}(t, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{U}_i(t) \hat{U}_i(x),$$

$$(20) \quad \lambda_n = \frac{\int_{-1}^{+1} \tilde{U}_n^2(x) dx}{\int_{-1}^{+1} \tilde{U}_{n-1}^2(x) dx} = \frac{\beta_{n-1} \beta_{n+p-1} G_{n-1} G_{n+1} \gamma_n^2}{\beta_n \beta_{n+p} G_n^2 \gamma_{n-1}^2};$$

aici am notat cu $\tilde{U}_k(x)$ produsul dintre $U_k(x)$ și o constantă a_k , aleasă astfel încît coeficientul lui x^k din $a_k U_k(x)$ să fie 1.

Dacă se înmulțesc cu $w(t)$ ambii membri ai formulei (19) și se integrează de la -1 la $+1$ se obține

$$\int_{-1}^{+1} w(t) \frac{\hat{U}_n(t) \hat{U}_{n-1}(x) - \hat{U}_n(x) \hat{U}_{n-1}(t)}{t - x} dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ rădăcinile polinomului ortonormal $\hat{U}_n(x)$. Făcînd mai sus $x = x_v$ se obține

$$(21) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{w(t) \hat{U}_n(t)}{t - x_v} dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} \hat{U}_{n-1}(x_v)}.$$

Coeficienții A_v ai formulei de cuadratură (10), pe baza formulei (12), au expresiile

$$(22) \quad A_v = \int_{-1}^{+1} \frac{\hat{U}_n(t) w(t) dt}{(t-x_v) \hat{U}'_n(x_v) w(x_v)}.$$

Avînd în vedere formula (21), se obțin evaluările

$$(23) \quad A_v = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} w(x_v) \hat{U}'_n(x_v) \hat{U}_{n-1}(x_v)}$$

sau

$$(24) \quad A_v = \frac{\beta_{n+p} \gamma_{n-1}^2 G_n^2}{c \beta_{n-1} w(x_v) U'_n(x_v) U_{n-1}(x_v)},$$

sau, în sfîrșit,

$$(25) \quad A_v = \frac{1}{2^p n} \cdot \frac{\binom{2n+2p}{n+p}}{\binom{2n-1}{n}} \cdot \frac{G_n^2}{c w(x_v) U'_n(x_v) U_{n-1}(x_v)}.$$

9. Dacă se ia $k=n$ și se consideră formulele (5) și (6'), se găsește că restul formulei de cuadratură (10) e dat de

$$\int_{-1}^{+1} \tilde{U}_n(x) v(x) \tilde{w}(x) [x, x_1, \dots, x_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \underbrace{a_1, \dots, a_1}_{r_1}, \dots, \underbrace{a_s, \dots, a_s}_{r_s}; f] dx,$$

unde $\tilde{w}(x) = \frac{1}{c} w(x)$.

Considerînd cazul limită $v(x) = \tilde{U}_n(x)$, avem

$$\varrho[f] = \int_{-1}^{+1} \tilde{U}_n^2(x) \tilde{w}(x) [x, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n, a_1, \dots, a_1, \dots, a_s, \dots, a_s; f] dx.$$

Aplicînd o cunoscută teoremă de medie relativă la diferențele divizate, se obține evaluarea următoare (bineînțeles în ipoteza că $f(x)$ are derivată de ordinul $2n+p$ în întreg intervalul de integrare):

$$\varrho[f] = \frac{1}{(2n+p)!} \int_{-1}^{+1} \tilde{U}_n^2(x) \tilde{w}(x) f^{(2n+p)}(\eta),$$

unde η aparține celui mai mic interval care conține pe $x, x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_s$.

Întrucît, în ipotezele în care ne-am plasat, produsul $\tilde{U}_n^2(x) \tilde{w}(x)$ păstrează un semn constant în intervalul de integrare, putem aplica prima teoremă a mediei din calculul integral și vom obține, în definitiv, următoarea evaluare a restului formulei de cuadratură (10)

$$(26) \quad \varrho[f] = \frac{f^{(2n+p)}(\xi)}{(2n+p)!} \int_{-1}^{+1} \tilde{U}_n^2(x) \tilde{w}(x) dx,$$

unde $\xi \in (-1, +1)$.

10. În cazul particular $p=0$, formula generală de cuadratură (10) se reduce la formula clasică a lui Gauss

$$(27) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{v=1}^n A_v f(x_v) + \varrho[f],$$

unde, pe baza formulelor (25) și (26), avem

$$(28) \quad A_v = \frac{2}{nP'_n(x_v) P_{n-1}(x_v)},$$

$$(29) \quad \varrho[f] = \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{[n!]^4}{[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi).$$

Observație. Expresia (29) a restului formulei lui Gauss a fost prima dată obținută de A. Markoff [5].

11. Dacă se consideră cazul particular

$$(30) \quad w(x) = (1+x)^m (1-x)^r,$$

se obține formula de cuadratură

$$(31) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + \sum_{j=0}^{m-1} B_j f^{(j)}(-1) + \sum_{k=0}^{r-1} C_k f^{(k)}(1) + \varrho[f]^3,$$

unde pe baza rezultatelor precedente

$$(32) \quad A_i = \frac{1}{2^{m+r} n} \cdot \frac{\binom{2n+2m+2r}{n+m+r}}{\binom{2n-1}{n}} \cdot \frac{G_n^2}{(1+x_i)^m (1-x_i)^r U'_n(x_i) U_{n-1}(x_i)},$$

$$(33) \quad B_j = \int_{-1}^{+1} l_{1,j}(x) dx, \quad C_k = \int_{-1}^{+1} l_{2,k}(x) dx,$$

cu

3) De această formulă s-a ocupat cu altă metodă și prof. D. V. Ionescu [6].

$$l_{1,j}(x) = \frac{(x+1)^j}{j!} \left[\sum_{\nu=0}^{m-j-1} \frac{(x+1)^\nu}{\nu!} \left(\frac{1}{v_1(x)} \right)_{x-1}^{(\nu)} \right] v_1(x),$$

$$l_{2,k}(x) = \frac{(x-1)^k}{k!} \left[\sum_{\mu=0}^{r-k-1} \frac{(x-1)^\mu}{\mu!} \left(\frac{1}{v_2(x)} \right)_{x+1}^{(\mu)} \right] v_2(x),$$

iar

$$v_1(x) = (x-1)^r U_n(x), v_2(x) = (x+1)^m U_n(x)$$

și

$$U_n(x) = U_n(x, \underbrace{-1, \dots, -1}_m, \underbrace{1, \dots, 1}_r),$$

$$G_n = G_n(\underbrace{-1, \dots, -1}_m, \underbrace{1, \dots, 1}_r).$$

Conform formulei (26), restul formulei de cuadratură (31) are expresia

$$(34) \quad \varrho[f] = \frac{f^{(2n+m+r)}(\xi)}{(2n+m+r)!} \int_{-1}^{+1} \tilde{U}_n^2(x) (x+1)^m (x-1)^r dx.$$

12. Folosind formulele precedente, vom construi, în cazul nodurilor fixe și multiple $a_1 = -1$, $a_2 = +1$, formule de cuadratură explicite de diverse grade de exactitate.

1°. Să presupunem că $w(x) = 1 - x^2$. Avem

$$(1-x^2) U_n(x) = P_n(x) - P_{n+2}(x).$$

Dacă $n=1$, avem nodul fundamental $x_1=0$ și nodurile fixe $a_1=-1$, $a_2=+1$. Formula de cuadratură corespunzătoare este formula lui Cavalieri-Simpson:

$$(35) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{3} \left[f(-1) + 4f(0) + f(1) \right] - \frac{1}{90} f^{(IV)}(\xi).$$

Dacă $n=2$, se obțin nodurile fundamentale

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

și se găsește formula de cuadratură de grad de exactitate 5

$$(36) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{6} \left[f(-1) + 5f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 5f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + f(1) \right] - \frac{2}{23625} f^{(VI)}(\xi).$$

În cazul $n=3$, se obține formula de cuadratură de grad de exactitate 7 care se datorește lui Ș. E. Mikela dze [7]:

$$(37) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{90} \left[9f(-1) + 49f\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + 64f(0) + 49f\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + 9f(1) \right] - \frac{1}{2778300} f^{(8)}(\xi).$$

Dacă se consideră cazul $n=5$, se obțin nodurile fundamentale

$$-x_1 = x_5 = \sqrt{\frac{15+2\sqrt{15}}{33}}, x_3 = 0, -x_2 = x_4 = \sqrt{\frac{15-2\sqrt{15}}{33}},$$

care, împreună cu nodurile fixate înainte $a_1 = -1$, $a_2 = +1$, ne conduc la o formulă de cuadratură cu 7 noduri, de grad de exactitate 11.

2°. Să presupunem acum că

$$(38) \quad w(x) = (x^2 - 1)^2.$$

În acest caz, nodurile fundamentale și nodurile fixe duble $a_1 = -1$, $a_2 = +1$, sînt rădăcinile ecuației

$$(2n+3)P_{n+4}(x) - 2(2n+5)P_{n+2}(x) + (2n+7)P_n(x) = 0.$$

În cazul $n=1$, avem nodul fundamental $x_1=0$, care, împreună cu nodurile fixe, ne conduce la formula de cuadratură

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{15} \left\{ 16f(0) + 7[f(-1) + f(1)] + f'(-1) - f'(1) \right\} + \frac{1}{4725} f^{(VI)}(\xi)$$

Lui $n=2$, îi corespunde formula

$$(39) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{135} \left\{ 37[f(-1) + f(1)] + 3[f'(-1) - f'(1)] + 98 \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \right] \right\} + \frac{1}{1389150} f^{(8)}(\xi).$$

Să mai dăm și formula de cuadratură, care corespunde lui $n=3$ și care are gradul de exactitate egal cu 9,

$$(40) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{105} \left[19f(-1) + f'(-1) + 54f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 64f(0) + 54f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - f'(1) + 19f(1) \right] + \frac{1}{589396500} f^{(10)}(\xi).$$

3°. Să arătăm cum se deduce expresia lui $U_n(x)$ în cazul

$$(42) \quad w(x) = (1-x^2)^3.$$

Pe baza formulei (11), avem

$$(43) \quad U_n(x) = \frac{1}{(1-x^2)^3} \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+2}(x) & P_{n+4}(x) & P_{n+6}(x) \\ P_n(1) & P_{n+2}(1) & P_{n+4}(1) & P_{n+6}(1) \\ P'_n(1) & P'_{n+2}(1) & P'_{n+4}(1) & P'_{n+6}(1) \\ P''_n(1) & P''_{n+2}(1) & P''_{n+4}(1) & P''_{n+6}(1) \end{vmatrix}$$

Se știe că $P_n(1) = 1$. Fără greutate se arată că avem

$$P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, P''_n(1) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}.$$

Ținând seama de acestea, se obține următoarea formulă

$$(44) \quad (1-x^2)^3 U_n(x) = (2n+7)(2n+9)(2n+11)P_n(x) - 3(2n+5)(2n+7)(2n+11)P_{n+2}(x) + 3(2n+3)(2n+7)(2n+9)P_{n+4}(x) - (2n+3)(2n+5)(2n+7)P_{n+6}(x).$$

Cazului $n=1$, îi corespunde formula de cuadratură

$$(45) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{105} \left\{ 57[f(-1) + f(1)] + 12[f'(-1) - f'(1)] + f''(-1) + f''(1) + 96f(0) \right\} - \frac{1}{396900} f^{(8)}(\xi),$$

iar cazului $n=2$

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{3360} \left\{ 1173[f(-1) + f(1)] + 156[f'(-1) - 156f'(1)] + 8[f''(-1) + f''(1)] + 2187 \left[f\left(-\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \right] \right\} - \frac{2}{442047375} f^{(10)}(\xi).$$

Dacă $n=3$, se obțin nodurile fundamentale

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{11}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{11}};$$

formula de cuadratură, care corespunde, va avea gradul de exactitate 11.

4°. Și, în sfârșit, să mai considerăm cazul

$$(47) \quad w(x) = (1+x)(1-x)^2,$$

căruia îi corespunde polinomul

$$(1+x)(1-x)^2 U_n(x) = 2(-1)^{n+1} \{ (2n+5)[P_n(x) - P_{n+2}(x)] - (2n+3)[P_{n+1}(x) - P_{n+3}(x)] \}.$$

Lui $n=1$, îi corespunde nodul fundamental $x_1 = -\frac{1}{5}$ și formula de cuadratură de grad de exactitate 4

$$(48) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{108} \left[27f(-1) + 125f\left(-\frac{1}{5}\right) + 64f(1) - 12f'(1) \right] + \frac{2}{1125} f^{(V)}(\xi).$$

13. Să presupunem acum că

$$(49) \quad w(x) = (x-a)^{2s},$$

unde a e un număr real oarecare.

Formula generală de cuadratură (10) se reduce, în acest caz, la următoarea

$$(50) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + \sum_{j=0}^{2s-1} B_j f^{(j)}(a) + \varrho[f],$$

unde

$$\varrho[f] = \frac{f^{(2n+2s)}(\xi)}{(2n+2s)!} \int_{-1}^{+1} \tilde{U}_n^2(x) (x-a)^{2s} dx,$$

iar dacă nici un nod fundamental nu coincide cu a , coeficienții au expresiile

$$A_i = \frac{1}{4^s n \binom{2n-1}{n}} \cdot \frac{G_n^2}{(x_i-a)^{2s} U'_n(x_i) U_{n-1}(x_i)},$$

$$B_j = \int_{-1}^{+1} l(x) dx, \quad l(x) = \frac{(x-a)^j}{j!} \left[\sum_{k=0}^{2s-j-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \left(\frac{1}{U_n(x)} \right)_{x=a}^{(k)} \right] U_n(x),$$

unde

$$U_n(x) = U_n(x, \underbrace{a, a, \dots, a}_{2s}), \quad G_n = G_n(\underbrace{a, a, \dots, a}_{2s}).$$

Dacă se întâmplă ca un nod fundamental să coincidă cu a , atunci pentru a obține formula de cuadratură corespunzătoare, trebuie să se

integreze formula de interpolare a lui Lagrange-Hermite, relativă la $f(x)$ și la toate nodurile care intervin.

14. E interesant de remarcat că în cazul $\alpha = 0$, adică $w(x) = x^{2s}$, se obțin formule de cuadratură de tip Gauss generalizate, adică formule de cuadratură de grad de exactitate cel puțin $2N-1$, unde N este numărul termenilor formulei, indiferent dacă aceștia conțin valorile pe anumite noduri ale funcției de integrat sau ale funcției de integrat și ale derivatelor de anumite ordine ale acesteia [10].

Exemple. 1° Să presupunem că $s=1$, deci că $w(x) = x^2$. Dacă $n=2m-1$, avem

$$x^2 U_{2m-1}(x) = \frac{[(2m)!]^2}{2^{4m} [m!]^4} [(2m+1) P_{2m-1}(x) + 2m P_{2m+1}(x)].$$

În cazul $m=1$, avem nodul fundamental $x_1=0$ și formula de cuadratură

$$(51) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = 2f(0) + \frac{1}{3} f''(0) + \frac{1}{60} f^{IV}(\xi).$$

Dacă $m=2$, se obține o formulă de cuadratură, care se datorește Prof. T. Popoviciu [8]

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{375} \left[456 f(0) + 20 f''(0) + 147 f\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + 147 f\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right) \right] + \frac{1}{2222640} f^{(8)}(\xi).$$

Considerind încă cazul $m=3$, se obțin nodurile fundamentale

$$-x_1 = x_3 = \sqrt{\frac{21-2\sqrt{14}}{33}}, \quad -x_2 = x_4 = \sqrt{\frac{21+2\sqrt{14}}{33}}, \quad x_5 = 0$$

și formula de cuadratură cu 6 termeni, care are gradul de exactitate 11:

$$(52) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{514500} [440832 f(0) + 8960 f''(0) + 27(5446 - 537\sqrt{14})(f(x_3) + f(x_4)) + 27(5446 + 537\sqrt{14})(f(x_1) + f(x_2))] + \frac{1}{476804928600} f^{(12)}(\xi).$$

2°. În cazul $s=1$ și $n=2m$, se găsește că, în afară de un factor constant, $U_{2m}(x)$ este egal cu $P_{2m+1}(x)/x$. Rezultă că, în acest caz, se

obțin formulele clasice de cuadratură ale lui Gauss, cu numere impare de termeni. Într-adevăr, formulele de cuadratură, corespunzătoare acestui caz, folosesc ca noduri fundamentale rădăcinile polinomului lui Legendre $P_{2m+1}(x)$, dintre care se exclude rădăcina $x=0$; dar în acest caz, avem și nodul fix dublu $a_1=0$. Deci, pentru a obține nodurile, revine la a lua rădăcinile lui $P_{2m+1}(x)$ și a dubla rădăcina $x=0$ a acestuia. Dar am arătat recent [9] că, dacă se dublează un număr oarecare de noduri fundamentale, vor dispărea termenii, care conțin derivatele în acele noduri.

3°. Dacă $s=2$ și $n=2m-1$, se găsește că, afară de un factor constant, avem

$$x^4 U_{2m-1}(x) = 4m(m+1)(4m+1) P_{2m+3}(x) + 4m(2m+3)(4m+3) P_{2m+1}(x) + (2m+1)(2m+3)(4m+5) P_{2m-1}(x).$$

Lui $m=1$, îi corespunde nodul fundamental $x_1=0$ și formula de cuadratură

$$(53) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = 2f(0) + \frac{1}{3} f''(0) + \frac{1}{60} f^{(IV)}(0) + \frac{1}{2520} f^{(VI)}(\xi);$$

iar lui $m=2$, îi corespunde formula de cuadratură cu 5 termeni și de grad de exactitate 9

$$(54) \quad \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{36015} \left\{ 50160 f(0) + 3500 f''(0) + 49 f^{(IV)}(0) + 10935 \left[f\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right) \right] \right\} + \frac{1}{404157600} f^{(10)}(\xi).$$

Dacă $m=3$, se obțin nodurile fundamentale

$$-x_1 = x_3 = \sqrt{\frac{99-6\sqrt{22}}{143}}, \quad -x_2 = x_4 = \sqrt{\frac{99+6\sqrt{22}}{143}}, \quad x_5 = 0,$$

care, împreună cu nodul fix $a_1=0$, multiplu de ordinul 4, ne conduce la o formulă de cuadratură cu 7 termeni și de grad de exactitate 13, formulă pe care nu o mai dăm explicit aici.

15. Într-o lucrare viitoare vom face un studiu detaliat al acestor formule de cuadratură de grad maxim de exactitate, generalizând totodată rezultatele pe care le-am expus în această lucrare.

ОБОБЩЕНИЕ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ГАУССА-КРИСТОФФЕЛИЯ

Краткое содержание

Интегрируя интерполяционную формулу Лагранжа-Хермита [5] относящуюся к функции $f(x)$ и к корням полиномов из (2), получалась квадратурная формула (7). Предполагая что корни полинома $w(x)$ избраны на реальной оси, таким образом чтобы этот полином был бы неотрицательный в $(-1, +1)$, автор доказывает следующую теорему:

Необходимое и удовлетворительное условие чтобы в квадратурной формуле (7), где $k=n$, иметь $B_i=0$ ($i=1, n$), независимо от параметров $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, является чтобы $x_1, x_2, \dots, x_n$ были бы реальные и отделимые корни n , включение в $(-1, +1)$ полинома (8), где $P_n(x)$ является полином Лежандра [9]. Таким образом была достигнута квадратурная формула (10), которая имеет степень точности $2n+p-1$, где $p=r_1+r_2+\dots+r_s$, а r_i является степенью множественности неподвижного узла a_i . Величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ были названы автором основные узлы квадратурной формулы (10). Для коэффициентов A_2 , были даны выражения (12), (13) и (25), а для остальных коэффициентов были даны формулы (16). Основные узлы x_i являясь корнями полинома (8), ортогонально относительно к $(-1, +1)$ и к равновесию $w(x)$, все эти коэффициенты могут быть выражены независимо от параметров $\gamma_1, \dots, \gamma_2$ ($k \leq n$).

Счита предельный случай $v(x) = \tilde{U}_n(x) = \frac{1}{c_n} U_n(x)$, где c_n является коэффициентом x^n из $U_n(x)$, находилось для остатка квадратурной формулы (10), выражение (26).

В частном случае $r_1 = \dots = r_s = 1$, формула (10) сводится к квадратурной формуле Кристоффеля [2], исключая выражение остатка, которым он не занимался. Если $p=0$, формула (10) сводится к формуле (27) Гаусса, с выражением (29) остатка, который принадлежит А. Маркову [5].

Предполагая что $w(x)$ имеет форму (30), то-есть употребляя неподвижные и множественные узлы $a_1 = -1, a_2 = +1$, автор представил в ясной форме, под № 12, множество квадратурных формул с точностью высокой степени. В случае $w(x) = x^{2s}$, получены обобщенные формулы типа Гаусса, то-есть квадратурные формулы степень точности которых самое меньше $2N-1$, где N является числом членов формулы независимо от того содержат-ли эти члены величины на определенных узлах интегрирующей функции, или этой функции и производных определенных ее степеней. В случаях $w(x) = x^2$ и $w(x) = x^4$ построено множество примеров. Отмечается формула (54), с 5-ю членами 9-й степени точности, а также и формула с 6-ю членами (52) 11-й степени точности.

Для всех рассмотренных формул автор дал и точное выражение остатка.

LA GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DE QUADRATURE DE GAUSS-CHRISTOFFEL

Résumé

En intégrant la formule d'interpolation (5) de Lagrange-Hermite, relative à la fonction $f(x)$ et aux racines des polynômes (2), on a obtenu la formule de quadrature (7). Les racines du polynôme $w(x)$ étant supposées choisies sur l'axe réel de manière que ce polynôme soit non négatif dans l'intervalle $(-1, +1)$, l'auteur a démontré le théorème suivant:

Afin que dans la formule de quadrature (7), où $k=n$, ont ait $B_i=0$ ($i=1, n$) quels que soient les paramètres $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, il est nécessaire et suffisant que $x_1, \dots, x_n$ soient les n racines réelles, distinctes et comprises dans l'intervalle $(-1, +1)$ du polynôme (8), où $P_n(x)$ représente le polynôme de Legendre (9). On a abouti ainsi à la formule de quadrature (10), qui possède le degré d'exactitude $2n+p-1$, où $p=r_1+r_2+\dots+r_s$, r_i étant l'ordre de multiplicité du noeud fixe a_i . Dans cette formule, les coefficients A_i ont les expressions (12), (13), (25) et les coefficients $C_{i,j}$ l'expression (16). Les „noeuds fondamentaux“ x_i étant les racines du polynôme (8), orthogonal relativement à l'intervalle $(-1, +1)$ et au poids $w(x)$, tous les coefficients précédents ont pu être exprimés indépendamment des paramètres $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ ($k \leq n$). En considérant le cas limite $v(x) = \tilde{U}_n(x) = \frac{1}{c_n} U_n(x)$, où c_n est le coefficient de x^n dans $U_n(x)$, on a trouvé pour le reste de la formule de quadrature (10) l'expression (26).

Dans le cas particulier $r_1 = \dots = r_s = 1$, la formule (10) se réduit à la formule de quadrature de Christoffel [2] sauf l'expression du reste, dont ce géomètre ne s'est point occupé. Pour $p=0$ la formule (10) se réduit à la formule (27) de Gauss, et on a l'expression (29) du reste, due à A. Markoff [5].

En supposant que $w(x)$ ait la forme (30), c'est-à-dire en prenant les noeuds fixes et multiples $a_1 = -1, a_2 = +1$, l'auteur a donné (au no. 12) sous forme explicite, plusieurs formules de quadrature possédant un haut degré d'exactitude. Dans le cas $w(x) = x^{2s}$ on a obtenu des formules du type Gauss (généralisées), c'est-à-dire des formules de quadrature de degré d'exactitude au moins égal à $2N-1$, où N représente le nombre des termes de la formule, ces termes pouvant contenir indifféremment les valeurs aux noeuds de la fonction à intégrer ou bien de celle-ci et de certaines de ses dérivées. Pour les cas $w(x) = x^2$ et $w(x) = x^4$, on a construit plusieurs exemples. À remarquer la formule (54) à 5 termes, de degré d'exactitude 9, et la formule (52) à 6 termes, de degré d'exactitude 11. Pour toutes les formules de quadrature considérées on a aussi donné l'expression exacte du reste.

B I B L I O G R A F I E

1. Gauss C. F., *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (1814). Werke, Vol. 3, pp. 163—196.
 2. Christoffel E. B., *Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben*. Journ. f. reine u. angew. Math. vol. 55, 1858, pp. 61—82.
 3. Szegő G., *Über die Entwicklung einiger analytischen Funktionen nach den Polynomen eines Orthogonalsystems*. Math. Ann. vol. 82, 1921, pp. 188—212.
 4. Szegő G., *Orthogonal polynomials*. Amer. Math. Soc. Colloq. Public., vol. 23, 1939, p. 29.
 5. Markoff A., *Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales*. Math. Ann., vol. 25, 1885, pp. 427—432.
 6. Ionescu D. V., *Cîteva formule de cuadratură mecanică*. Studii și Cercet. Șt. Cluj, vol. 2, nr. 3—4, 1951, pp. 1—22.
 7. Микеладзе Ш. Е., *численные методы математического анализа*, Москва, 1953, p. 357.
 8. Popoviciu T., *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*. Studii și Cercet. Șt. Iași, vol. 6, nr. 1—2, 1955, pp. 29—57.
 9. Stancu D. D., *Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcțiile de mai multe variabile și unele considerații asupra formulei de integrare numerică a lui Gauss*. Bul. Științ. Acad. R. P. R., Secț. Șt. Mat. Fiz., vol. 9, nr. 2, 1957 (sub tipar).
 10. Stancu D. D., *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate*. Com. Acad. R. P. R., vol. 7, 1957 (sub tipar).
-