

DESPRE REZOLVAREA PROBLEMEI LA LIMITĂ
A LUI NEUMANN

de

C. KALIK și P. SZILÁGYI

În lucrarea de față ne vom ocupa de rezolvarea unor probleme la limită legate de ecuația diferențială liniară de tip eliptic

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - cu = 0 \quad (1)$$

unde funcțiile $a_{ik}(P)$ și $c(P)$ sînt definite pe un domeniu mărginit Ω_1 în spațiul euclidian cu n dimensiuni. $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reprezintă un punct variabil al domeniului Ω_1 . Vom presupune aceste funcții atît de bune [5] încît să fie asigurată existența soluției fundamentale $F(P, Q)$ în sensul lui E. E. L. e v i (vezi [5]). Funcția $c(P)$ să fie nenegativă și să nu se anuleze identic.

Problema la limită principală, studiată aici, va fi problema lui Neumann, pe care o formulăm în mod obișnuit anume, să se găsească funcția $u(P)$ definită într-un domeniu Ω așezat în interiorul lui Ω_1 , care să îndeplinească următoarele condiții: Să satisfacă ecuația (1) în punctele lui Ω , iar pe frontiera Γ a lui Ω să avem

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n, x_i) = f, \quad (2)$$

f — fiind o funcție dată și de patrat integrabilă pe Γ . Pentru valabilitatea celor ce urmează vom presupune că Γ satisface condițiile cunoscute ale lui L. i a p u n o v [3].

Dacă reușim să rezolvăm ecuația funcțională (2), deci să aflăm valorile funcției necunoscute u în punctele suprafeței Γ , atunci aplicînd formula cunoscută a lui Green, găsim valoarea funcției căutate în oricare punct al lui Ω . Din acest motiv, în cele ce urmează ne vom ocupa de rezolvarea ecuației (2). Notăm pe scurt

$$Lu = f \quad (2')$$

$$\text{unde } Lu \equiv \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n, x_i).$$

În prima parte a lucrării vom demonstra că operatorul L considerat pe mulțimea de funcții $U(\Gamma)$ precizată mai jos, este pozitiv definit, adică există o constantă pozitivă γ_1 în așa fel ca să avem inegalitatea

$$\int_{\Gamma} Lu \cdot u \, d\sigma \geq \frac{1}{\gamma_1} \int_{\Gamma} u^2 \, d\sigma$$

pentru fiecare funcție u din mulțimea considerată. În punctul doi al lucrării vom studia aplicabilitatea metodei lui Ritz la rezolvarea ecuației funcționale (2). Tot aici vom face anumite observații referitor la convergența metodei lui Trefftz la rezolvarea problemei lui Dirichlet.

1. Spațiul funcțional de bază, considerat în această lucrare, va fi spațiul lui Hilbert al funcțiilor definite pe Γ și de patrat integrabile. Vom nota acest spațiu cu H . Produsul scalar în H este dat de formula

$$(u, v) = \int_{\Gamma} u \cdot v \, d\sigma$$

Notăm cu $U_0(\Omega)$ mulțimea soluțiilor ecuației (1) care au toate derivatele parțiale de ordinul întâi și doi, continue în $\Omega + \Gamma$. $U_0(\Gamma)$ va nota mulțimea $U_0(\Omega)$ considerată numai pe Γ . Este clar că orice element $u_0(P)$ din mulțimea $U_0(\Omega)$ se poate reprezenta cu ajutorul potențialului de simplu strat

$$u_0(P) = 2 \int_{\Gamma} \varphi_0(Q) F(P, Q) \, d\sigma_Q$$

Funcția $\varphi_0(Q)$ aparține lui H . Menționăm că $\varphi_0(Q)$ satisface condiții și mai restrictive, însă nouă ne este suficient să considerăm această funcție numai ca element din H . Notînd $Lu_0 = f_0$, pe baza proprietății potențialului de simplu strat, avem

$$\varphi_0(M) + 2 \int_{\Gamma} \varphi_0(Q) L_M[F(M, Q)] \, d\sigma_Q = f_0(M) \quad (3)$$

Pentru prescurtarea scrisului introducem notația simbolică

$$(I + K)\varphi_0 = f_0 \quad (3')$$

Aici K înseamnă operatorul integral cu sîmburele $2L_M[F(M, Q)]$.

Observăm că proprietățile clasice ale potențialului de simplu strat se mențin aproape în întregime și atunci cînd densitatea este o funcție de patrat integrabil. În particular, noi ne vom folosi de următoarele proprietăți [5]. Dacă $\varphi \in H$, atunci potențialul de simplu strat

$$u(P) = 2 \int_{\Gamma} \varphi(Q) F(P, Q) \, d\sigma_Q$$

aparține lui H cînd $M \in \Gamma$. Presupunînd că punctul P tinde către M pe conormala [5] în punctul M la Γ , avem următoarea egalitate

$$\lim_{P \rightarrow M} Lu(P) = \varphi(M) + \int_{\Gamma} \varphi(Q) L_M[F(M, Q)] \, d\sigma_Q$$

căre este valabilă aproape pentru fiecare $M \in \Gamma$, iar funcția limită aparține deasemenea lui H .

Avînd în vedere aceste observări, extindem domeniul de definiție al operatorului $(I + K)$ pe tot spațiul H .

Funcția $c(P)$ din ecuația (1) fiind presupusă diferită de zero pe o mulțime de puncte de măsură pozitivă, ecuația extinsă $(I + K)\varphi = f$ are soluția unică pentru orice f din H , deci există operatorul invers al lui $(I + K)$ pe care îl vom nota cu $(I + K)^{-1}$. Acest operator invers fiind și el un operator integral, este totodată mărginit.

Definim încă un operator cu ajutorul formulei

$$F(I + K)^{-1}f = 2 \int_{\Gamma} F(M, Q)(I + K)^{-1}f(Q) \, d\sigma_Q$$

și fie

$$L^{-1} = F(I + K)^{-1}$$

Este clar că domeniul de definiție al lui L^{-1} coincide cu H . Totodată observăm că L^{-1} este complet continuu, fiind un operator integral.

Vom demonstra două leme importante referitoare la L^{-1} .

LEMA 1. Operatorul L^{-1} este simetric.

Demonstrație. Pentru a ne convinge despre valabilitatea lemei este suficient să observăm că

$$(L^{-1}f_0, f_0) \geq 0 \quad (4)$$

pentru fiecare funcție f_0 , avînd derivatele de ordinul întâi continue pe Γ . Dar în acest caz inegalitatea (4) este adevărată pentru orice funcție f din H , fiindcă funcțiile f_0 formează o mulțime densă în acest spațiu. Ne rămîne deci să demonstrăm inegalitatea (4). Avem

$$\begin{aligned} (L^{-1}f_0, f_0) &= (u_0, Lu_0) = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \frac{\partial u_0}{\partial x_k} + cu_0^2 \right\} d\Omega \geq C \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_i} \right)^2 + cu_0^2 \right\} d\Omega \geq 0 \end{aligned}$$

ceea ce confirmă inegalitatea (4). Observăm că în penultima inegalitate am ținut cont de faptul că (1) este eliptic.

LEMA 2. Zero nu este o valoare proprie a operatorului L^{-1} .

Demonstrație. Fie $L^{-1}f = 0$. Vom arăta că $f = 0$. Pentru acesta vom demonstra mai jos identitatea

$$f(M) + 2 \int_{\Gamma} f(Q) L_M[F(M, Q)] \, d\sigma_Q = 0 \quad (5)$$

când $M \in \Gamma$. De aici va urma că funcția f satisface și ecuațiile iterate ale lui (5). Iterând de atâtea ori ca simburile să devină continuu, deducem că funcția f este și ea continuă. Dar în acest caz funcția u dată de formula

$$u(P) = 2 \int_{\Gamma} (I - K)^{-1} f(Q) F(P, Q) d\sigma_Q$$

reprezintă o soluție continuă în $\Omega + \Gamma$ și se anulează pe Γ , deci pe baza proprietății de maxim și minim a soluției ecuației (1) [5], urmează că $u = 0$ în $\Omega + \Gamma$. Deci și $\lim_{P \rightarrow M} Lu = 0$ ceea ce înseamnă că $f = 0$.

Pentru ca demonstrația să fie completă, trebuie să verificăm identitatea (5). În primul rând vom arăta că

$$\int_{\Gamma} f(Q) F(P', Q) d\sigma_Q = 0$$

pentru orice punct $P' \in \Omega_1 - (\Omega + \Gamma)$. Într-adevăr, avînd în vedere că $u(Q) = 0$ când $Q \in \Gamma$, putem scrie

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Gamma} f(Q) F(P', Q) d\sigma_Q &= 2 \int_{\Gamma} \{u(Q) L[F(P', Q)] - f(Q) F(P', Q)\} d\sigma_Q = \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ 2 \left[\int_{\Gamma} \varphi(M) F(Q, M) d\sigma_M \right] L_Q[F(P', Q)] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\varphi(Q) + 2 \int_{\Gamma} \varphi(M) L_Q[F(Q, M)] d\sigma_M \right] F(P', Q) \right\} d\sigma_Q = \\ &= \int_{\Gamma} \varphi(M) \left\{ 2 \int_{\Gamma} [F(Q, M) L_Q[F(P', Q)] - L_Q[F(Q, M)] F(P', Q)] d\sigma_Q \right\} d\sigma_M - \\ &\quad - \int_{\Gamma} \varphi(Q) F(P', Q) d\sigma_Q \end{aligned}$$

unde $\varphi = (I + K)^{-1} f$.

Dacă $P' \in \Omega_1 - (\Omega + \Gamma)$, atunci $F(P', P)$ este o soluție regulată de P în Ω . Prin urmare putem aplica formula lui Green

$$F(P, P') = \int_{\Gamma} \{F(P, Q) L_Q[F(P', Q)] - F(P', Q) L_Q[F(P, Q)]\} d\sigma_Q$$

de unde

$$\begin{aligned} 2F(P', M) &= \lim_{P \rightarrow M} F(P', P) = 2 \int_{\Gamma} F(M, Q) L_Q[F(P', Q)] d\sigma_Q + \\ &\quad + F(P', M) - 2 \int_{\Gamma} F(P', Q) L_Q[F(M, Q)] d\sigma_Q \end{aligned}$$

și

$$2 \int_{\Gamma} \{F(M, Q) L_Q[F(P', Q)] - F(P', Q) L_Q[F(M, Q)]\} d\sigma_Q = F(P', M)$$

prin urmare

$$\int_{\Gamma} f(Q) F(P', Q) d\sigma_Q = 0$$

De aici se obține identitatea (5) dacă calculăm limita derivatei în direcția conormalei, când P' tinde către punctul M de pe frontiera Γ . Prin urmare lema este complet demonstrată.

Din cele expuse mai sus reiese că operatorul L^{-1} , care este definit pe tot spațiul H , are o inversă. Vom nota acest operator invers cu L , iar domeniul de definiție cu $U(\Gamma)$. Observăm că L este operator simetric fiind inversa lui L^{-1} . Mulțimea de funcții $U(\Gamma)$ este densă în H , căci funcțiile definite pe Γ și derivabile de două ori în mod continuu aparțin mulțimii $U(\Gamma)$, iar pe de altă parte aceste funcții sînt dense în H .

Trecem la demonstrarea următoarei teoreme.

TEOREMĂ. Operatorul L dat pe mulțimea $U(\Gamma)$ este pozitiv definit.

Demonstrație. Mai sus am arătat că L^{-1} este complet continuu și simetric. Prin urmare spectrul lui este discret. Notăm cu

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_n \geq \dots$$

valorile proprii ale lui L^{-1} , iar cu

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

funcțiile proprii corespunzătoare. În lema 2 am stabilit că zero nu este o valoare proprie, deci șirul funcțiilor proprii formează o mulțime completă în H . Avem deci

$$0 \leq (L^{-1}f, f) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i (f, \varphi_i)^2 \leq \gamma_1 \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)^2 = \gamma_1 (f, f)$$

ceea ce pe scurt se scrie în felul următor

$$0 \leq L^{-1} \leq \gamma_1 I$$

unde I este operatorul identic.

Aplicînd operatorul L la această inegalitate, găsim

$$LL^{-1} \leq \gamma_1 L$$

Prin urmare

$$L \geq \frac{1}{\gamma_1} I,$$

ceea ce înseamnă că

$$(Lu, u) \geq \frac{1}{\gamma_1} (u, u)$$

Astfel teorema este complet demonstrată.

2. Operatorul L fiind pozitiv definit, putem să introducem o nouă metrică pe mulțimea de funcții $U(\Gamma)$, cu ajutorul produsului scalar

$$[u, v] = (Lu, v) = (u, Lv) \quad u, v \in U(\Gamma)$$

Închidem mulțimea lineară $U(\Gamma)$ în această metrică, iar spațiul obținut îl notăm cu H_0 . Din rezultatele lui Friedrichs [2] știm că această închidere se realizează cu ajutorul elementelor din H , iar ecuația funcțională (2) are soluție unică pentru orice f din H . Această soluție u realizează reprezentarea funcționalei lineare (f, v) cu ajutorul produsului scalar în H_0

$$(f, v) = [u, v]$$

egalitatea fiind adevărată pentru fiecare element v din H_0 . Operatorul L definit pe $U(\Gamma)$ reprezintă extinderea autoconjugată a lui L definit inițial pe $U_0(\Gamma)$.

Reamintim de asemenea că în condițiile noastre rezolvarea ecuației funcționale (2) este echivalentă cu găsirea funcției u pentru care următoarea funcțională își atinge minimumul

$$\Phi(v) = [v, v] - 2(f, v) \quad (6)$$

Ne oprim acum asupra aplicabilității metodei lui Ritz. Pornind dela premiza că cunoaștem un sistem complet și ortonormat de funcții $\{\Psi_i\}$ în spațiul H_0 , metoda lui Ritz constă în construirea unui șir de funcții minimizante

$$u_1(M), u_2(M), \dots, u_n(M), \dots \quad M \in \Gamma \quad (7)$$

adică pentru care să avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = \min \Phi(v)$$

Funcțiile u_n se construiesc în felul următor

$$u_n = \sum_{i=1}^n c_i \Psi_i$$

unde coeficienții se determină din condiția ca funcții de n variabile

$$\Phi(u_n) = \Phi(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

să-și atingă minimumul pentru valorile lui $c_1, c_2, \dots, c_n$ considerate. În condițiile noastre, cînd operatorul L este pozitiv definit, șirul minimizant (7) construit conform metodei lui Ritz converge către o funcție $u(M)$ atît în metrica spațiului H_0 cît și în metrica lui H . Iar această funcție limită realizează minimumul funcționalei (6), ceea ce înseamnă că ea totodată reprezintă și soluția ecuației (2). Toate aceste afirmații sînt demonstrate detaliat și într-un mod elegant în cartea lui S. G. Mihlin [4].

Din cele arătate mai sus reiese clar că metoda de rezolvare a lui Ritz este aplicabilă numai dacă cunoaștem un sistem de funcții complet în H_0 . Scopul nostru este de a indica unele clase de funcții care sînt complete în H_0 .

Considerăm monoamele $\{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n}\}$, unde α_i ia ca valori toate numerele întregi nenegative ($i = 1, 2, \dots, n$) și formăm din aceste monoame un șir, notat cu $\{v_i(Q)\}$. Vom arăta în primul rînd că funcțiile

$$\Psi_i(M) = \int_{\Omega_1 - \Omega} v_i(Q) F(M, Q) d\sigma_Q$$

formează un șir complet în H_0 .

Fie u o funcție care să aibă derivatele de ordinul întâi și doi continue pe Γ , și pentru care să se îndeplinească următoarele egalități:

$$[u, \Psi_i] = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

De aici rezultă că

$$(Lu, \Psi_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

dar u fiind de două ori derivabil aparține și mulțimii de funcții introduse de L. A m e r i o [5]. Prin urmare, pe baza rezultatelor din această lucrare avem $Lu = 0$. Evident că u aparține și lui $U(\Gamma)$, deci $u = 0$. Dar funcțiile care sînt derivabile de două ori pe Γ formează o mulțime densă în H_0 . Prin urmare $\{\Psi_i\}$, într-adevăr reprezintă un sistem complet în H_0 .

Un caz particular important este ecuația lui Laplace. Pentru precizarea ideilor să considerăm ecuația lui Laplace în domeniul tridimensional Ω . Construcțiile anterioare care s-au efectuat pentru ecuația (1) sînt valabile cu mici schimbări și pentru ecuația lui Laplace. Trebuie numai să considerăm în loc de H , ca spațiu de bază, subspațiul său $\bar{H}$, compus din elementele din H ortogonale pe constantă, iar în locul lui L^{-1} se consideră operatorul.

$$L_{\Delta}^{-1}f = L^{-1}f - \frac{1}{\text{mes}\Gamma} \int_{\Gamma} L^{-1}f d\sigma$$

Vom arăta că în cazul de față, funcțiile sferice

$$\{\rho^i Y_{ij}(\theta, \varphi)\} \quad i = 1, 2, \dots; \quad j = 0, 1, \dots, 2i$$

formează un sistem complet în H_0 . Într-adevăr, fie u , ca și mai înainte o funcție destul de netedă, pentru care să avem

$$[u, \rho^i Y_{ij}] = 0 \quad i = 1, 2, \dots; \quad j = 0, 1, \dots, 2i$$

De aici rezultă

$$(L_{\Delta}u, \rho^i Y_{ij}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots; \quad j = 0, 1, \dots, 2i$$

Dar din rezultatele lui G. F i c h e r a [1] urmează că $L_{\Delta}u = 0$, ceea ce atrage după sine $u = \text{const.}$ dar $u \in \bar{H}$ prin urmare $u = 0$. Observînd că funcțiile netede formează o mulțime densă în H_0 , rezultă că sistemul considerat este complet în H_0 .

Revenind la cazul general al ecuației (1), arătăm încă completitatea funcțiilor proprii ale ecuației L^{-1} în H_0 . Fie deci $\{\varphi_i\}$ sistemul funcțiilor proprii ale lui L^{-1} ortonormate în H . Vom demonstra că sistemul

$$\Psi_i = \frac{1}{\sqrt{\gamma_i}} \varphi_i \quad i = 1, 2, \dots$$

unde γ_i sînt valorile proprii corespunzătoare lui φ_i , formează un sistem ortonormat și complet în H_0 .

Sînt valabile următoarele egalități

$$[\Psi_i, \Psi_j] = \frac{1}{\sqrt{\gamma_i \gamma_j}} [\varphi_i, \varphi_j] = \frac{1}{\sqrt{\gamma_i \gamma_j}} (L\varphi_i, \varphi_j) = \frac{\gamma_i}{\sqrt{\gamma_i \gamma_j}} (\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

ceea ce ne arată că sistemul $\{\Psi_i\}$ este într-adevăr ortonormat în H_0 .

Fie u un element arbitrar din H_0 , pentru care însă avem

$$[u, \Psi_i] = 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

De unde rezultă

$$0 = (u, L\Psi_i) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_i}} (u, L\varphi_i) = \sqrt{\gamma_i} (u, \varphi_i)$$

dar $\{\varphi_i\}$ este complet în H , prin urmare $u = 0$, ceea ce demonstrează completitatea sistemului considerat.

Soluția ecuației (2) cu ajutorul funcțiilor $\{\Psi_i\}$ este dată de seria

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \Psi_i) \Psi_i$$

Convergența acestei serii în H_0 este evidentă, fiindcă $\{\Psi_i\}$ este sistem complet în H_0 . Avînd în vedere relația $[u, u] \geq \frac{1}{\gamma_1} (u, u)$ între metricile celor două spații putem afirma și convergența în H . Seria reprezintă soluția ecuației (2) fiindcă ea este tocmai seria pe care o obținem cu metoda lui Ritz. Într-adevăr dacă

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i \Psi_i$$

atunci

$$\frac{\partial \Phi(u_n)}{\partial a_i} = 2a_i - 2(f, \Psi_i) = 0$$

deci

$$a_i = (f, \Psi_i).$$

În încheiere să ne oprim la problema lui Dirichlet relativă la ecuația (1). Vom arăta că problema lui Dirichlet se poate rezolva cu metoda lui Trefftz, dacă funcția dată pe frontiera Γ aparține lui $U(\Gamma)$.

Fie deci $u \in U(\Gamma)$, atunci

$$u(P) = \int_{\Gamma} (I + K)^{-1} Lu \cdot F(P, Q) d\sigma_Q \quad (8)$$

aparține spațiului $W_1^{(2)}(\Omega)$ [4]. Într-adevăr, să notăm $\varphi(Q) = (I + K)^{-1} Lu$ și fie $\{\varphi_n\}$ un șir de funcții care tinde către φ în H , iar elementele șirului să aibă derivatele de ordinul întâi și doi continue. Atunci funcțiile

$$u_n(P) = 2 \int_{\Gamma} \varphi_n(Q) F(P, Q) d\sigma_Q \quad (8')$$

tind către u în $L_2(\Omega)^1$ precum și în H , fiindcă operația (8) este continuă atît în $L_2(\Omega)$ cît și în H . Notînd $f_n = (I + K)\varphi_n$, din cauza continuității operatorului $(I + K)$ rezultă că $f_n \rightarrow f = (I + K)\varphi$ în H . Dar $Lu_n = f_n$ și operatorul L fiind închis rezultă că $Lu = f$. Pentru u_n și f_n avem formula

$$(u_n, Lu_n) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + cu_n^2 \right\} d\Omega \geq N \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)^2 + cu_n^2 \right\} d\Omega$$

însă $(u_n, Lu_n) \rightarrow (u, Lu)$ prin urmare și șirul $\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\}$ converge în $L_2(\Omega)$,

dar în acest caz limita reprezintă derivata generalizată a lui u .

Din această observație rezultă că putem căuta funcția u definită pe Ω cu ajutorul metodei lui Trefftz. Fie deci

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i \Psi_i$$

unde Ψ_i este un sistem de soluții ale ecuației (1) complet în sensul următor: oricare ar fi soluția u a ecuației (1) și $\varepsilon > 0$, există un număr natural n și constantele $a_1, a_2, \dots, a_n$ în așa fel ca să avem

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial (u_n - u)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_n - u)}{\partial x_k} + c(u_n - u)^2 \right\} d\Omega < \varepsilon$$

Iar constantele $a_1, a_2, \dots, a_n$ le considerăm determinate din condiția

$$\int_{\Gamma} (u_n - u) L(u_n - u) d\sigma_Q = \min.$$

Noi vom demonstra că șirul $\{u_n\}$ construit conform metodei lui Trefftz converge uniform către soluția căutată în orice subdomeniu Ω' interior lui Ω . Într-adevăr, notînd cu $G(P, Q)$ funcția lui Green relativă la problema lui Dirichlet în Ω , avem

$$u_n - u = \int_{\Gamma} (u_n - u) L_Q[G(P, Q)] d\sigma_Q \quad (9)$$

¹ $L_2(\Omega)$ reprezintă spațiul Hilbert al funcțiilor definite pe Ω și de patrat integrabile.

Dacă $P \in \Omega'$, avem

$$|u_n(P) - u(P)| \leq A(u_n - u, u_n - u) \leq A\gamma_1(L(u_n - u), (u_n - u)),$$

Prima inegalitate este o consecință a faptului că (9) este o operație uniform mărginită în H pentru $P \in \Omega'$, iar a doua inegalitate reflectă că operatorul L este pozitiv definit. Însă partea a doua a inegalității tinde către zero, când $n \rightarrow \infty$, prin urmare am demonstrat convergența uniformă în Ω' .

Catedra de ecuații diferențiale

BIBLIOGRAFIE

1. G. Fichera, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*. „Ann. Mat. pura e appl.”, 27 (1948) 1–28.
2. K. O. Friedrichs, *Spektraltheorie halbeschränkter Operatoren und Anwendungen auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*. „Math. Ann.”, Bd. 109, H. 4–5, 1934.
3. I. M. Günther, *Teoria potențială și o primenenié k osnovnim zadaciám matematicheskoi fiziki*. Moscova 1953.
4. S. G. Mihlin, *Problema minimuma kvadratinovo funkționala*. Moscova–Leningrad, 1952.
5. C. Miranda, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. Springer Verlag, 1955.

О РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ НЕЙМАНА

(Краткое содержание)

В связи с решением задачи Неймана для уравнения

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - cu = 0 \quad (1)$$

рассматривается функциональное уравнение

$$Lu = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n, x_i) = f \quad (2)$$

В первой части работы доказывается, что оператор L является положительно определенным на множестве функций $U(\Gamma)$. Здесь Γ представляет границу ограниченной области Ω ; $U(\Gamma)$ — множество значений оператора.

$$L^{-1}f = \int_{\Gamma} \varphi(Q) F(M, Q) d\sigma_Q; \quad \varphi(Q) = f(Q) + \int_{\Gamma} f(R) L_Q[F(Q, R)] d\sigma_R$$

когда f пробегит пространство H . H представляет гильбертово пространство функций определенных на Γ и суммируемых в квадрате.

Во второй части работы применяется метод Ритца для решения уравнения (2). Вводя пространство H_0 при помощи пополнения множества $U(\Gamma)$ в метрике.

$$(u, v) = (u, Lv) = \int_{\Gamma} u Lv d\sigma,$$

доказывается, что функции

$$\Psi_i(M) = \int_{\Omega - \Omega_i} v_i(Q) F(M, Q) d\Omega_Q$$

представляют собой полное множество в H_0 . Здесь $\{v_i(Q)\}$ суть одночлены $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ когда α_i принимает значения целых неотрицательных чисел ($i = 1, 2, \dots, n$).

Доказывается далее, что в случае уравнения Лапласа сферические функции также представляют полную систему функций в H_0 .

Полным является в H_0 также множество собственных функций ограниченного оператора L^{-1} .

Во второй части работы рассматривается, кроме того, метод Третьяка для решения задачи Дирихле, когда заданная функция на Γ принадлежит также пространству $U(\Gamma)$. Доказывается, что каждое решение из $U(\Omega)$ принадлежит также пространству $W_2^{(1)}(\Omega)$ и что последовательность приближенных решений по Третьяку сходится к точному решению равномерно в Ω .

SUR LA SOLUTION DU PROBLÈME DE LA LIMITE DE NEUMANN

(Résumé)

En vue de la solution du problème de la limite de Neumann pour l'équation

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) - cu = 0 \quad (1)$$

on considère l'équation fonctionnelle

$$Lu \equiv \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n, x_i) = f \quad (2)$$

Da la première partie du présent travail on démontre que l'opérateur est défini positivement sur l'ensemble de fonctions $U(\Gamma)$. Γ est ici la frontière du domaine limité Ω . $U(\Gamma)$ représente l'ensemble de valeurs de l'opérateur

$$L^{-1}f = \int_{\Gamma} \varphi(Q) F(M, Q) d\sigma_Q; \quad \varphi(Q) = f(Q) + \int_{\Gamma} f(R) L_Q[F(Q, R)] d\sigma_R$$

quand f aura parcouru l'espace H . H est l'espace Hilbert de fonctions définies sur Γ et sommées en carré.

Dans la seconde partie du travail on applique la méthode de Ritz à la solution de l'équation (2). On introduit l'espace H_0 en complétant l'ensemble $U(\Gamma)$ dans la métrique

$$[u, v] = (u, Lv) = \int_{\Gamma} u Lv d\sigma$$

On démontre que les fonctions

$$\Psi_i(M) = \int_{\Omega_i - \Omega} v_i(Q) F_i(MQ) d\Omega_Q$$

représentent un ensemble complet dans H_0 . $\{v_i(Q)\}$ sont ici les monômes $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n}$ quand α_i prend les valeurs de nombres entiers non négatifs.

On démontre ensuite que pour les équations de Laplace les fonctions sphériques seront aussi un ensemble complet de fonctions dans H_0 .

C'est dans la même partie du travail qu'on s'occupe de la méthode de Trefftz appliquée à la solution du problème de Dirichlet quand la fonction donnée sur Γ appartient à l'ensemble $U(\Gamma)$. On démontre que chaque solution de l'ensemble $U(\Omega)$ appartient à l'espace $W_2^1(\Omega)$ et que la solution approchée construite d'après Trefftz converge uniformément à l'intérieur de Ω .