

**ASUPRA PROBLEMEI Nr. 5383 DIN „GAZETA MATEMATICĂ”
DIN ANUL 1940.**

I. MARUSCIAC, Cluj

În „Gazeta Matematică” din anul 1940-41 (vol. 46, p. 237-241), prof. Tiberiu Popoviciu a rezolvat următoarea problemă:

Să se determine polinoamele $P(x)$, astfel ca

$$P^2(x) - P(x-a)P(x+a) = P(x)Q(x),$$

($a \neq 0$) și polinomul $Q(x)$ fiind date.

Problema revine la a determina polinoamele $P(x)$, pentru care produsul $P(x-a)P(x+a)$ se divide cu $P(x)$.

Plecînd de la aceasta, prof. T. Popoviciu a propus (G. M. 1940-41, p. 111) următoarea problemă mai generală:

Fie m și n două numere naturale date. Să se determine polinoamele $P(x)$ (diferite de o constantă), astfel ca produsul $P(x+m)P(x-n)$, să fie divizibil cu $P(x)$. Să se determine minimul gradului acestor polinoame, precum și numărul acestor polinoame de grad g , care verifică proprietatea (și care nu se deduc unul din altul printr-o transformare liniară).

Vom căuta mai întîi polinoamele care satisfac problemei noastre printre polinoamele care au toate rădăcinile reale, adică de forma:

$$P(x) = a_0 \prod_{i=1}^p (x - x_i)^{\alpha_i}.$$

Atunci

$$P(x+m) = a_0 \prod_{i=1}^p (x - x_i + m)^{\alpha_i}.$$

$$P(x-n) = a_0 \prod_{i=1}^p (x - x_i - n)^{\alpha_i}.$$

iar

$$P(x+m)P(x-n) = a_0^2 \prod_{i=1}^p [(x - x_i + m)(x - x_i - n)]^{\alpha_i}.$$

Scriind că produsul $P(x+m)P(x-n)$ este divizibil cu $P(x)$, vom avea

$$(1) \quad a_0^2 \prod_{i=1}^p [(x - x_i + m)(x - x_i - n)]^{\alpha_i} \equiv a_0 \prod_{i=1}^p (x - x_i)^{\alpha_i} Q(x),$$

unde $Q(x)$ este cîtuș împărțirii polinoamelor $P(x+m)P(x-n)$ și $P(x)$.

Dacă dăm lui x din identitatea (1) succesiv valorile $x_1, x_2, \dots, x_p$ (presupusele rădăcini ale polinomului $P(x)$), obținem:

$$(2) \quad \prod_{i=1}^p [(x_k - x_i + m)(x_k - x_i - n)]^{\alpha_i} = 0,$$

pentru $k = 1, 2, \dots, p$.

Să observăm mai întâi că putem simplifica cu factorul $-mn$, deoarece numerele m, n au fost presupuse diferite de zero.

Luând din fiecare ecuație câte un factor și egalându-l cu zero, vom avea următorul sistem de p ecuații cu p necunoscute:

$$x_k - x_{k+1} = -m \text{ sau } n, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Scrim determinantul acestui sistem

$$D = \begin{vmatrix} 1-1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1-1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă egalăm, de exemplu, primele p_1 ecuații cu $-m$, iar ultimele p_2 cu n , ($p_1 + p_2 = p$) și scriind determinantul caracteristic, vom avea:

$$C = \begin{vmatrix} 1-1 & 0 & \dots & \dots & -m \\ 0 & 1-1 & \dots & \dots & -m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-1 & n \\ -1 & 0 & \dots & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Adunând primele $p-1$ linii la ultima, vom avea:

$$C = \begin{vmatrix} 1-1 & 0 & \dots & \dots & -m \\ 0 & 1-1 & \dots & \dots & -m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_2 n - p_1 m \\ 0 & 0 & \dots & p_2 n - p_1 m \end{vmatrix} = p_2 n - m p_1.$$

Anulând determinantul caracteristic, rezultă

$$p_2 n - p_1 m = 0,$$

sau

$$\frac{m}{n} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{l_2}{l_1}$$

unde $(l_1, l_2) = 1$, adică sînt prime între ele.

Pentru aceste valori ale lui p_1, p_2 , respectiv, l_1, l_2 , $C = 0$, și, prin urmare, putem rezolva sistemul (2) în raport cu una din necunoscute, de exemplu, în raport cu x_1 . De aici rezultă o primă concluzie: *Problema admite o infinitate de soluții. Polinoamele căutate vor depinde de un parametru.*

Dacă notăm cu s gradul polinoamului care satisface problemei noastre, se vede imediat că

$$s \geq p = p_1 + p_2 \geq l_1 + l_2,$$

deci gradul minim a polinomului va fi:

$$g = l_1 + l_2 = \frac{m+n}{d},$$

unde d este c. m. c. d. al numerelor m și n .

Pentru a construi efectiv polinoamele, notăm $x_1 = a$ și rezolvăm sistemul (2)

$$(2) \quad \begin{cases} x_2 = a + 2m, \\ x_3 = a + m, \\ \vdots \\ x_{l_1+1} = a + l_1 m, \\ x_{l_1+2} = a + l_1 m - n, \\ \vdots \\ x_{l_1+l_2} = a + l_1 m - (l_2 - 1)n = a + n. \end{cases}$$

Astfel, polinomul de grad minim va fi de forma

$$P(x) = a_0 \prod_{k=0}^{l_1} (x - a - km) \prod_{i=1}^{l_2-1} (x - a - l_1 m + in).$$

Dacă se notează cu

$$P_1(x) = \prod_{k=0}^{l_1} (x - a - km), \quad P_2(x) = a_0 \prod_{i=1}^{l_2-1} (x - a - l_1 m + in),$$

rezultă

$$P(x) = P_1(x) P_2(x).$$

Din forma polinomului $P(x)$ reiese că polinoamele care satisfac problemei sînt produse de două polinoame cu rădăcini în progresie aritmetică cu rația respectiv m și n .

Vom arăta acum că și în cazul general, cînd luăm câte un factor oarecare din fiecare ecuație și-l egalăm cu zero, obținem același polinom de grad minim.

În adevăr, sistemul va fi în acest caz de forma

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 - x_{k_1} = -m \text{ sau } n, \\ x_2 - x_{k_2} = -m \text{ sau } n, \\ \vdots \\ x_j - x_{k_j} = -m \text{ sau } n, \\ \vdots \\ x_p - x_{k_p} = -m \text{ sau } n, \end{cases}$$

Se vede că din moment ce am ales un factor oarecare dintr-o linie, de exemplu, $x_i - x_{k_i} = -m$, aceasta atrage după sine $x_{k_i} - x_i + m \neq 0$. S-ar părea că din fiecare din aceste două posibilități rezultă două sisteme de soluții. În fond, aici nu avem de aface decît cu o diferență de notație, deoarece, dacă determinantul sistemului (3) este nul, sistemul se rezolvă în raport cu una din necunoscute, și în cazul $x_i - x_{k_i} = -m$, notînd $x_i = a$ găsim $x_{k_i} = a + m$, iar dacă $x_{k_i} - x_i = -m$, notînd $x_{k_i} = a$, găsim $x_i = a + m$. Deci cu alte notații ajungem tot la sistemul de rădăcini de mai înainte.

Determinantul sistemului este, de asemenea, nul, pentru că pe fiecare coloană sau linie vom avea toate elementele nule, în afară de

două, dintre care unul este egal cu 1 și celălalt cu -1 , deoarece dacă ar exista două elemente egale cu -1 , am avea în sistem două ecuații de formă

$$\begin{aligned} x_i - x_{k_i} &= -m \text{ sau } n, \\ x_j - x_{k_j} &= -m \text{ sau } n, \end{aligned} \quad i \neq j.$$

Or, prin scădere avem $x_i = x_j$, ceea ce nu se poate, deoarece polinomul de grad minim nu admite rădăcini duble.

Adunând toate liniile determinantului la ultima, obținem toate elementele nule în ultima linie. De aici reiese că determinantul este nul și în acest caz general.

Punind condiția și în acest caz ca determinantul caracteristic să fie nul, găsim aceeași condiție, anume $p_2 m - p_1 n = 0$.

Notînd și aici $x_1 = a$, din prima ecuație din sistemul (3) găsim $x_{k_1} = a + m$. Înlocuind în ecuația $x_{k_1} - x_{k_{k_1}} = -m$ valoarea lui x_{k_1} , găsim $x_{k_{k_1}} = a + 2a$. Procedînd la fel mai departe, se vede că vom găsi aceleași rădăcini ca și în cazul sistemului (2).

Prin aceasta s-a demonstrat că există un singur polinom de grad minim (abstracție făcînd de o transformare liniară efectuată asupra variabilei).

Analizînd acum forma celorlalte polinoame de grad mai mare, se observă în primul rînd că $a_1, a_2, \dots, a_p$ nu pot fi diferite între ele deoarece în (1) factorii egali din cei doi membrii figurează la diferite puteri, adică factorul $(x - x_i)^{\alpha_i}$ corespunde factorului $(x - x_i)^{\alpha_i}$. Rezultă că celelalte polinoame se obțin ridicînd la diferite puteri polinomul de grad minim astfel găsit.

În afară de clasa aceasta de polinoame, mai avem polinoamele care se obțin în același mod ca și polinomul de grad minim, însă luînd un multiplu oarecare de $\left(\frac{l_1}{l_2}\right)$, adică polinoame de grad $M(l_1 + l_2)$, pentru orice M întreg pozitiv.

Astfel toate polinoamele de forma

$$P(x) = P_1(x) P_2(x),$$

unde

$$P_1(x) = a_0 \prod_{k=0}^{Ml_1} (x - a - km)^\alpha, \quad P_2(x) = b_0 \prod_{i=1}^{Ml_2-2} (x - a - Ml_1 m + in)^\alpha$$

verifică condițiile problemei.

Pentru $\alpha = 1, M = 1$, găsim polinomul de grad minim.

Exemplu. Fie $m = 25, n = 15, \frac{m}{n} = \frac{5}{3}, g = l_1 + l_2 = 3 + 5 = 8$,
 $x_1 = a, x_2 = a + 25, x_3 = a + 50, x_4 = a + 75, x_5 = a + 75 - 15 = a + 60$,
 $x_6 = a + 45, x_7 = a + 30, x_8 = a + 15$.

$$P(x) = a_0 \prod_{k=0}^3 (x - (a - k25)) \prod_{i=1}^4 (x - a - 75 + i15).$$

Tot din sistemul (2) se vede că polinomul $P(x)$ căutat nu poate avea rădăcini complexe conjugate, fiindcă dacă ar avea o astfel de pereche de rădăcini, de exemplu x_k, x_{k+1} , atunci în sistemul (2), notînd $x_k = \alpha_k + i\beta_k, x_{k+1} = \alpha_k - i\beta_k$ am avea:

$$\begin{aligned} x_{k-1} - \alpha_k - i\beta_k &= -m \text{ sau } n, \\ \alpha_k + i\beta_k - \alpha_k + i\beta_k &= -m \text{ sau } n, \\ \alpha_k - i\beta_k - x_k &= -m \text{ sau } n, \end{aligned}$$

de unde rezultă imediat că $\beta_k = 0$.

Problema se poate extinde imediat și pentru două numere reale r_1, r_2 oarecare. Însă la anularea determinantului caracteristic ne va apare condiția

$$p_1 r_1 + p_2 r_2 = 0,$$

de unde rezultă (p_1, p_2 fiind două numere întregi pozitive) că r_1, r_2 trebuie să fie de semne contrare și în plus, raportul dintre ele să fie un număr rațional.

La fel s-ar putea considera două numere complexe z_1 și z_2 și polinoame definite pe corpul numerelor complexe, condiția

$$p_1 z_1 + p_2 z_2 = 0$$

arată că raportul celor două numere trebuie să fie un număr real rațional. Din punct de vedere geometric, aceasta înseamnă că imaginile numerelor complexe z_1 și z_2 din planul complex trebuie să fie situate pe o aceeași dreaptă ce trece prin origine, adică să fie omotetice în raport cu originea axelor de coordonate.

S-ar mai putea generaliza problema în felul următor:

Fiind date numerele a, b, c și d , să se determine polinoamele $P(x)$, pentru care produsul $P(ax + b) P(cx + d)$ să fie divizibil cu $P(x)$. Pentru $a = c = 1$ problema se reduce la cea de mai sus.

Se poate vedea din cele de mai sus că în cazul cînd cel puțin unul din numerele a, c este diferit de 1, problema admite o singură soluție minimă, abstracție făcînd de un factor constant, însă e cu mult mai greu de scris efectiv polinomale care satisfac această proprietate.

SUR LE PROBLÈME No. 5383 DE G.M.F. — 1940.

Dans cette note on détermine toutes les polynômes $P(x)$ qui vérifient la relation

$$P(x - a) P(x - b) \equiv P(x) Q(x),$$

pour toutes les nombres réels a et b . Le problème s'étend aussi pour le cas quand a et b sont complexes. On détermine aussi le polynôme de grade minime et on montre que ce polynôme est unique, abstraction fait d'une transformation linéaire.

О ЗАДАЧЕ No. 5383 из G.M.F.-1940

В этой статье определяются все многочлены $P(x)$ которые удовлетворяют соотношению

$$P(x-a) P(x+b) \equiv P(x) Q(x),$$

какие бы не были вещественные данные числа a и b .

Задача распространяется и для случая комплексных a, b . Так же определяется многочлен наименьшей степени и доказывается что этот многочлен единственный, до любого линейного отображения.