



ASUPRA POLINOAMELOR LUI CEBIȘEV k -RESTRINSE PE O MULȚIME MĂRGINITĂ ȘI ÎNCHISĂ DIN PLANUL COMPLEX

de

I. MARUȘCIAC

1. Fie E o mulțime de puncte din planul complex mărginită și închisă, care conține cel puțin $n - k + 1$ puncte și $A_1, A_2, \dots, A_k - k$ numere complexe oarecari însă fixate dinainte.

Polinomul

$$T_n^k(z; E) = z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_k z^{n-k} + a_{k+1} z^{n-k-1} + \dots + a_n, \quad (1)$$

$$0 \leq k < n$$

se numește *polinomul lui Cebîșev k -restrins* sau *T_n^k -polinom* pe E , [3], dacă nu există nici un polinom

$$P_n^k(z; E) = z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_k z^{n-k} + a_{k+1} z^{n-k-1} + \dots + a_n \quad (2)$$

cu primii $k + 1$ coeficienți aceeași, care să verifice inegalitatea

$$\max_{z \in E} |P_n^k(z; E)| < \max_{z \in E} |T_n^k(z; E)|.$$

În cazul unei mulțimi finite, conținând N puncte, $N > n + 1$, tov. Prof. Gh. Călugăreanu într-o lucrare [1], a arătat, folosind o metodă a lui P o l y a, că $T_n^0(z; E) = \lim_{p \rightarrow \infty} P_p(z)$, unde $P_p(z)$ este polinomul care realizează minimul mediei

$$J_p = \left(\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N |P(c_v)|^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}} \quad (3)$$

unde $[c_1, c_2, \dots, c_N] = E$ și p un număr întreg pozitiv fix. Acest rezultat se generalizează apoi pentru o mulțime mărginită și închisă oarecare.

În lucrarea de față aratăm, bazându-ne pe aceeași metodă, posibilitatea determinării polinomului $T_n^k(z; E)$, unde E este mulțime finită, formată din cel puțin $n - k + 1$ puncte din planul complex, cu ajutorul unor medii analoage, dându-se și expresia lui explicită în cazul $N = n - k + 1$.

2. Fiind dată o mulțime de puncte M din planul complex mărginită și închisă (finită, conținând cel puțin $n - k + 1$ puncte, sau infinită) și un polinom

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \text{ de grad } n \geq 2,$$

cu coeficientul director egal cu 1, zicem că un polinom

$$B(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \dots + b_n$$

(diferit de $A(z)$) este polinom adjunct k -restrîns a lui $A(z)$ pe M , dacă cu $1 \leq k \leq n - 1$, avem

$$a_v = b_v, \text{ pentru } v = 1, 2, 3, \dots, k \quad (\text{I})$$

$$B(z) = 0 \text{ oricîte ori } A(z) = 0, z \in M \quad (\text{II})$$

$$\text{și } |B(z)| < |A(z)|, A(z) \neq 0, z \notin M. \quad (\text{III})$$

Se zice că $A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ este un *infrapolinom k -restrîns pe M* (după Fekete-Walsch [2]), dacă nu există un polinom adjunct k -restrîns pe M a lui $A(z)$.

Fie acum E o mulțime finită compusă din N ($N \geq n - k + 1$) puncte din planul complex $c_1, c_2, \dots, c_N$ și $A_1, A_2, \dots, A_k$ k -numere complexe date. Punem

$$J_p = \left(\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N |P(c_v)|^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}} \quad (4)$$

$$P(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_k z^{n-k} + a_{k+1} z^{n-k-1} + \dots + a_n.$$

Vom căuta minimul expresiei J_p cînd coeficienții $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ variază independent. Pentru aceasta, arătăm mai întîi că polinomul $P_p^k(z)$ care realizează minimul lui J_p printre toate polinoamele de gradul n cu primii $k + 1$ coeficienți fixați, este un *infrapolinom k -restrîns pe E* .

În adevăr, dacă n-ar fi infrapolinom k -restrîns pe E , atunci el ar admite un polinom adjunct k -restrîns pe E . Fie acesta

$$Q_p^k(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_k z^{n-k} + b_{k+1} z^{n-k-1} + \dots + b_n$$

(diferit de $A(z)$), care ar satisface condiția (II) și (III), adică

$$Q_p^k(z) = 0, \text{ oricîte ori } P_p^k(z) = 0, z \in E$$

și

$$|Q_p^k(z)| < |P_p^k(z)|, z \in E \text{ și } P_p^k(z) \neq 0.$$

Însă aceasta ar contrazice faptul că $P_p^k(z)$ realizează minimul lui J_p . Prin urmare, $P_p^k(z)$ nu admite polinom adjunct k -restrîns, deci el este un *infrapolinom k -restrîns pe E* .

Acum vom demonstra următoarea

LEMĂ. Fie M o mulțime compactă de puncte din planul complex z , iar $A_1, A_2, \dots, A_k$ k -numere complexe care verifică inegalitatea

$$|A_j| \leq \frac{R}{\sin \frac{\pi}{2(k+1)}},$$

unde R este raza cercului (C) cu centrul în origine, care cuprinde în întregime mulțimea M . Atunci polinoamele $P_p^k(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_k z^{n-k} + a_{k+1} z^{n-k-1} + \dots + a_n$, care realizează minimul lui J_p , sînt uniform mărginite (în raport cu p) în cercul (C) .

În adevăr, am văzut că polinomul $P_p^k(z)$ este un infrapolinom k -restrîns pentru orice p și conform unei teoreme a lui Fekete-Walsch [2], cel puțin $n - k$ rădăcini ale sale sînt cuprinse în mulțimea închisă $M^* \supset M$, din ale cărei puncte mulțimea M se vede sub un unghi $\alpha > \frac{\pi}{k+1}$.

În cazul nostru M fiind cuprinsă în cercul $|z| \leq R$, rezultă că M^* este cuprinsă în cercul $|z| \leq \rho$ unde $\rho = \frac{R}{\sin \frac{\pi}{2(k+1)}}$.

Să notăm aceste rădăcini cu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-k}$ și fie

$$B_p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_{n-k}) = z^{n-k} + b_1 z^{n-k-1} + \dots + b_{n-k}.$$

Avem

$$\begin{aligned} |b_1| &\leq C_{n-k}^1 \rho \\ |b_2| &\leq C_{n-k}^2 \rho^2 \end{aligned}$$

$$|b_h| \leq C_{n-k}^h \rho^h, 1 \leq h \leq n - k.$$

Dacă

$$R \geq \sin \frac{\pi}{2(k+1)} \rho^i \leq \rho^k, i \leq k, \text{ deci } |b_h| \leq C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k}$$

iar cînd

$$R < \sin \frac{\pi}{2(k+1)}, |b_h| \leq C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k}$$

Identificînd acum coeficienții în

$$P_p(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_k z^{n-k} + a_{k+1} z^{n-k-1} + \dots + a_n = B_p(z) C_p(z)$$

unde $C_p(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \dots + c_k$, vom avea

$$\begin{aligned} b_1 + c_1 &= A_1 \\ b_2 + b_1 c_1 + c_2 &= A_2 \\ &\dots \\ b_k + b_{k-1} c_1 + \dots + c_k &= A_k \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}
 c_1 &= A_1 - b_1 \\
 b_1 c_1 + c_2 &= A_2 - b_2 \\
 b_2 c_1 + b_1 c_2 + c_3 &= A_3 - b_3 \\
 &\dots \\
 b_{k-1} c_1 + b_{k-2} c_2 + \dots + c_k &= A_k - b_k
 \end{aligned}$$

Determinantul acestui sistem în $c_1, c_2, \dots, c_k$ este egal cu 1, iar

$$D_j = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & A_1 - b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & \dots & A_2 - b_2 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & \dots & A_3 - b_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k-1} & b_{k-2} & b_{k-3} & \dots & A_k - b_k & \dots & b_1 & 1 \end{vmatrix}$$

Cum

$$|b_h| \leq C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k}, \text{ iar } |A_h - b_h| \leq \rho + C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k} \leq 2C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k}$$

Din inegalitatea lui Hadamard:

$$\|a_{ik}\|^2 \leq \sum_{k=1}^k \prod_{i=1}^n |a_{ik}|^2$$

$$|D_j|^2 \leq \left[C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k} \right]^{2k} (k+1)^k; |c_h| = |D_j| \leq \left[C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k} \right]^k (k+1)^{\frac{k}{2}}.$$

Din relațiile

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= b_k c_1 + b_{k-1} c_2 + \dots + b_1 c_k \\
 a_{k+2} &= b_{k+1} c_1 + b_k c_2 + \dots + b_2 c_k \\
 &\dots \\
 a_n &= b_{n-k} c_k
 \end{aligned}$$

găsim

$$|a_n| \leq \left[C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k} \right]^k (k+1)^{\frac{k}{2}} \cdot C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k} = \left[C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k} \right]^{k+1} (k+1)^{\frac{k}{2}}.$$

La fel

$$|a_{n-1}| \leq 2 \left[C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k} \right]^{k+1} (k+1)^{\frac{k}{2}}$$

$$|a_{k+1}| \leq k \left[C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k} \right]^{k+1} (k+1)^{\frac{k}{2}}.$$

Deci

$$\begin{aligned}
 |P_p(z)| &\leq |z|^n + |A_1| \cdot |z|^{n-1} + \dots + |A_k| \cdot |z|^{n-k} + |a_{k+1}| \cdot |z|^{n-k-1} + \dots + \\
 &+ |a_n| \leq k \left[C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k} \right]^{k+1} (k+1)^{\frac{k}{2}} (1 + R + \dots + R^n) = \\
 &= \frac{R^{n+1} - 1}{R - 1} (k+1)^{\frac{k}{2}} \left[C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \rho^{n-k} \right].
 \end{aligned}$$

3. Vom demonstra acum următoarea

TEOREMĂ. Fie E o mulțime finită compusă din N ($N \geq n - k + 1$) puncte din plan: $c_1, c_2, \dots, c_N$ iar $A_1, A_2, \dots, A_k$ — k -numere complexe date. Atunci notînd cu $P_p^k(z)$ polinomul care realizează minimumul lui J_p pentru un p fix, avem

$$\lim_{p \rightarrow \infty} P_p^k(z) = T_n^k(z; E), \quad \mu_n^k(E) = \max_{z \in E} |T_n^k(z; E)| = \lim_{p \rightarrow \infty} j_p,$$

unde j_p este valoarea minimă a lui J_p .

Demonstrație. Bine înțeles că este suficient să arătăm existența și unicitatea polinomului $P_p^k(z)$ care realizează minimumul lui J_p^{2p} . Să observăm că punînd $a_l = a'_l + i a''_l$, $l = k+1, k+2, \dots, n$, J_p^{2p} este un polinom în raport cu a'_l și a''_l , luînd numai valori pozitive. Minimumul există deci și valorile corespunzătoare a'_l și a''_l satisfac sistemul

$$\frac{\partial}{\partial a'_l} (J_p^{2p}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a''_l} (J_p^{2p}) = 0, \quad l = k+1, k+2, \dots, n.$$

Fie $a'_{k+1}, a''_{k+1}, a'_{k+2}, a''_{k+2}, \dots, a'_n, a''_n$ un sistem de soluții ale acestui sistem. Pentru a dovedi unicitatea soluției, adică unicitatea polinomului minimizant, vom arăta că nu există un alt sistem de soluții, diferit de primul.

Să presupunem contrariul, și fie

$$a'_{k+1} + b'_{k+1}, a''_{k+1} + b''_{k+1}, \dots, a'_n + b'_n, a''_n + b''_n$$

un aldoilea sistem de soluții. Să punem $u'_l = a'_l + t b'_l$, $u''_l = a''_l + t b''_l$, $u_l = u'_l + i u''_l$ și să formăm

$$J(u) = N J_p^{2p}(u'_{k+1}, u''_{k+1}, \dots, u'_n, u''_n)$$

care se obține din $N J_p^{2p}$ înlocuind literele a_l cu u_l , $l = k+1, k+2, \dots, n$.

Avem

$$\frac{d}{dt} J(u) = \sum_{l=k+1}^n \left(\frac{\partial J}{\partial u'_l} b'_l + \frac{\partial J}{\partial u''_l} b''_l \right) = p \sum_{v=1}^N |P(c_v)|^{2p-2} \cdot \frac{d}{dt} |P(c_v)|^2.$$

Din cele presupuse rezultă că expresia aceasta se anulează pentru $t = 0$ și $t = 1$. Însă $J(u)$ fiind un polinom în t , avem deci, conform teoremei lui Rolle,

$$\frac{d^2}{d\tau^2} J(u) = 0, \text{ pentru } t = \tau, 0 < \tau < 1.$$

Avem, pentru $t = \tau$,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} J(u) &= \sum_{v=1}^N p(p-1) |P(c_v)|^{2p-4} \left(\frac{d}{d\tau} |c_v|^2 \right)^2 \\ &+ p \sum_{v=1}^N |P(c_v)|^{2p-2} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} |P(c_v)|^2 = 0. \end{aligned}$$

Vom arăta că $\frac{d^2}{d\tau^2} |P(c_v)|^2 > 0$, de unde va rezulta o contradicție, căci în expresia de mai sus toți termenii sînt pozitivi și deci, aceasta nu se va putea anula.

Dacă notăm cu $\varphi(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_k z^{n-k}$

și

$$\begin{aligned} A &= R[\varphi(z)] + u'_{k+1} R(z^{n-k-1}) - u''_{k-1} I(z^{n-k-1}) + \dots + u'_n \\ B &= I[\varphi(z)] + u'_{k+1} I(z^{n-k-1}) + u''_{k+1} R(z^{n-k-1}) + \dots + u''_n \end{aligned}$$

avem $|P(z)|^2 = A^2 + B^2$. Aici $R(\alpha)$, $I(\alpha)$ reprezintă respectiv partea reală și imaginară a numărului α .

Deci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |P(z)|^2 &= 2A [b'_{k+1} R(z^{n-k-1}) - b''_{k+1} I(z^{n-k-1}) + \dots + b'_n] + \\ &+ 2B [b'_{k+1} I(z^{n-k-1}) + b''_{k+1} R(z^{n-k-1}) + \dots + b''_n], \\ \frac{d^2}{dt^2} |P(z)|^2 &= 2 [b'_{k+1} R(z^{n-k-1}) - b''_{k+1} I(z^{n-k-1}) + \dots + b'_n]^2 + \\ &+ 2 [b'_{k+1} I(z^{n-k-1}) + b''_{k+1} R(z^{n-k-1}) + \dots + b''_n]^2 > 0. \end{aligned}$$

Rezultă deci $b'_{k+1} = b''_{k+1} = \dots = b'_n = b''_n = 0$, și unicitat ea polinomului minimizant $P_p^k(z)$ este stabilitată, pentru orice valoare întreagă pozitivă a lui p .

Să trecem acum la partea a doua a demonstrației și să arătăm că $P_p^k(z)$ tinde uniform către $T_n^k(z; E)$, cînd $p \rightarrow \infty$.

Pentru aceasta, mai întîi să observăm că J_p fiind o medie de ordinul $2p$, este o funcție crescătoare de p , deci dacă $P_{p+1}^k(z)$ este un polinom minimizant de ordinul $p+1$, avem

$$j_{p+1} = \left(\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N |P_{p+1}^k(z)|^{2p+2} \right)^{\frac{1}{2p+2}} > \left(\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N |P_{p+1}^k(z)|^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}} \geq j_p.$$

Așadar șirul $\{j_p\}$ este crescător și $\lim_{p \rightarrow \infty} j_p = j$ există.

Din lema rezultă că polinoamele $P_p^k(z)$ sînt uniform mărginite în raport cu p în E și ele formează deci o familie normală, ale cărei funcții limită sînt polinoame de grad n . Fie $\Pi^k(z)$ unul din aceste polinoame și $\mu^k = \max_{z \in E} |\Pi^k(z)|$. Evident că și polinomul $\Pi^k(z)$ are primii $k+1$ coeficienți numerele $1, A_1, A_2, \dots, A_k$, deoarece toate polinoamele $P_p^k(z)$ au aceeași primi $k+1$ coeficienți, și anume aceste numere.

Avem

$$\Pi^k(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_{p_m}^k(z)$$

convergența fiind uniformă în cercul (C) care conține mulțimea E și numerele $A_1, A_2, \dots, A_k$. Deci,

$$|\mu^k - \max_{z \in E} |P_{p_m}^k(z)|| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m > m_0$$

Însă se știe că

$$\left(\frac{B_1^q + B_2^q + \dots + B_N^q}{N} \right)^{\frac{1}{q}} \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \max(B_1, B_2, \dots, B_N),$$

oricare ar fi numerele B_k , $0 \leq B_k \leq K$, $k = 1, 2, 3, \dots, N$.

Tot așa

$$\lim_{p \rightarrow \infty} J_p[P(z)] = \max_{z \in E} |P(z)|$$

în mod uniform, pentru orice familie de polinoame de grad n , uniform mărginite în cercul (C) .

Luînd aici $P(z) = P_{p_m}^k(z)$ (care formează o familie uniform mărginită în cercul (C)), vom avea

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_{p_m}[P_{p_m}^k(z)] = \lim_{m \rightarrow \infty} j_{p_m} = \max_{z \in E} |P_{p_m}^k(z)|.$$

Deci

$$|\max_{z \in E} |P_{p_m}^k(z)| - j_{p_m}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dacă } m > m_1\}.$$

Avem deci

$$\begin{aligned} |\mu^k - j_{p_m}| &= (|\mu^k - \max_{z \in E} |P_{p_m}^k(z)||) + (\max_{z \in E} |P_{p_m}^k(z)| - j_{p_m}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ dacă } m > \max(m_0, m_1), \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\mu^k = j.$$

Să considerăm acum $T_n^k(z; E)$ şi să notăm cu $\mu_n^k = \max_{z \in E} |T_n^k(z; E)|$.
 Avem evident $\mu_n^k \leq \mu^k$, deci $\mu_n^k \leq j$.

Avem de asemenea

$$j_p \leq J_p[T_n^k(z; E)] < \mu_n^k,$$

căci pentru $p \rightarrow \infty$ media $J_p[T_n^k]$ tinde către maximul modului polinomului T_n^k pe E şi această medie e o funcţie crescătoare de p . Făcînd deci $p \rightarrow \infty$, avem

$$j \leq \mu_n^k, \text{ deci } j = \mu_n^k.$$

Aşa dar $\mu_n^k = \max_{z \in E} |\Pi^k(z)|$ şi — polinomul Cebîşev fiind unic¹ — rezultă

$$\Pi^k(z) \equiv T_n^k(z, E).$$

Prin aceasta am arătat că subşirul $\{P_{p_m}^k\}$ al lui $\{P_p^k\}$ este uniform convergent în (C) către $T_n^k(z; E)$. De aici încă nu rezultă că întreg şirul $\{P_p^k(z)\}$ converge uniform către $T_n^k(z; E)$. Însă conform unei teoreme demonstrate de autor [4] dacă un şir infinit de funcţii olomorfe $\{f_n(z)\}$ este uniform mărginit într-un cerc (C) şi dacă orice subşir al său convergent tinde către o aceeaşi limită $f(z)$, atunci întreg şirul $\{f_n(z)\}$ este uniform convergent către $f(z)$.

Această teoremă este aplicabilă şi în cazul nostru, deoarece alegînd un alt subşir convergent din $\{P_p(z)\}$ şi făcînd acelaşi raţionament, găsim că acesta tinde către acelaşi polinom, anume către polinomul $T_n^k(z; E)$. Deci, întreg şirul $\{P_p(z)\}$ tinde uniform către $T_n^k(z; E)$.

4. Folosind acest procedeu, se poate da polinomului $P_p^k(z)$ o formă specială, de unde, trecînd la limită pentru $p \rightarrow \infty$ găsim o formă specială pentru $T_n^k(z; E)$.

Minimul J_p^{2p} se obţine anulîndu-se derivatele parţiale ale lui J_p^{2p} în raport cu a_l , a_l'' , sau în raport cu $\bar{a}_l$ şi a_l , ceea ce revine la acelaşi lucru. Să scriem deci

$$J_p^{2p} = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^N [P(c_v)]^p \cdot [\bar{P}(c_v)]^p.$$

Derivînd parţial în raport cu $\bar{a}_l$ vom avea

$$\sum_{v=1}^N [P(c_v)]^p \cdot [\bar{P}(c_v)]^{p-1} \cdot \bar{c}_v^{n-l} = 0, \quad l = k+1, k+2, \dots, n. \quad (5)$$

¹ Unicitatea polinomului $T_n^k(z; E)$ precum şi existenţa lui rezultă din existenţa şi unicitatea polinomului de cea mai bună aproximare a unei funcţii $f(z)$ continue pe E . E destul să se ia aici $f(z) = \varphi(z)$ unde $\varphi(z) = z^n + A_1 z^{n-k} + \dots + A_k z^{n-k}$.

Se vede că nu mai e necesar să derivăm şi în raport cu a_l , deoarece ecuaţiile corespunzătoare se obţin din (5) luînd imaginarele conjugate. Sistemul de ecuaţii (5), format din $n-k$ ecuaţii cu $n-k$ necunoscute $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$, determină polinomul $P_n^k(z)$.

Să scriem ecuaţiile (5) sub forma

$$\sum_{v=1}^N |P(c_v)|^{2p-2} \bar{c}_v^{n-l} P(c_v) = 0, \quad l = k+1, k+2, \dots, n$$

Punînd

$$L_{l,j} = \sum_{v=1}^N |P(c_v)|^{2p-2} \bar{c}_v^{n-k-i} \bar{c}_v^{n-k-j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n-k$$

ecuaţiile (6) se scriu

$$\sum_{v=1}^H |P(c_v)|^{2p-2} \bar{c}_v^{n-k-j} \varphi(c_v) + a_{k+1} L_{1,j} + a_{k+2} L_{2,j} + \dots + a_n L_{n-k,j} = 0 \quad (7)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n-k,$$

unde

$$\varphi(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_k z^{n-k}.$$

Pentru simplificarea scrierii, să notăm cu

$$g_j = \sum_{v=1}^N |P(c_v)|^{2p-2} \bar{c}_v^{n-k-j} \varphi(c_v), \quad j = 1, 2, \dots, n-k.$$

Atunci ecuaţiile (7) se vor scrie

$$g_j + a_{k+1} L_{1,j} + a_{k+2} L_{2,j} + \dots + a_n L_{n-k,j} = 0 \quad (8)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n-k$$

Acest sistem la care se mai adaugă

$$\varphi(z) - P(z) + a_{k+1} z^{n-k-1} + \dots + a_n = 0$$

ne dă prin eliminarea numerelor $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$

$$\begin{vmatrix} \varphi(z) - P(z) & z^{n-k-1} & z^{n-k-2} & \dots & 1 \\ g_1 & L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n-k,1} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} & \dots & L_{n-k,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-k} & L_{1,n-k} & L_{2,n-k} & \dots & L_{n-k,n-k} \end{vmatrix} = 0$$

de unde

$$P(z) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi(z) & z^{n-k-1} & z^{n-k-2} & \dots & 1 \\ g_1 & L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n-k,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-k} & L_{1,n-k} & L_{2,n-k} & \dots & L_{n-k,n-k} \end{vmatrix}}{|L_{i,j}|, i, j = 1, 2, \dots, n-k} \quad (9)$$

Se transformă acest determinant printr-un artificiu datorit lui Heine, scriind

$$\begin{aligned} L_{1,j} &= \sum_{v_j=1}^N |P(c_{v_j})|^{2p-2} c_{v_j}^{n-k-1} \bar{c}_{v_j}^{n-k-j}, \\ L_{2,j} &= \sum_{v_j=1}^N |P(c_{v_j})|^{2p-2} c_{v_j}^{n-k-2} \bar{c}_{v_j}^{n-k-j}, \\ &\dots \dots \dots j=1, 2, 3, \dots, n-k \\ L_{n-k,j} &= \sum_{v_j=1}^N |P(c_{v_j})|^{2p-2} 1 \cdot \bar{c}_{v_j}^{n-k-j} \end{aligned}$$

Semnul $\sum$ relativ la v poate fi „scos în factor” înaintea determinantului. Dacă se operează astfel în fiecare linie și se notează cu $V(z_1, z_2, \dots, z_n)$ determinantul Vandermonde al numerelor $z_1, z_2, \dots, z_n$, obținem

$$|L_{i,j}| = \sum_{v_1, v_2, \dots, v_{n-k}}^N |(c_{v_1}) \cdot P(c_{v_2}) \dots P(c_{v_{n-k}})|^{2p-2} \bar{c}_{v_1}^{n-k-1} \bar{c}_{v_2}^{n-k-2} \dots 1 \times \\ \times V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}).$$

Putem schimba aici notația indicilor în toate cele $(n-k)!$ moduri posibile, ceea ce revine la a face permutare a indicilor în expresia de mai sus. Adunînd toate aceste relații, obținem

$$|L_{i,j}| = \frac{1}{(n-k)!} \sum_{v_1, \dots, v_{n-k}}^N |P(c_{v_1}) \cdot P(c_{v_2}) \dots P(c_{v_{n-k}})|^{2p-2} \cdot |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}})|^2.$$

Acum dacă punem deasemenea

$$g_i = \sum_{v_j=1}^N |P(c_{v_j})|^{2p-2} \cdot \bar{c}_{v_j}^{n-k-i} \varphi(c_{v_j})$$

determinantul de la numărător (relația (9)) se poate scrie sub forma

$$\sum_{v_1, \dots, v_{n-k}}^N |P(c_{v_1}) \cdot P(c_{v_2}) \dots P(c_{v_{n-k}})|^{2p-2} \bar{c}_{v_1}^{n-k-1} \bar{c}_{v_2}^{n-k-2} \dots 1 \begin{vmatrix} \varphi(z) & z^{n-k-1} z^{n-k-2} \dots 1 \\ \varphi(c_{v_1}) & c_{v_1}^{n-k-1} c_{v_1}^{n-k-2} \dots 1 \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \varphi(c_{v_{n-k}}) & c_{v_{n-k}}^{n-k-1} c_{v_{n-k}}^{n-k-2} \dots 1 \end{vmatrix}$$

Permutînd și aici indicii de însumare în toate modurile posibile apoi adunînd, obținem

$$\frac{1}{(n-k)!} \sum_{v_1, \dots, v_{n-k}}^N |P(c_{v_1}) \cdot P(c_{v_2}) \dots P(c_{v_{n-k}})|^{2p-2} \cdot V(\bar{c}_{v_1}, \bar{c}_{v_2}, \dots, \bar{c}_{v_{n-k}}) \times \\ \times D(z, c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}; \varphi),$$

unde $D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \varphi)$ este determinantul ce se obține din determinantul lui Vandermonde înlocuind coloana corespunzătoare puterilor celor mai mari respectiv cu $\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_n)$.

Dacă se dezvoltă determinantul $D(z, c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}; \varphi)$ după elementele coloanei care conține valorile lui φ , vom avea

$$\begin{aligned} &\varphi(z) \cdot V(c_{v_1}, c_{v_2}, c_{v_3}, \dots, c_{v_{n-k}}) - \varphi(c_{v_1}) \cdot V(z, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n-k} \varphi(c_{v_{n-k}}) \cdot V(z, c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k-1}}) = \\ &= V(z, c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k}}) \left[\frac{\varphi(z)}{(c_{v_1}-z)(c_{v_2}-z) \dots (c_{v_{n-k}}-z)} - \frac{\varphi(c_{v_1})}{(c_{v_1}-z)(c_{v_2}-c_{v_1}) \dots (c_{v_{n-k}}-c_{v_1})} + \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{n-k} \frac{\varphi(c_{v_{n-k}})}{(c_{v_{n-k}}-z)(c_{v_{n-k}}-c_{v_1}) \dots (c_{v_{n-k}}-c_{v_{n-k-1}})} \right] = \\ &= V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}) \cdot f'(z) \left[\frac{\varphi(z)}{f'(z)} + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\varphi(c_{v_i})}{f'(c_{v_i})} \right], \end{aligned}$$

unde $f(\zeta) = (\zeta - z)(\zeta - c_{v_1})(\zeta - c_{v_2}) \dots (\zeta - c_{v_{n-k}})$.

Însă

$$\begin{aligned} f'(z) \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\varphi(c_{v_i})}{f'(c_{v_i})} &= - \sum_{i=1}^{n-k} \frac{(z - c_{v_1}) \dots (z - c_{v_{i-1}})(z - c_{v_{i+1}}) \dots (z - c_{v_{n-k}}) \cdot \varphi(c_{v_i})}{(c_{v_i} - c_{v_1}) \dots (c_{v_i} - c_{v_{i-1}})(c_{v_i} - c_{v_{i+1}}) \dots (c_{v_i} - c_{v_{n-k}})} = \\ &= -L(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}; \varphi(z)). \end{aligned}$$

Aici $L(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}; \varphi(z))$ reprezintă polinomul de interpolare a lui Lagrange de gradul $n-k-1$ pe nodurile $c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}$ a funcției $\varphi(z)$.

Cu aceste notații se vede că numărătorul din (9) se poate scrie sub forma

$$\sum |P(c_{v_1}) \dots P(c_{v_{n-k}})|^{2p-2} V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}) [\varphi(z) - L(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}; \varphi(z))].$$

Astfel

$$P(z) = \frac{\sum |P(c_{v_1}) \dots P(c_{v_{n-k}})|^{2p-2} \cdot |V(c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k}})|^2 \cdot [\varphi(z) - L(c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k}}; \varphi)]}{\sum |P(c_{v_1}) \dots P(c_{v_{n-k}})|^{2p-2} \cdot |V(c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k}})|^2} \quad (10)$$

unde semnul $\sum$ se extinde asupra tuturor indicilor.

Deci, polinomul minimizant $P_p^k(z)$ verifică această ecuație funcțională (10). Trecînd la limită pentru $p \rightarrow \infty$ vom obține o expresie specială pentru polinomului $T_n^k(z; E)$.

Se știe că polinomul $T_n^k(z; E)$ (considerat ca polinom de cea mai bună aproximație de grad $n-k-1$ a funcției $\varphi(z)$) își atinge maximul modulului $\mu_n^k(E)$ în cel puțin $n-k+1$ puncte ale mulțimii E . Să notăm că $E^* \subset E$ mulțimea acestor puncte; avem $T_n^k(z, E) \equiv T_n^k(z; E^*)$ ⁽²⁾. În punctele lui E^* vom avea $|P_p^k(z)| \rightarrow \mu_n^k(E)$ pentru $p \rightarrow \infty$, pe cînd în punctele mulțimii $E - E^*$ vom avea $\lim_{p \rightarrow \infty} |P_p^k(z)| < \mu_n^k(E)$.

² Una din Teoremele lui Ch. de la Vallée Poussin [1].

Notînd cu

$$K_v^{(p)} = \frac{|P_p^k(c_v)|^{2p-2}}{\sqrt[n-k]{\sum |P_p^k(c_{v_1}) \dots P_p^k(c_{v_{n-k}})|^{2p-2} \cdot |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}})|}},$$

din forma polinomului minimizant, se vede că avem

$$\sum K_{v_1}^{(p)} \cdot K_{v_2}^{(p)} \dots K_{v_{n-k}}^{(p)} |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}})|^2 = 1 \quad (11)$$

şi putem scrie

$$\begin{aligned} P_p^k(z) &= \\ &= \sum K_{v_1}^{(p)} \cdot K_{v_2}^{(p)} \dots K_{v_{n-k}}^{(p)} |V(c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k}})|^2 \cdot [\varphi(z) - L(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}; \varphi(z))] \end{aligned} \quad (12)$$

Însă numerele pozitive $K_{v_i}^{(p)}$ sînt identice cu cele găsite de către tov. Prof. Gh. Călugăreanu în lucrarea [1] amintită la început, în cazul determinării polinomului $T_{n-k}^0(z; E)$. Acolo s-a arătat că şirul produselor $\{K_{v_1}^{(p)} \cdot K_{v_2}^{(p)} \dots K_{v_{n-k}}^{(p)}\}$ este convergent pentru $p \rightarrow \infty$. Să notăm cu $K_{v_1} K_{v_2} \dots K_{v_{n-k}}$ limita acestui şir. Trecînd la limită în (12) pentru $p \rightarrow \infty$ vom avea

$$\begin{aligned} T_n^k(z; E) &= \\ &= \sum K_{v_1} \dots K_{v_{n-k}} |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}})|^2 [\varphi(z) - L(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}; \varphi(z))] \quad (13) \\ &\quad \sum K_{v_1} K_{v_2} \dots K_{v_{n-k}} |V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}})| = 1 \end{aligned}$$

Relaţia (13) în care coeficienţii $K_{v_i} \geq 0$, dă o formă specială polinomului $T_n^k(z; E)$, deoarece în membrul doi apar afixele punctelor mulţimii E şi polinoamele de interpolare ale lui Lagrange a funcţiei $\varphi(z)$ relativ la toate cele C_N^{n-k} combinaţii posibile de noduri $c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}$.

Aici ne putem limita la afixele mulţimii E^* , pentru că $T_n^k(z; E) = T_n^k(z; E^*)$. Aceasta revine la a spune că pentru $c_v \notin E - E^*$ se ia $K_v = 0$.

Însă se ştie deasemenea că avem şi $T_n^k(z; E) = T_n^k(z; E^{**})$, unde $E^{**} \subset E^* \subset E$, iar numărul punctelor N^{**} din E^{**} verifică relaţia $n - k + 1 < N^{**} < 2(n - k - 1) + 3 = 2(n - k) + 1$, şi ne-am putea limita în relaţia (3) la punctele din E^{**} . Dar atunci reprezentarea lui $T_n^k(z; E^{**})$ nu ar fi unică, fiindcă nici mulţimea E^{**} nu este, cum se ştie, unică (Vezi Monografia Prof. Gh. Călugăreanu „Polinoamele Cebîşev în domeniul complex” (manuscris)).

Expresia (13) se mai poate transforma, punîndu-se în evidenţă diferenţa divizată de ordinul $n - k$ a funcţiei $\varphi(z)$ pe grupuri de puncte $c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}$ din mulţimea E .

Avem

$$\begin{aligned} \varphi(z) - L[c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}; \varphi(z)] &= \frac{1}{V(c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k}})} \times \\ &\times [(-1)^{n-k} \varphi(c_{v_1}) \cdot V(c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}, z) + (-1)^{n-k+1} \varphi(c_{v_2}) \cdot V(c_{v_1}, c_{v_3}, \dots, c_{v_{n-k}}, z) + \\ &+ \dots + (-1)^{2(n-k)-1} \varphi(c_{v_{n-k}}) \cdot V(c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k-1}}, z) + (-1)^{2(n-k)} \varphi(z) V(c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k}})] = \\ &= \frac{D(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}, z; \varphi)}{V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}})} = \frac{D(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}, z; \varphi) \cdot (z - c_{v_1}) \dots (z - c_{v_{n-k}})}{V(c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}, z)} = \\ &= [c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}, z; \varphi] \cdot (z - c_{v_1}) (z - c_{v_2}) \dots (z - c_{v_{n-k}}). \end{aligned}$$

unde $[c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}, z; \varphi]$ reprezintă diferenţa divizată de ordinul $n - k$ a lui φ pe punctele $c_{v_1}, c_{v_2}, \dots, c_{v_{n-k}}, z$.

Prin urmare, polinomul Cebîşev k -restrîns mai poate fi pus sub forma:

$$\begin{aligned} T_n^k(z; E) &= \sum K_{v_1} K_{v_2} \dots K_{v_{n-k}} |V(c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k}})|^2 [c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k}}, z; \varphi] \cdot (z - c_{v_1}) \dots (z - c_{v_{n-k}}). \\ &\quad \sum K_{v_1} K_{v_2} \dots K_{v_{n-k}} |V(c_{v_1}, \dots, c_{v_{n-k}})|^2 = 1. \end{aligned} \quad (13')$$

Dacă se face acum în (13') $k = 0$, atunci $\varphi(z) = z^n$ şi regăsim formulele

$$\begin{aligned} T_n^0(z; E) &= \sum K_{v_1} K_{v_2} \dots K_{v_n} |V(c_{v_1}, \dots, c_{v_n})|^2 \cdot (z - c_{v_1}) (z - c_{v_2}) \dots (z - c_{v_n}) \\ &\quad \sum K_{v_1} K_{v_2} \dots K_{v_n} |V(c_{v_1}, \dots, c_{v_n})|^2 = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

date de către tov. prof. Gh. Călugăreanu ([1], p. 12).

Se poate extinde formula (13) sau (13') şi pentru cazul unei mulţimi mărginită şi închisă oarecare, exact la fel cum se face în lucrarea sus amintită în cazul polinomului nerestrîns $T_n^0(z; E)$. În această lucrare se arată şi un algoritm de calcul al mulţimii E^{**} .

5. Ca o aplicaţie, vom găsi expresia polinomului $T_n^k(z; E)$ în cazul cînd mulţimea E e formată din $N = n - k + 1$ puncte.

Punînd în (13) condiţia

$$\begin{aligned} |T_n^k(c_1)| &= |T_n^k(c_2)| = \dots = |T_n^k(c_N)| = \mu_n^k(E), \text{ vom avea (ţinînd cont de} \\ &\text{faptul că } \varphi(c_i) - L(c_1, \dots, c_i, \dots, c_{n-k}; \varphi(c_i)) = 0, i = 1, 2, \dots, n - k + 1), \\ &K_2 K_3 \dots K_{n-k+1} |V(c_2, c_3, \dots, c_{n-k+1})|^2 \cdot |\varphi(c_1) - L[c_2, \dots, c_{n-k+1}; \varphi(c_1)]| = \\ &K_1 K_3 \dots K_{n-k+1} |V(c_1, c_3, \dots, c_{n-k+1})|^2 \cdot |\varphi(c_2) - L[c_1, c_3, \dots, c_{n-k+1}; \varphi(c_2)]| = \dots \\ &K_1 K_2 \dots K_{n-k} |V(c_1, c_2, \dots, c_{n-k})|^2 \cdot |\varphi(c_{n-k+1}) - L[c_1, \dots, c_{n-k}; \varphi(c_{n-k+1})]| = \mu_n^k(E). \end{aligned}$$

Acest sistem, completat cu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-k+1} K_1 K_2 \dots K_{i-1} K_{i+1} \dots K_{n-k+1} |V(c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_{n-k+1})|^2 &= 1 \\ \text{ne dă polinomul } T_n^k(z; E) \text{ şi } \mu_n^k(E). \end{aligned}$$

О ПОЛИНОМАХ ЧЕБЫШЕВА k -УСЛОВНЫХ НА ЗАМКНУТОМ
И ОГРАНИЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ
(Краткое содержание)

1. Пусть E — конечное множество, составленное из N точек комплексной плоскости и $A_1, A_2, \dots, A_k$ — заданные фиксированные комплексные числа.

В этой работе обобщаются результаты работы тов. профессора Г. Кэлугэрян [1], рассматривая средние

$$J_p = \left(\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N |P(c_v)|^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}},$$

где $P(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_k z^{n-k} + a_{k+1} z^{n-k-1} + \dots + a_n$,

а $\{c_1, c_2, \dots, c_N\} = E$.

Пользуясь тем же методом, доказывается, что если $P_p^k(z)$ — многочлен вышеуказанной формы и имеющий степень n , для которого J_p достигает своего минимума для фиксированного p , тогда

$$\lim_{p \rightarrow \infty} P_p^k(z) = T_n^k(z; E); \quad \lim_{p \rightarrow \infty} j_p = \mu_n^k(E) = \max_{z \in E} |T_n^k(z; E)|,$$

где j_p наименьшее значение J_p , а $T_n^k(z; E)$ — многочлен Чебышева k -условный на множестве E .

2. Во второй части работы даётся для многочлена $T_n^k(z; E)$ специальная форма [выражение (13)], которая содержит положительные постоянные K_v , отыскание которых является алгебраической задачей. В случае $N = n - k + 1$ возможно дать подобную форму для $T_n^k(z, E_{n-k+1})$ [формула (17)].

При $k = 0$ получаются выражения многочленов Чебышева $T_n^0(z; E)$, данные в работе [1].

SUR LES POLYNOMES DE TCHEBYCHEF k -RESTREINTS À UN ENSEMBLE LIMITÉ
ET FERMÉ DU PLAN COMPLEXE
(Résumé)

1. Soit E un ensemble fini, formé de N points du plan complexe, et $A_1, A_2, \dots, A_k$ — des nombres complexes quelconques mais fixés d'avance.

L'auteur généralise dans cette étude les résultats du prof. Gh. Călugăreanu exposés dans [1], en étudiant les moyennes

$$J_p = \left(\frac{1}{N} \sum_{v=1}^N |P(c_v)|^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}}$$

où $P(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_k z^{n-k} + a_{k+1} z^{n-k-1} + \dots + a_n$, et

$$\{c_1, c_2, \dots, c_N\} = E.$$

En employant la même méthode, on démontre que, si $P_p^k(z)$ est le polynôme de degré n et de la forme donnée ci-dessus, qui réalise le minimum de J_p pour un p fixe, nous avons :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} P_p^k(z) = T_n^k(z; E), \quad \lim_{p \rightarrow \infty} j_p = \mu_n^k(E) = \max_{z \in E} |T_n^k(z; E)|,$$

où j_p est la valeur minima de J_p et $T_n^k(z, E)$ — le polynôme de Tchebycheff k — restreint à l'ensemble E .

2. Dans la seconde partie de l'étude l'auteur donne une forme spéciale pour le polynôme $T_n^k(z; E)$ (formule 13), qui contient des constantes réelles et positives K_v , dont la détermination constitue un problème algébrique. Dans le cas particulier où $N = n - k + 1$, on peut donner une forme explicite pour le polynôme $T_n^k(z; E_{n-k+1})$ (formule 17). En faisant $k = 0$, on obtient les expressions des polynômes Tchebycheff non restreints $T_n^0(z; E)$ donnés dans l'étude (1).