

E-3718/1

Kolh

COMUNICĂRILE

ACADEMIEI

REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

Nr. 8

TOMUL VIII

1958

EXTRAS



EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REZOLVAREA PROBLEMEI LUI NEUMANN ÎN CAZUL DOMENIULUI MULTIPLU CONEX MĂRGINIT DE UN NUMĂR FINIT DE SFERE

DE
CAROL KALIK

*Comunicare prezentată în cadrul celui de-al IV-lea Congres al matematicienilor români
din 27 mai — 4 iunie 1956*

1. G. N. Goluzin [1] a dat o metodă de rezolvare pentru problema lui Dirichlet în cazul unui domeniu mărginit de un număr finit de sfere. Această metodă poate fi considerată ca o generalizare a metodei alternate a lui H. A. Schwarz pentru rezolvarea problemei lui Dirichlet. Cu generalizarea metodei lui H. A. Schwarz s-au mai ocupat S. L. Sobolev, S. G. Mihlin și alții.

Autorul lucrării de față a arătat că în cazul domeniului biconex, indiferent de dimensiunile spațiului considerat, problemele la limită de tip Dirichlet sau Neumann pot fi rezolvate cu ajutorul metodei generalizate a lui H. A. Schwarz în cazul ecuațiilor sau sistemelor de ecuații strict eliptice [2]*). Totodată s-a constatat că aceste probleme în cazul domeniilor cu conexitate mai mare decât 2 reprezintă dificultăți considerabile față de cazul domeniului biconex.

În lucrarea de față vom arăta că metoda generalizată a lui H. A. Schwarz este aplicabilă și la rezolvarea problemei la limită a lui Neumann în cazul domeniului multiplu conex mărginit de un număr finit de sfere, așezate la distanțe suficient de mari una de alta.

2. Pentru a simplifica demonstrațiile considerăm cazul domeniului mărginit de trei sfere. Cazurile mai generale nu reprezintă nici o dificultate principială față de acest caz.

*) În cazul ecuației de gradul 2 condiția de strictă elipticitate coincide cu condiția de elipticitate obișnuită.

Fie S_1, S_2, S_3 trei sfere respectiv de raze R_1, R_2, R_3 , și Ω_i domeniul interior, iar Ω'_i domeniul exterior al sferei S_i ($i = 1, 2, 3$). Presupunem că sferele S_i sînt așezate la distanțe suficient de mari una de alta.

Domeniul în care vom căuta soluția problemei la limită va fi intersecția domeniilor $\Omega'_1, \Omega'_2, \Omega'_3$ pe care o notăm cu $\Omega = \Omega'_1 \cap \Omega'_2 \cap \Omega'_3$.

Formulăm problema propusă. În domeniul Ω se caută funcția $u(P)$ care satisface condițiilor

$$\Delta u = 0 \text{ în } \Omega$$

și

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{S_i} = \psi \Big|_{S_i}.$$

Pentru a ușura expunerea vom presupune că funcția ψ este dată în spațiul întreg, că admite toate derivatele parțiale generalizate de ordinul întâi și că acestea sînt de pătrat integrabile [3]. Am notat cu ν direcția normalei exterioare.

În conformitate cu metoda generalizată a lui H. A. Schwarz vom presupune că putem rezolva relativ ușor problema lui Neumann separat pentru fiecare domeniu Ω'_i .

Problema propusă în mod formal se rezolvă în modul următor.

Ca prim pas de aproximare a funcției căutate determinăm aproximațiile de ordinul zero, $u_{0,i}$, care satisfac ecuația

$$\Delta u_{0,i} = 0 \text{ în } \Omega'_i$$

și

$$\frac{\partial u_{0,i}}{\partial \nu} \Big|_{S_i} = \psi \Big|_{S_i}.$$

Cu ajutorul acestor aproximații construim aproximațiile de ordinul întâi, $u_{1,i}$, care satisfac ecuația

$$\Delta u_{1,i} = 0 \text{ în } \Omega'_i$$

și

$$\frac{\partial u_{1,i}}{\partial \nu} \Big|_{S_i} = \frac{\partial}{\partial \nu} (u_{0,j} + u_{0,k}) \Big|_{S_i},$$

unde $i, j, k = 1, 2, 3$ și $i \neq j \neq k$.

În general, aproximațiile $u_{n,i}$ de ordinul n se construiesc cu ajutorul aproximațiilor de ordinul $n-1$, întrebuițind condițiile

$$\Delta u_{n,i} = 0 \text{ în } \Omega'_i$$

și

$$\frac{\partial u_{n,i}}{\partial \nu} \Big|_{S_i} = \frac{\partial}{\partial \nu} (u_{n-1,j} + u_{n-1,k}) \Big|_{S_i}$$

unde indicii au semnificația de mai sus.

Soluția problemei va fi exprimată prin seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (u_{n,1} + u_{n,2} + u_{n,3}). \quad (A)$$

Vom considera $u_{0,i} = \psi$ și $u_{n,i} = u_{n-1,j} + u_{n-1,k}$ în Ω'_i . Ca urmare, termenii seriei (A) sînt determinați în tot spațiul tridimensional. Ei sînt funcții armonice în domeniile Ω'_i și Ω_i . De asemenea, se poate afirma [3] că în aceste domenii termenii seriei (A) au toate derivatele parțiale generalizate de ordinul întâi de pătrat integrabile.

În cele ce urmează vom demonstra că seria (A) converge uniform în orice subdomeniu finit al lui Ω , iar funcția limită este chiar soluția problemei propuse la punctul 2. În prealabil, vom demonstra două leme.

Vom folosi notațiile prescurtate

$$[v, w]_G = \int_G (\text{grad } v \cdot \text{grad } w) d\tau, \quad ([v, v]_G = \|v\|_G^2)$$

unde G reprezintă un domeniu oarecare.

3. Trecem la stabilirea acestor leme. Considerăm două sfere γ_1 și γ_2 de raze r_1 și r_2 . Fie G_1 și G_2 domeniile interioare acestor sfere, iar G'_1 și G'_2 cele exterioare. Fie γ sfera concentrică cu γ_1 și tangentă exterior sferei γ_2 . Notăm cu d raza, iar cu M domeniul exterior al sferei γ .

Lema 1. Fie dată funcția armonică $v(P)$ în domeniul G'_1 . Presupunem că $v(P)$ este funcție continuă împreună cu derivatele sale parțiale de ordinul întâi în $G'_1 + \gamma_1$, și aceste derivate sînt de pătrat integrabile în G'_1 . În afară de acestea fie îndeplinită egalitatea $\int_{\gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = 0$. În aceste condiții are loc următoarea inegalitate

$$\|v\|_{G_2} \leq \mu \|v\|_{G'_1},$$

unde $\mu^2 = \left(\frac{r_1}{d}\right)^3$.

Pentru demonstrarea acestei leme vom întrebuița funcțiile sferice exterioare față de γ_1 și γ , pe care le notăm cu $S_{n,t}$ și $\tilde{S}_{n,t}$, unde $n = 0, 1, 2, \dots$, iar $t = 0, 1, \dots, 2n$.

Normăm funcțiile $S_{n,t}$ și $\tilde{S}_{n,t}$ folosind formulele

$$[S_{n,t}, S_{m,k}]_{G'_1} = \delta_{n,m} \cdot \delta_{t,k},$$

$$[S_{n,t}, S_{m,k}]_M = \delta_{n,m} \cdot \delta_{t,k},$$

unde $\delta_{n,m}$ și $\delta_{t,k}$ sînt simbolurile lui Kronecker.

Aplicînd formula lui Green, obținem

$$1 = \|S_{n,t}\|_{G'_1}^2 = - \int_{\gamma_1} \frac{\partial S_{n,t}}{\partial \nu} S_{n,t} ds = \frac{n+1}{r_1^{2n+1}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{n,t}^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$1 = \|\tilde{S}_{n,t}\|_M^2 = - \int_\gamma \frac{\partial \tilde{S}_{n,t}}{\partial \nu} \tilde{S}_{n,t} ds = \frac{n+1}{d^{2n+1}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{n,t}^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

ceea ce ne arată că funcțiile normate $S_{n,t}$ și $\tilde{S}_{n,t}$ se pot scrie sub forma

$$S_{n,t} = \frac{1}{\sqrt{r_1(n+1)}} \left(\frac{r_1}{\rho}\right)^{n+1} Y_{n,t}(\theta, \varphi), \quad (2.1)$$

$$\tilde{S}_{n,t} = \frac{1}{\sqrt{d(n+1)}} \left(\frac{d}{\rho}\right)^{n+1} Y_{n,t}(\theta, \varphi). \quad (2.1')$$

Ipotezele făcute asupra funcției $v(P)$ ne permit următoarele dezvoltări în serii:

$$v(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{2n} c_{n,t} S_{n,t} \text{ în } G'_1, \quad (2.2)$$

$$v(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{2n} \tilde{c}_{n,t} \tilde{S}_{n,t} \text{ în } M, \quad (2.2')$$

unde

$$c_{n,t} = [v, S_{n,t}]_{G'_1} \text{ și } \tilde{c}_{n,t} = [v, \tilde{S}_{n,t}]_M.$$

Este ușor de văzut că $c_{0,0} = \tilde{c}_{0,0} = 0$. Într-adevăr,

$$c_{0,0} = [v, S_{0,0}]_{G'_1} = - \int_{\gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} S_{0,0} ds = \frac{k}{r_1} \int_{\gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds$$

și

$$\tilde{c}_{0,0} = [v, \tilde{S}_{0,0}]_M = - \int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} \tilde{S}_{0,0} ds = \frac{\tilde{k}}{d} \int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds,$$

unde $k, \tilde{k}$ sînt niște constante. Dar condiția lemei impune ca $\int_{\gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = 0$, din care rezultă $c_{0,0} = \tilde{c}_{0,0} = 0$.

Ne putem convinge ușor de valabilitatea următoarelor egalități:

$$\|v\|_{G'_1}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{2n} c_{n,t}^2, \quad (2.3)$$

$$\|v\|_M^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{2n} \tilde{c}_{n,t}^2. \quad (2.3')$$

Acuma sîntem în măsură de a demonstra afirmația lemei.

Cu ajutorul expresiei (2.1) și (2.1') seriile (2.2) și (2.2') se pot scrie astfel

$$v(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{2n} c_{n,t} \frac{1}{\sqrt{r_1(n+1)}} \left(\frac{r_1}{\rho}\right)^{n+1} Y_{n,t}(\theta, \varphi) \text{ în } G'_1,$$

$$v(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{2n} \tilde{c}_{n,t} \frac{1}{\sqrt{d(n+1)}} \left(\frac{d}{\rho}\right)^{n+1} Y_{n,t}(\theta, \varphi) \text{ în } M.$$

În domeniul M aceste două serii definesc aceeași funcție, deci coeficienții corespunzători trebuie să coincidă. Avem

$$c_{n,t} \frac{1}{\sqrt{r_1(n+1)}} r_1^{n+1} = \tilde{c}_{n,t} \frac{1}{\sqrt{d(n+1)}} d^{n+1},$$

adică

$$\tilde{c}_{n,t}^2 = \left(\frac{r_1}{d}\right)^{2n+1} c_{n,t}^2.$$

Din (2.3) și (2.3') urmează

$$\|v\|_{G'_2}^2 \leq \|v\|_M^2 = \left(\frac{r_1}{d}\right)^3 \|v\|_{G'_1}^2.$$

Astfel lema 1 este demonstrată.

Trecem la formularea și demonstrarea lemei 2.

Considerăm sfera γ de rază r . Fie G domeniul interior, iar G' cel exterior față de γ .

L e m a 2. Considerăm funcția armonică $v(P)$ dată în domeniul G și funcția armonică $w(P)$ în domeniul G' . Presupunem că aceste funcții satisfac următoarele condiții:

a) $v(P)$ și $w(P)$ sînt continue și au toate derivatele parțiale de ordinul întâi continue în $G + \gamma$, respectiv $G' + \gamma$;

b) toate derivatele de ordinul întâi sînt de pătrat integrabile în domeniile respective;

$$c) \quad \left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_{\gamma} = \left. \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|_{\gamma}.$$

În ipoteza acestor condiții avem următoarea inegalitate:

$$\|w\|_{G'} \leq \|v\|_G.$$

Pentru demonstrarea acestei leme folosim funcțiile sferice exterioare $S_{n,t}$ și interioare $P_{n,t}$, față de sfera γ .

Normăm pe $S_{n,t}$ și $P_{n,t}$ impunînd condițiile

$$[S_{n,t}, S_{m,k}]_{G'} = \delta_{n,m} \cdot \delta_{t,k},$$

$$[P_{n,t}, P_{m,k}]_G = \delta_{n,m} \cdot \delta_{t,k}.$$

La fel ca și în cazul lemei 1, după calcule simple, găsim

$$S_{n,t} = \frac{1}{\sqrt{r(n+1)}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+1} Y_{n,t}(\theta, \varphi)$$

și

$$P_{n,t} = \frac{1}{\sqrt{n.r}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n Y_{n,t}(\theta, \varphi).$$

O directă consecință a condiției c) din lema 2 este $\int_Y \frac{\partial w}{\partial \nu} ds = \int_Y \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = 0$, iar funcțiile v și w se pot dezvolta în serii:

$$v(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{2n} d_{n,t} P_{n,t} \quad \text{în } G,$$

$$w(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{2n} c_{n,t} S_{n,t} \quad \text{în } G',$$

unde

$$d_{n,t} = [v, P_{n,t}]_G, \quad c_{n,t} = [w, S_{n,t}]_{G'}.$$

De asemenea, se pot verifica ușor egalitățile

$$\|v\|_G^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{2n} d_{n,t}^2, \quad (2.4)$$

$$\|w\|_{G'}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{2n} c_{n,t}^2. \quad (2.4')$$

În sfârșit, demonstrăm enunțul lemei,

$$c_{n,t} = [w, S_{n,t}]_{G'} = - \int_Y \frac{\partial w}{\partial \nu} S_{n,t} ds = - \frac{1}{\sqrt{r(n+1)}} \int_Y \frac{\partial w}{\partial \nu} Y_{n,t} ds,$$

$$d_{n,t} = [v, P_{n,t}]_G = \int_Y \frac{\partial v}{\partial \nu} P_{n,t} ds = \frac{1}{\sqrt{r(n+1)}} \int_Y \frac{\partial v}{\partial \nu} Y_{n,t} ds.$$

Dar condiția c) a lemei impune ca $\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_Y = \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_Y$, deci pentru coeficienții corespunzători avem $-\frac{c_{n,t}}{d_{n,t}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

Urmează

$$c_{n,t}^2 \leq d_{n,t}^2.$$

Comparând aceste inegalități cu (2.4) și (2.4') obținem inegalitatea căutată.

4. Teoremă. Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (u_{n,1} + u_{n,2} + u_{n,3}) \quad (A)$$

compusă din aproximațiile construite conform metodei generalizate a lui Schwarz, converge uniform în orice subdomeniu finit al lui Ω către soluția problemei propuse la punctul 2, dacă

$$\left(\frac{R}{d}\right)^3 = \mu^2 < \frac{1}{2},$$

unde $R = \max \{R_1, R_2, R_3\}$, $d = \min_{i,k=1,2,3} \{d_{ik}\}$, $i \neq k$, iar d_{ik} este distanța de la centrul sferei S_i pînă la suprafața sferei S_k .

Înainte de a trece la demonstrarea teoremei remarcăm faptul că termenii seriei începînd de la $n=1$ îndeplinesc condițiile lemelor. Acest lucru este ușor de văzut.

Pentru a demonstra teorema, aproximăm din aproape în aproape termenii seriei (A).

Fie

$$\max_{j=1,2,3} \{\|u_{1,j}\|_{\Omega'_j}\} = N. \quad (3.1)$$

Din determinarea funcției $u_{2,i}$, urmează

$$u_{2,i} = u_{1,i} + u_{1,k} \quad \text{în } \Omega_i,$$

unde $i, j, k = 1, 2, 3$ și $i \neq j \neq k$. Deci $\|u_{2,i}\|_{\Omega_i} \leq \|u_{1,i}\|_{\Omega_i} + \|u_{1,k}\|_{\Omega_i}$. Aplicînd lema 1 funcției $u_{1,i}$ și $u_{1,k}$ obținem

$$\|u_{1,i}\|_{\Omega_i} \leq \mu \|u_{1,i}\|_{\Omega'_j}; \quad \|u_{1,k}\|_{\Omega_i} \leq \mu \|u_{1,k}\|_{\Omega'_k}.$$

Din (3.1) urmează $\|u_{2,i}\|_{\Omega_i} \leq 2\mu N$. Aplicăm lema 2 funcției $u_{2,i}$, determinată în spațiul întreg, $\|u_{2,i}\|_{\Omega'_i} \leq \|u_{2,i}\|_{\Omega_i}$. Deci

$$\|u_{2,i}\| = \|u_{2,i}\|_{\Omega_i} + \|u_{2,i}\|_{\Omega'_i} = 2(2\mu)N.$$

În general aproximăm elementele $u_{n,i}$ cu ajutorul aproximațiilor găsite pentru funcțiile $u_{n-1,i}$.

Avem

$$\|u_{n-1,i}\| \leq 2(2\mu)^{n-2}N.$$

În baza construirii efectuate la punctul 2 avem $u_{n,i} = u_{n-1,i} + u_{n-1,k}$ în Ω_i . Deci $\|u_{n,i}\|_{\Omega_i} \leq \|u_{n-1,i}\|_{\Omega_i} + \|u_{n-1,k}\|_{\Omega_i}$. Aplicînd lema 1, găsim $\|u_{n-1,i}\|_{\Omega_i} \leq \mu \|u_{n-1,i}\|_{\Omega'_j}$ și $\|u_{n-1,k}\|_{\Omega_i} \leq \mu \|u_{n-1,k}\|_{\Omega'_k}$. Lema 2 ne dă $\|u_{n,i}\|_{\Omega'_i} \leq \|u_{n,i}\|_{\Omega_i}$.

Din aceste inegalități găsim

$$\|u_{n,i}\| \leq 2(2\mu)^{n-1}N. \quad (3.2)$$

Aplicînd inegalitățile precedente seriei (A) găsim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\|u_{n,1}\| + \|u_{n,2}\| + \|u_{n,3}\|\} \leq 3N \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2\mu)^{n-1}. \quad (3.3)$$

Din inegalitatea (3.2) rezultă convergența uniformă în orice subdomeniu finit al lui Ω'_i a derivatelor parțiale de ordinul întâi $\frac{\partial u_{n,i}}{\partial x_k}$. Într-adevăr, din (3.2) rezultă convergența medie pătrată către zero a fiecărei funcții armonice $\frac{\partial u_{n,i}}{\partial x_r}$ în domeniul Ω'_i . Dar aceasta atrage după sine și convergența uniformă.

Considerăm suma parțială

$$s_p = \sum_{n=0}^p (-1)^n (u_{n,1} + u_{n,2} + u_{n,3}).$$

Pe baza construirii aproximațiilor $u_{n,i}$, avem

$$\frac{\partial s_p}{\partial \nu} \Big|_{S_i} = \psi \Big|_{S_i} + (-1)^p \frac{\partial}{\partial \nu} (u_{p-1,j} + u_{p-1,k}) \Big|_{S_i},$$

unde

$$i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k.$$

Pe baza observației făcute mai înainte, $\frac{\partial u_{p-1,j}}{\partial x_k} \rightarrow 0$ uniform în Ω'_j , când $p \rightarrow \infty$ ($k = 1, 2, 3$). Deci

$$\frac{\partial}{\partial \nu} (u_{p-1,j} + u_{p-1,k}) \Big|_{S_i} \rightarrow 0 \text{ când } p \rightarrow \infty.$$

Vom nota cu $\mathcal{N}(P, Q)$ funcția lui Neumann relativă la domeniul Ω . Cu ajutorul acestei funcții putem scrie

$$s_p = - \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \psi(Q) \mathcal{N}(P, Q) ds_Q + (-1)^p \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial \nu} (u_{p-1,j} + u_{p-1,k}) \mathcal{N}(P, Q) ds_Q.$$

Când $p \rightarrow \infty$, valoarea integralei a doua din membrul al doilea tinde uniform către zero. Deci la limită avem

$$\lim s_p = u = - \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \psi(Q) \mathcal{N}(P, Q) ds_Q,$$

ceea ce ne arată că seria (A) converge uniform în orice subdomeniu interior al lui Ω către soluția problemei propuse.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С ОГРАНИЧЕННЫМ КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СФЕР

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе дается метод решения граничной задачи Неймана в области, ограниченной конечным числом сфер. Этот метод является обобщением хорошо известного алтернирующего метода Шварца.

Для простоты изложения рассматривается случай бесконечной области, ограниченной тремя сферами. Строится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (u_{n,1} + u_{n,2} + u_{n,3}),$$

элементы которого являются решением задачи Неймана в односвязной области. Доказывается, что данный ряд равномерно сходится к решению поставленной задачи.

LA SOLUTION DU PROBLÈME DE NEUMANN DANS LE DOMAINE MULTIPLEMENT CONNEXE, LIMITÉ PAR UN NOMBRE FINI DE SPHÈRES

RÉSUMÉ

Dans ce travail, l'auteur donne une méthode de résolution du problème aux limites de Neumann. Elle représente une généralisation de la méthode alternée de Schwarz.

Pour simplifier la démonstration, on se borne à examiner le domaine infini, limité par trois sphères. On construit la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (u_{n,1} + u_{n,2} + u_{n,3})$$

dont les éléments sont les solutions du problème de Neumann dans des domaines simplement connexes. Il est démontré que la série donnée ci-dessus converge uniformément vers la solution du problème posé.

BIBLIOGRAFIE

1. G. N. GOLUZIN, *Rešenje prostranstvennoi zadaci Dirihlet dlea uravnenia Laplaca i dlea oblasti, ogranichenih konecinim cislom sfer*. Mat. Sbornic, 42, 2.
2. C. KALIK, *K voprosu o shodimosti lagorizmov tipa Schwarz (disertație)*. Leningrad, 1955.
3. S. G. MIHLIN, *Problema minimuma cvadraticinogo funcționala*. Moskva-Leningrad, 1952.