

RÉSULTATS COMPARATIFS CONCERNANT CERTAINS PROBLÈMES POLYLOCAUX RELATIFS AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES *)

PAR

OLEG ARAMĂ (Cluj)

Soit une équation différentielle linéaire et homogène

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0. \quad (1)$$

Dans le mémoire [14] CH. DE LA VALLÉ POUSSIN a établi le théorème suivant :

Supposant que les fonctions $a_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) sont continues dans un intervalle $[a, b]$, soit $L_i = \max_{x \in [a, b]} |a_i(x)|$ et soit h_0 la racine positive de l'équation

$$L_n \frac{h^n}{n!} + L_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + L_1 h - 1 = 0,$$

alors, n'importe de quelle manière on choisirait n points $M_i(x_i, y_i)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) du plan xOy , de manière que $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, $x_n - x_1 \leq h_0$, pour le choix fait, il existe une courbe intégrale de l'équation (1) et une seule, qui passe par les points $M_i(x_i, y_i)$.

Comme il est spécifié dans le mémoire cité, ce théorème s'étend également au cas où certains des nœuds $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont confondus par groupes, comme suit :

Soit un système de m nombres $p_1, p_2, \dots, p_m$, satisfaisant à la condition $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$. Si les coefficients de l'équation différentielle (1) sont des fonctions continues dans l'intervalle $[a, b]$, alors n'importe pas de quelle façon on choisirait m nœuds $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ de l'intervalle $[a, b]$ de manière que $x_m - x_1 \leq h_0$ et n'importe comment on choisirait les systèmes de nombres réels $\{y_1^{(0)}, \dots, y_1^{(p_1-1)}\}, \{y_2^{(0)}, \dots, y_2^{(p_2-1)}\}, \dots, \{y_m^{(0)}, \dots, y_m^{(p_m-1)}\}$,

*) Ce travail a paru sous une forme légèrement modifiée, en langue roumaine, dans la revue „Studii și cercetări de matematică (Cluj)”, tom. X, nr. 2 (1959).

pour un tel choix, l'équation différentielle (1) admet une intégrale et une seule $y(x)$, satisfaisant aux conditions :

$$y(x_k) = y_k^{(0)}, y'(x_k) = y_k^{(1)}, \dots, y^{(p_k-1)}(x_k) = y_k^{(p_k-1)}, (k = 1, 2, \dots, m). \quad (2)$$

Des énoncés améliorés du théorème de CH. DE LA VALLÉE POUSSIN ont été obtenus pour des équations différentielles du second ordre par PH. HARTMAN et A. WINTNER dans le travail [7] et par Z. OPIAL dans le travail [12]. Pour des équations différentielles linéaires d'un ordre quelconque n , des résultats ont été obtenus dans ce sens par S. ZAIDMAN [16] et tout récemment par A. IU. LÉVINE [10] et par G. A. BESSMERT-NICH et A. IU. LÉVINE dans le travail [5]. Nous citerons également le travail [6] de C. FOIAS, G. GUSSI et V. POENARU, dans lequel on indique une méthode de calcul approximatif à l'aide de laquelle on peut calculer avec une précision aussi grande qu'on le désire la longueur de l'intervalle maximal d'interpolation, à extrémité gauche fixée d'avance, dans le cas des équations différentielles linéaires du second ordre.

Dans ce qui suit, nous noterons par $H_{p_1, p_2, \dots, p_m}$ la borne supérieure des nombres positifs h , satisfaisant à l'inégalité $h \leq b - a$ et qui ont la propriété que quel que soit le choix de m nœuds $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ de l'intervalle $[a, b + h]$ et n'importe de quelle manière on choisirait les systèmes de nombres réels $\{y_k^{(0)}, \dots, y_k^{(p_k-1)}\}$ ($k = 1, 2, \dots, m$), il existe pour un tel choix une intégrale et une seule de l'équation différentielle (1) qui satisfasse aux conditions (2). Le théorème énoncé précédemment montre que l'ensemble de ces nombres h n'est pas vide. On constate facilement que la famille des intégrales de l'équation différentielle (1) possède la propriété d'interpolation (2) dans l'intervalle semi-ouvert $[a, a + H_{p_1, p_2, \dots, p_m})$ et, également, que cet intervalle a un caractère maximal dans $[a, b]$.

Considérons par la suite tous les systèmes possibles de nombres naturels $p_1, p_2, \dots, p_m$ satisfaisant à la condition $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$. À chaque système de ce genre correspondra, pour une même équation différentielle, un nombre $H_{p_1, p_2, \dots, p_m}$. Dans le cadre d'une séance de travail de la I-re Section de l'Institut de Calcul de Cluj, le prof. T. POPOVICIU a soulevé le problème de l'élaboration d'une étude comparative des nombres $H_{p_1, p_2, \dots, p_m}$ pour une même équation différentielle. Ce problème a été soulevé dans le but d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes, concernant les coefficients de l'équation différentielle, conditions qui puissent assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites polylonal à nœuds simples, dans un intervalle donné.

La présente recherche se situe dans le cadre de ce problème. Avant de passer à son exposé, nous tenons à mentionner que relativement au problème indiqué ci-dessus, des résultats ont été obtenus par G. MAM-MANA [11], par N. V. AZBELEV et Z. B. TSALIUK [4], V. A. KONDRATIEV [8, 9] et tout récemment par R. G. ALIEV dans le travail [1].

Nous supposons d'abord que l'équation différentielle donnée (1) ait les coefficients $a_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) continus dans un intervalle ouvert (a, b) . Nous noterons par $\mathfrak{Y}_n$ l'ensemble des intégrales de cette équation dans l'intervalle (a, b) . Nous commencerons par donner quelques définitions qui interviendront couramment dans l'exposé qui suit :

Définition 1. On dit que la famille $\mathfrak{Y}_n$ possède la propriété $I_n(a, b)$, c'est-à-dire qu'elle est interpolatrice de l'ordre n sur des nœuds simples dans l'intervalle (a, b) , si quels que soient les n nœuds distincts $x_1, x_2, \dots, x_n$, situés dans l'intervalle (a, b) et quelles que soient les valeurs réelles $y_1, y_2, \dots, y_n$, il existe une intégrale particulière et une seule $y(x) \in \mathfrak{Y}_n$, qui satisfasse aux conditions $y(x_i) = y_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Définition 2. Soit un système de m nombres naturels $p_1, p_2, \dots, p_m$, satisfaisant à la condition $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$. Nous disons que la famille $\mathfrak{Y}_n$ possède la propriété $I_{p_1, p_2, \dots, p_m}(a, b)$, si quels que soient les m nœuds distincts $x_1, x_2, \dots, x_m$ de l'intervalle (a, b) et quels que soient les systèmes de nombres réels

$$\{y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(p_1-1)}\}, \{y_2^{(0)}, y_2^{(1)}, \dots, y_2^{(p_2-1)}\}, \dots, \{y_m^{(0)}, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(p_m-1)}\},$$

il existe une intégrale et une seule $y(x) \in \mathfrak{Y}_n$, qui satisfasse aux conditions

$$y(x_k) = y_k^{(0)}, y'(x_k) = y_k^{(1)}, \dots, y^{(p_k-1)}(x_k) = y_k^{(p_k-1)} (k = 1, 2, \dots, m).$$

Définition 3. Nous disons que la famille $\mathfrak{Y}_n$ possède la propriété $I_n^*(a, b)$, si cette famille possède les propriétés $I_{p_1, p_2, \dots, p_m}(a, b)$, quel que soit le système de nombres naturels $p_1, p_2, \dots, p_m$ qui satisfasse à la condition $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$.

Observation. Dans les notations adoptées, les propriétés $I_n(a, b)$ et $I_{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n}(a, b)$ coïncident.

Nous établirons, dans ce qui suit, le théorème suivant :

Théorème 1. Si la famille $\mathfrak{Y}_n$ a la propriété $I_n(a, b)$, alors elle a également la propriété $I_n^*(a, b)$.

Pour faciliter l'exposé de la démonstration de ce théorème, nous énoncerons au préalable quelques lemmes.

Lemme 1. Soient m nombres naturels, $p_1, p_2, \dots, p_m$ donnés, satisfaisant à l'égalité $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$. La condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathfrak{Y}_n$ ait la propriété $I_{p_1, p_2, \dots, p_m}(a, b)$ est que l'équation différentielle (1) n'admette aucune intégrale non identiquement nulle, qui ait dans l'intervalle (a, b) m racines distinctes $x_1, x_2, \dots, x_m$, ayant les ordres de multiplicité ¹⁾ au moins égaux, respectivement, aux nombres $p_1, p_2, \dots, p_m$.

La démonstration de ce lemme est immédiate. De ce lemme résultent comme de cas particuliers, les lemmes 2 et 3 énoncés ci-dessous :

¹⁾ Par ordre de multiplicité d'une racine x_0 d'une fonction $y(x)$ on entend l'ordre strict de multiplicité ; ainsi x_0 est une racine multiple de l'ordre k pour la fonction $y(x)$ si l'on a les relations $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(k-1)}(x_0) = 0$, $y^{(k)}(x_0) \neq 0$.

Lemme 2. La condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathcal{Y}_n$ ait la propriété $I_n(a, b)$ est que l'équation différentielle (1) n'admette aucune intégrale non identiquement nulle, qui s'annule pour n valeurs distinctes dans l'intervalle (a, b) .

Lemme 3. La condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathcal{Y}_n$ ait la propriété $I_n^*(a, b)$ est que l'équation (1) n'admette aucune intégrale non identiquement nulle, qui ait n racines dans l'intervalle (a, b) , chaque racine étant comptée autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité.

Lemme 4. Si la famille $\mathcal{Y}_n$ a la propriété $I_n(a, b)$, alors chaque intégrale non identiquement nulle $y(x) \in \mathcal{Y}_n$, qui s'annule pour $n - 1$ valeurs distinctes dans l'intervalle (a, b) , a dans cet intervalle toutes les racines simples (c'est-à-dire du 1-er ordre).

Démonstration. La propriété formulée dans ce lemme est évidente pour $n = 2$. Nous considérerons donc $n \geq 3$. Nous supposons que $\mathcal{Y}_n$ ait la propriété $I_n(a, b)$. Soit $y_0(x)$ une intégrale non identiquement nulle de l'équation (1) qui a $n - 1$ racines distinctes $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ dans l'intervalle (a, b) .

Nous remarquons dès le début que l'intégrale $y_0(x)$ ne peut avoir d'autres racines distinctes dans l'intervalle (a, b) , puisque, au cas contraire, la propriété $I_n(a, b)$ de la famille $\mathcal{Y}_n$ serait contredite. Nous montrerons d'abord qu'aucune de ces racines ne peut avoir un ordre pair de multiplicité. En effet, supposons par l'absurde que parmi les $n - 1$ racines de l'intégrale $y_0(x)$ il y aurait une racine x_i ayant un ordre pair de multiplicité, c'est-à-dire

$$y_0(x_i) = y'_0(x_i) = \dots = y_0^{(2k-1)}(x_i) = 0, \quad y_0^{(2k)}(x_i) \neq 0, \quad (k \geq 1).$$

Puisque les racines d'une intégrale quelconque non identiquement nulle de l'équation (1) sont des points isolés, il résulte qu'il existerait un voisinage suffisamment proche $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ du point x_i , où la fonction $y_0(x)$ garderait un signe constant, à l'exception du point $x = x_i$, où elle s'annule. Pour plus de clarté, supposons que $y_0(x)$ soit positive dans les intervalles $(x_i - \delta, x_i)$ et $(x_i, x_i + \delta)$, fig. 1. Soit $\eta(x)$ une intégrale

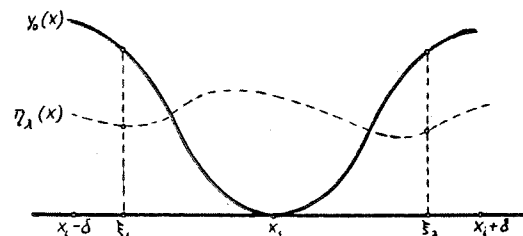


Fig. 1

de l'équation (1), qui s'annule pour toutes les racines de l'intégrale $y_0(x)$, à l'exception du point $x = x_i$, où elle prend la valeur 1 :

$$\left. \begin{aligned} \eta(x_1) &= \eta(x_2) = \dots = \eta(x_{i-1}) = 0 \\ \eta(x_i) &= 1 \\ \eta(x_{i+1}) &= \eta(x_{i+2}) = \dots = \eta(x_{n-1}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Une telle intégrale qui satisfasse aux conditions (3) existe, puisque, par hypothèse, la famille $\mathcal{Y}_n$ a la propriété $I_n(a, b)$. Soient ensuite ξ_1 et ξ_2 , deux nombres quelconques, satisfaisant respectivement aux inégalités $x_i - \delta < \xi_1 < x_i < \xi_2 < x_i + \delta$. Il est évident que les inégalités $y_0(\xi_1) > 0, y_0(\xi_2) > 0$ auront lieu. Considérons la fonction $\eta_\lambda(x) = \lambda \eta(x)$, où λ est un facteur positif, suffisamment petit pour qu'aient lieu simultanément les inégalités

$$\eta_\lambda(\xi_1) < y_0(\xi_1), \quad \eta_\lambda(\xi_2) < y_0(\xi_2). \quad (4)$$

Étant donné que $\eta(x_i) = 1$, il résulte que $\eta_\lambda(x_i) = \lambda > 0$, et comme $y_0(x_i) = 0$, il s'ensuit l'inégalité $\eta_\lambda(x_i) > y_0(x_i)$. De cette inégalité, ainsi que de (4), il s'ensuit que dans l'intervalle $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ les courbes d'équations $y = y_0(x)$ et $y = \eta_\lambda(x)$ s'intersectent au moins dans deux points distincts. Il résulte de ce fait et de (3) que l'intégrale $y^*(x) = \eta_\lambda(x) - y_0(x)$ s'annulera dans les points $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}$ et encore au moins dans deux autres points distincts, situés dans l'intervalle $(x_i - \delta, x_i + \delta)$. Donc $y^*(x)$ s'annule au moins dans n points distincts de l'intervalle (a, b) . Nous remarquerons, en outre, que l'intégrale $y^*(x)$ ne peut être identiquement nulle dans (a, b) puisque $y^*(x_i) = \lambda > 0$. Étant donné que, par hypothèse, la famille $\mathcal{Y}_n$ a la propriété $I_n(a, b)$, il s'ensuit que l'équation différentielle (1) ne peut admettre aucune intégrale particulière non identiquement nulle, qui s'annule dans n points distincts de l'intervalle (a, b) . Nous sommes arrivés ainsi à une contradiction, qui provient de l'hypothèse absurde que l'intégrale non identiquement nulle $y_0(x)$ aurait parmi ses $n - 1$ racines distinctes de (a, b) au moins une racine d'ordre pair. Il résulte donc que si la famille $\mathcal{Y}_n$ a la propriété $I_n(a, b)$, alors toute intégrale non identiquement nulle $y_0(x)$, qui s'annule pour $n - 1$ valeurs distinctes de l'intervalle (a, b) a toutes les racines de cet intervalle d'ordre impair.

Nous montrerons, en outre, que toutes les racines de l'intervalle (a, b) d'une telle intégrale $y_0(x)$ sont simples (c'est-à-dire du 1-er ordre). En effet, supposons par l'absurde qu'une intégrale non identiquement nulle $y_0(x) \in \mathcal{Y}_n$, qui a $n - 1$ racines distinctes dans l'intervalle (a, b) , aurait parmi celles-ci au moins une d'un ordre plus grand ou au moins égal à 3. Soit x_i une telle racine. Donc

$$y_0(x_i) = y'_0(x_i) = y''_0(x_i) = 0. \quad (5)$$

Soit, également, $\eta_\varepsilon(x)$ une intégrale de l'équation (1) qui vérifie dans le point x_i , les conditions suivantes de CAUCHY :

$$\left. \begin{aligned} \eta_\varepsilon(x_i) &= \eta'_\varepsilon(x_i) = 0 \\ \eta''_\varepsilon(x_i) &= \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0) \\ \eta'''_\varepsilon(x_i) &= y'''_0(x_i) \\ &\dots \dots \dots \\ \eta_\varepsilon^{(n-1)}(x_i) &= y_0^{(n-1)}(x_i). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

En tenant compte de (5), il s'ensuit de (6) que dans le point $x = x_i$, les fonctions $y_0(x)$ et $\eta_\varepsilon(x)$ diffèrent seulement par les valeurs des dérivées du deuxième ordre et que les valeurs de ces dérivées peuvent être aussi proches que l'on veut, si ε est suffisamment petit. Faisons en sorte que ε tende vers 0^+ . Alors, comme on le sait, $\eta_\varepsilon(x)$ convergera uniformément vers $y_0(x)$ dans tout intervalle fermé $[a_1, b_1]$, compris dans l'intervalle (a, b) . En notant par $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ les racines de (a, b) de

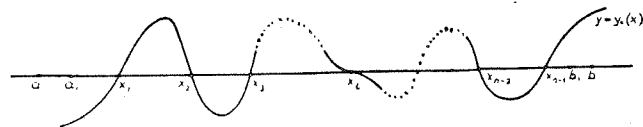


Fig. 2

la fonction $y_0(x)$, nous prendrons les nombres a_1 et b_1 de manière que $a < a_1 < x_1$ et $x_{n-1} < b_1 < b$, et par ce choix, toutes les $n-1$ racines en cause de la fonction $y_0(x)$ seront situées dans le sous-intervalle (a_1, b_1) . Puisque, par hypothèse, chacune des racines $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ est d'ordre impair, il résulte que dans chacune de ces racines, la courbe d'équation $y = y_0(x)$ traverse l'axe Ox (fig. 2). En tenant compte du fait que la fonction $\eta_\varepsilon(x)$ tend uniformément dans l'intervalle $[a_1, b_1]$ vers la fonction $y_0(x)$, alors lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, il résulte que pour des valeurs suffisamment petites du paramètre ε , la courbe d'équation $y = \eta_\varepsilon(x)$ traversera elle aussi l'axe Ox dans au moins $n-1$ points distincts $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ de l'intervalle (a_1, b_1) . En effet, du fait que la fonction $\eta_\varepsilon(x)$ tend uniformément dans l'intervalle $[a_1, b_1]$ vers la fonction $y_0(x)$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, il s'ensuit que étant donné un nombre positif arbitraire δ , à ce nombre correspond un seuil $E(\delta)$, tel que pour tout ε satisfaisant à l'inégalité $0 < \varepsilon < E(\delta)$ aient lieu les relations

$$y_0(x) - \delta \leq \eta_\varepsilon(x) \leq y_0(x) + \delta, \quad (7)$$

quel que soit $x \in [a_1, b_1]$. Soient les nombres M_i définis comme suit :

$$M_i = \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |y_0(x)|, \quad (i = 1, 2, \dots, n-2); \quad M_0 = \max_{x \in [a_1, x_1]} |y_0(x)|;$$

$$M_{n-1} = \max_{x \in [x_{n-1}, b_1]} |y_0(x)|.$$

Considérons dans (7) le nombre δ tel que

$$0 < \delta < \min_{i=0,1,\dots,n-1} \{M_i\} = M. \quad (8)$$

En prenant maintenant ε de telle manière qu'il satisfasse à l'inégalité $0 < \varepsilon < E(M)$, et en tenant compte des inégalités (7), on constatera sur la figure 2 que dans l'intervalle (a_1, b_1) , la courbe d'équation $y = \eta_\varepsilon(x)$,

correspondant au nombre ε choisi, traversera l'axe Ox , au moins $n-1$ fois, et par conséquent, l'intégrale $\eta_\varepsilon(x)$, s'annulera dans l'intervalle (a_1, b_1) pour au moins n valeurs distinctes. Mais comme on constate de (6), quelle que soit la valeur du paramètre ε , l'intégrale $\eta_\varepsilon(x)$ a une racine double, notamment $x = x_i$. On déduit, toujours de (6) que l'intégrale $\eta_\varepsilon(x)$ ne peut être indistinctement nulle, puisque l'on a estimé que $\varepsilon > 0$. Ces résultats contredisent pourtant un fait établi précédemment, à savoir que dans l'hypothèse que $\mathfrak{Y}_n$ a la propriété $I_n(a, b)$, toute intégrale non identiquement nulle de l'équation (1), qui s'annule dans $n-1$ points distincts de (a, b) , a toutes les racines de cet intervalle impaires. En conclusion, l'intégrale $y_0(x)$ considérée antérieurement, ne peut avoir dans l'intervalle (a, b) aucune racine d'ordre supérieur ou au moins égal à 3, donc le lemme est démontré.

Lemme 5. Si $\mathfrak{Y}_n$ a la propriété $I_n(a, b)$, alors $\mathfrak{Y}_n$ a les propriétés $I_{p_1, p_2, \dots, p_m}(a, b)$, où $p_1, p_2, \dots, p_m$ sont des nombres naturels quelconques, satisfaisant aux conditions $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$ et $\max \{p_1, p_2, \dots, p_m\} = 2$.

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{Y}_n$ ait la propriété $I_n(a, b)$. Nous remarquons dès le début que pour la démonstration de ce lemme, on peut supposer qu'au moins deux des nombres $p_1, p_2, \dots, p_m$ sont plus grands que le nombre 1. En effet, il résulte de l'hypothèse $\max \{p_1, p_2, \dots, p_m\} = 2$ qui intervient dans l'énoncé du lemme 5, qu'au moins un des nombres p_i est égal à 2. Puis, si seulement un des nombres p_i était plus grand que 1, nous aurions $m = n-1$, et la propriété correspondante $I_{p_1, p_2, \dots, p_m}(a, b)$ résulterait aussitôt de l'application successive des lemmes 1 et 4. En effet, en supposant par l'absurde que l'on n'aurait pas la propriété respective $I_{p_1, p_2, \dots, p_m}(a, b)$, il s'ensuivrait, conformément au lemme 1, que l'équation différentielle (1) admettrait une intégrale non identiquement nulle, qui aurait, dans l'intervalle (a, b) , $n-1$ racines distinctes, l'une au moins de ces racines ayant un ordre de multiplicité supérieur ou au moins égal à 2. Cette circonstance contredirait pourtant l'affirmation du lemme 4.

Nous supposons donc pour la démonstration du lemme 5 qu'au moins deux des nombres p_i sont égaux à 2, d'où, tenant compte de la condition $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$, il résulte l'inégalité $m < n-1$.

Soit donc $p_1, p_2, \dots, p_m$ un système quelconque de m nombres naturels satisfaisant aux conditions :

$$\left. \begin{aligned} m &< n-1 \\ p_1 + p_2 + \dots + p_m &= n \\ \max \{p_1, p_2, \dots, p_m\} &= 2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ce système de nombres est arbitraire mais, le choix en étant une fois fait, nous supposons qu'il est fixé pour ce qui suit.

Ces précisions étant faites, supposons contrairement à l'affirmation du lemme 5 que $\mathfrak{Y}_n$ n'aurait pas la propriété $I_{p_1, p_2, \dots, p_m}(a, b)$ où $p_1, p_2, \dots, p_m$ sont des nombres naturels choisis en respectant les conditions (9). Alors, conformément au lemme 1, il résulte que l'équation (1) admettra au moins une intégrale non identiquement nulle $y_0(x)$, qui ait dans l'intervalle

$$y'_0(x_{j_{k_1}}) \neq 0, y'_0(x_{j_{k_2}}) \neq 0, \dots, y'_0(x_{j_{k_r}}) \neq 0.$$

Mais, comme on déjà l'a montré, les nombres $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \dots, x_{j_{k_\gamma}}$ représentent des racines simples également pour l'intégrale $\bar{\eta}(x)$ et, donc, pour $\varepsilon \bar{\eta}(x)$ quelle que soit la valeur du paramètre $\varepsilon > 0$;

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(x_{j_{k_1}}) &= \bar{\eta}(x_{j_{k_2}}) = \dots = \bar{\eta}(x_{j_{k_\gamma}}) = 0 \\ \bar{\eta}'(x_{j_{k_1}}) &\neq 0, \bar{\eta}'(x_{j_{k_2}}) \neq 0, \dots, \bar{\eta}'(x_{j_{k_\gamma}}) \neq 0. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que les fonctions $y'_0(x)$ et $\bar{\eta}'(x)$ ne s'annulent pas pour les valeurs $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \dots, x_{j_{k_\gamma}}$, il résulte que si le paramètre ε prend des valeurs inférieures à un certain seuil, alors auront lieu les relations

$$y'_0(x_{j_{k_1}}) \neq \varepsilon \bar{\eta}'(x_{j_{k_1}}), \dots, y'_0(x_{j_{k_\gamma}}) \neq \varepsilon \bar{\eta}'(x_{j_{k_\gamma}}).$$

Il s'ensuit que pour de telles valeurs du paramètre ε , les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersectent dans les points $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \dots, x_{j_{k_\gamma}}$, se traversent l'une l'autre dans ces points.

Ensuite, pour les points $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \dots, x_{j_{l_\delta}}$, aura lieu la propriété suivante : Si le paramètre ε prend des valeurs positives, inférieures à un certain seuil, alors, dans chacun des voisinages donnés suffisamment petits :

$$(x_{j_{l_1}} - \varepsilon_{l_1}, x_{j_{l_1}} + \varepsilon_{l_1}), (x_{j_{l_2}} - \varepsilon_{l_2}, x_{j_{l_2}} + \varepsilon_{l_2}), \dots, (x_{j_{l_\delta}} - \varepsilon_{l_\delta}, x_{j_{l_\delta}} + \varepsilon_{l_\delta}),$$

les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersecteront dans au moins trois points distincts. En effet, les nombres $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \dots, x_{j_{l_\delta}}$ représentent des racines simples pour l'intégrale $\bar{\eta}(x)$ (comme on l'a montré ci-dessus) et des racines multiples d'ordre impair, supérieur ou au moins égal à 3 pour l'intégrale $y_0(x)$, (ceci, par hypothèse). Soit $x_{i_{l_1}}$ l'un de ces points. Supposons, pour

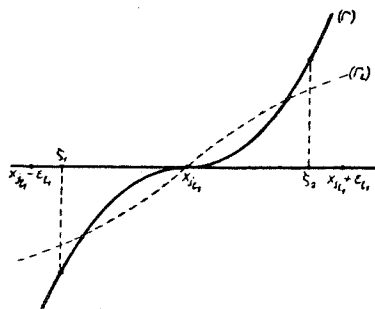


Fig. 3

fixer les idées, que dans un voisinage de ce point, la fonction $y_0(x)$ est croissante (fig. 3). Soient ensuite ζ_1 et ζ_2 deux nombres, satisfaisant aux inégalités :

$$x_{i_{l_1}} - \varepsilon_{l_1} < \zeta_1 < x_{i_{l_1}} < \zeta_2 < x_{i_{l_1}} + \varepsilon_{l_1}.$$

Etant donné que les égalités (14) ont lieu, il résulte qu'il existe un seuil E_1 , tel que pour $\varepsilon < E_1$ aient lieu les inégalités :

$$\begin{aligned} y_0(\zeta_1) &\leq \varepsilon \bar{\eta}(\zeta_1), \\ y_0(\zeta_2) &\geq \varepsilon \bar{\eta}(\zeta_2). \end{aligned} \quad (15)$$

D'autre part, en tenant compte du fait que $x_{i_{l_1}}$ est une racine commune à $y_0(x)$ et à $\bar{\eta}(x)$, il s'ensuit que les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersectent dans le point $x_{i_{l_1}}$, quelle que soit la valeur du paramètre ε .

Développant ensuite les fonctions $y_0(x)$ et $\varepsilon \bar{\eta}(x)$, selon la formule de Taylor, dans le point $x_{i_{l_1}}$ et tenant compte des ordres de multiplicité de

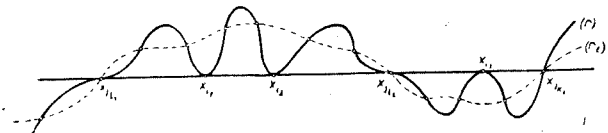


Fig. 4

la racine $x_{i_{l_1}}$ relativement à ces deux fonctions, on constate que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe pour celui-ci un sous-voisinage suffisamment petit du point $x_{i_{l_1}}$, de sorte que la courbe (Γ) se situe au dessous de la courbe (Γ_ε) , pour les valeurs $x > x_{i_{l_1}}$, de ce sous-voisinage, et au-dessus de la courbe (Γ_ε) pour $x < x_{i_{l_1}}$ (fig. 3). En partant de cela et de (15), on déduit que quel que soit ε satisfaisant aux inégalités $0 < \varepsilon < E_1$, les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersectent dans l'intervalle $(x_{i_{l_1}} - \varepsilon_{l_1}, x_{i_{l_1}} + \varepsilon_{l_1})$ dans au moins trois points distincts, se traversant l'une l'autre dans ces points.

Des conclusions analogues sont formulées pour chacune des racines $x_{j_{l_2}}, x_{j_{l_3}}, \dots, x_{j_{l_\delta}}$.

On observe ensuite que dans chacun des voisinages suffisamment petits des points $x_{i_{l_1}}, x_{i_{l_2}}, \dots, x_{i_{l_\delta}}$, pour des valeurs positives suffisamment petites du paramètre ε , les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersectent dans au moins 2 points, se traversant l'une l'autre dans ces points (fig. 4).

Nous obtenons, en définitive, le résultat suivant :

Si le paramètre ε prend des valeurs positives suffisamment petites, alors les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersecteront comme suit : dans au moins 2α points distincts, qui se forment dans des voisinages des racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$, ensuite dans 3δ points distincts, qui se forment dans des voisinages des racines $x_{j_{l_1}}, x_{j_{l_2}}, \dots, x_{j_{l_\delta}}$, et s'intersecteront encore dans les points $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \dots, x_{j_{k_\gamma}}$ au nombre de γ .

Donc, si le paramètre positif ε est suffisamment petit, le nombre des points d'intersection des courbes (Γ) et (Γ_ε) sera supérieur ou au moins égal à $N = 2\alpha + \gamma + 3\delta$. En tenant compte de la 2-e et de la 3-e relation de (9), ainsi, que des inégalités (10), nous déduisons que

$$2\alpha + \gamma + 3\delta \geq p_1 + p_2 + \dots + p_m = n.$$

Il s'ensuit que le nombre N des points distincts d'intersection des courbes (Γ) , et (Γ_ε) , de l'intervalle (a, b) , satisfait à l'inégalité $N \geq n$ et,

²⁾ La démonstration de la propriété que l'intégrale $\widetilde{y}_\varepsilon(x)$ n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle (a, b) se fait tout comme pour le lemme 5.

distinctes. Ce résultat contredirait la propriété $I_n(a, b)$ de la famille $\mathfrak{Y}_n$, étant donné que l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle (a, b) . Il résulte, en définitive, la propriété (20).

Plus encore, nous montrerons maintenant que dans les hypothèses du lemme 6, quelle que soit la racine paire x_i de l'intervalle (a, b) , de l'intégrale $y_0(x)$, pour cette racine a lieu l'égalité $\pi_i = p_i$.

En effet, l'inégalité $\pi_i \geq p_i$ est évidente. Supposons, par l'absurde, qu'il existerait dans l'intervalle (a, b) au moins une racine paire x_{i_0} de l'intégrale $y_0(x)$, dont l'ordre π_{i_0} , satisfasse à l'inégalité stricte $\pi_{i_0} > p_{i_0}$. Nous montrerons qu'une telle hypothèse mène à l'absurde. En effet, nous observerons d'abord que de l'inégalité $\pi_{i_0} > p_{i_0}$, compte tenu du fait que les nombres π_{i_0} et p_{i_0} ont la même parité, il résulte la relation

$$\pi_{i_0} \geq p_{i_0} + 2 = 4. \quad (21)$$

Une telle relation, au cas où $n \leq 4$, est absurde.

Supposons, à présent que $n \geq 5$.

Nous diviserons l'ensemble des racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ de l'intégrale $y_0(x)$, de l'intervalle (a, b) , en deux sous-ensembles. Dans le premier sous-ensemble nous considérerons les racines d'ordre pair, que nous noterons par $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$ et dans le second sous-ensemble nous considérerons les racines d'ordre impair, que nous noterons par $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_\beta}$. Il est évident que $\alpha + \beta = m$. Nous distinguerons deux cas :

Premier cas : $\alpha = 1, \beta = m - 1, (n \geq 5)$.

Supposons que l'équation différentielle (1) ait, dans l'intervalle (a, b) , une seule racine d'ordre pair, x_{i_0} , et que l'ordre π_{i_0} de cette racine satisfait à l'inégalité (21). Toutes les autres racines de l'intervalle (a, b) de l'intégrale $y_0(x)$ étant supposées impaires, seront donc simples, conformément à la propriété (19) établie antérieurement. Compte tenu de la propriété (19) ainsi que des inégalité (17), nous déduisons que le nombre de ces racines est $\beta = n - 3$. Dans chacune d'entre elles, la courbe d'équation $y = y_0(x)$ traversera l'axe Ox .

Soit ε un nombre positif et soit $\mu_\varepsilon(x)$ l'intégrale de l'équation différentielle (1), qui satisfait dans le point x_{i_0} aux conditions suivantes de CAUCHY :

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon(x_{i_0}) &= y_0(x_{i_0}) = 0, \mu'_\varepsilon(x_{i_0}) = y'_0(x_{i_0}) = 0, \mu''_\varepsilon(x_{i_0}) = y''_0(x_{i_0}) = 0 \\ \mu'''_\varepsilon(x_{i_0}) &= \varepsilon \\ \mu^{(IV)}_\varepsilon(x_{i_0}) &= y^{(IV)}_0(x_{i_0}), \dots, \mu^{(n-1)}_\varepsilon(x_{i_0}) = y^{(n-1)}_0(x_{i_0}). \end{aligned} \quad (22)$$

On voit de ces formules que l'intégrale $\mu_\varepsilon(x)$ satisfait au point x_{i_0} aux mêmes conditions de CAUCHY que $y_0(x)$, à l'exception de la dérivé du troisième ordre, qui prend au ce point la valeur ε .

Si le paramètre prend des valeurs positives suffisamment petites, alors les conditions de CAUCHY, satisfaites par l'intégrale $\mu_\varepsilon(x)$ sont proches des conditions de CAUCHY satisfaites par l'intégrale $y_0(x)$ et s'il tend vers zéro, alors la fonction $\mu_\varepsilon(x)$ tendra uniformément vers $y_0(x)$, dans tout sous-intervalle fermé $[a_1, b_1]$ contenu par (a, b) .

Etant donné que la courbe d'équation $y = y_0(x)$ traverse l'axe Ox dans chacun des points $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$, il résulte que quelque petits que soient choisis certains voisinages de ces points, il existe pour eux un seuil E , de manière que, quel que soit le nombre positif $\varepsilon < E$, la courbe intégrale correspondante $y = \mu_\varepsilon(x)$ traverse l'axe Ox , dans chacun des voisinages choisis. Nous noterons les abscisses de ces points d'intersection respectivement par $\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_\beta}$. Outre ces racines, l'intégrale $\mu_\varepsilon(x)$ admet encore la racine x_{i_0} , ayant l'ordre de multiplicité 3, ce qui se constate dès formules (22). Il résulte, en définitive, que l'intégrale $\mu_\varepsilon(x)$ a, dans l'intervalle (a, b) , une racine triple x_{i_0} et, de plus d'autres β racines distinctes $\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_\beta}$, différentes de x_{i_0} et ayant des ordres impairs de multiplicité. Pour ces $\beta + 1$ racines de l'intégrale $\mu_\varepsilon(x)$ sont satisfaites les conditions (16) et (17), si on choisit $\bar{p}_{i_0} = 2$ et $\bar{p}_{i_1} = \bar{p}_{i_2} = \dots = \bar{p}_{i_\beta} = 1$, et si l'on tient compte que dans le premier cas considéré, $\beta = n - 3$. On constate également que l'intégrale $\mu_\varepsilon(x)$ ne peut avoir dans l'intervalle (a, b) d'autres racines distinctes que $\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_\beta}$ et x_{i_0} . En effet, au cas contraire, le nombre total des racines distinctes qu'aurait dans l'intervalle (a, b) l'intégrale non identiquement nulle $\mu_\varepsilon(x)$ serait au moins égale à $n - 1$, et conformément au lemme 4, il s'ensuirait que toutes ses racines sont simples. Cette propriété est toutefois en contradiction avec l'existence pour l'intégrale $\mu_\varepsilon(x)$ de la racine triple x_{i_0} . Dans ces conditions, l'intégrale $\mu_\varepsilon(x)$ jouit de la propriété (19), selon laquelle toutes les racines d'ordre impair d'une telle intégrale non identiquement nulle doivent être simples. Il résulte, en définitive, que la racine x_{i_0} de l'intégrale $y_0(x)$ ne peut avoir l'ordre de multiplicité plus grand que 2 et, de là, que $\pi_i = p_i$.

Deuxième cas : $\alpha \geq 2, (n \geq 5)$.

Dans ce cas, en tenant compte des égalités (17), ainsi que des propriétés (19) et (20), il résulte que $\beta \leq n - 5$. Soit maintenant le nombre $\nu = (n - 1) - \beta - 2$. Compte tenu que $\beta \leq n - 5$, il s'ensuit l'inégalité $\nu \geq 2$. Nous supposerons que les racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ sont écrites en ordre croissant : $x_1 < x_2 < \dots < x_m$. Nous choisissons dans l'intervalle (x_m, b) , ν nœuds distincts $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$. Puisque l'intégrale $y_0(x)$ n'a pas dans l'intervalle (a, b) d'autres racines distinctes outre $x_1, x_2, \dots, x_m$, (fait établi précédemment), il résulte qu'aucun des nœuds choisis $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$ ne peut coïncider avec une racine de l'intégrale $y_0(x)$. Soit $\mu(x)$ une intégrale non identiquement nulle de l'équation (1), qui satisfait aux conditions :

$$\begin{aligned} \mu(x_{i_0}) &= \mu'(x_{i_0}) = 0 \\ \mu(x_{i_1}) &= \mu(x_{i_2}) = \dots = \mu(x_{i_\beta}) = 0 \\ \mu(\xi_1) &= \mu(\xi_2) = \dots = \mu(\xi_\nu) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Le nombre de ces conditions d'annulation étant $2 + \beta + \nu = n - 1$, il résulte, en vertu du lemme 5, l'existence d'une telle intégrale non identiquement nulle, satisfaisant aux condition (23). Cette intégrale ne peut pas

avoir dans l'intervalle (a, b) d'autres racines distinctes que $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\gamma$ et x_{i_0} . En effet, au cas contraire, le nombre total des racines distinctes qu'aurait dans cet intervalle l'intégrale non identiquement nulle $\mu(x)$ serait supérieur ou au moins égal à $n - 1$ et, conformément au lemme 4, il résulterait que toutes ses racines sont simples. Cela contredirait la première suite d'égalités de (23). D'autre part, nous observons que les conditions (23), satisfaites par l'intégrale non identiquement nulle $\mu(x)$, ont la forme des conditions (16) et (17) auxquelles satisfait l'intégrale $y_0(x)$. Dans ces circonstances, sont valables pour l'intégrale $\mu(x)$, les propriétés (19) et (20), en vertu desquelles toutes les racines de l'intégrale $\mu(x)$, à l'exception de la racine x_{i_0} sont simples, et la racine x_{i_0} a un ordre pair de multiplicité. Nous arrivons ainsi à la constatation que l'intégrale $\mu(x)$ satisfait toutes les conditions analogues aux conditions satisfaites par l'intégrale $y_0(x)$ dans le premier cas, traité ci-dessus. En nous fondant sur les résultats obtenus à l'occasion de l'étude du premier cas, nous pouvons affirmer que la racine paire x_{i_0} de l'intégrale $\mu(x)$, doit être de l'ordre 2 :

$$\mu(x_{i_0}) = \mu'(x_{i_0}) = 0, \mu''(x_{i_0}) \neq 0. \quad (24)$$

Il s'ensuit des considérations ci-dessus que la courbe intégrale d'équation $y = \mu(x)$ traverse l'axe Ox dans chacun des racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\gamma$, et se situe du même côté de l'axe Ox dans un voisinage suffisamment petites de la racine x_{i_0} .

D'autre part, en nous référant à l'intégrale $y_0(x)$, toujours en vertu de la propriété (19), nous pouvons affirmer que les racines impaires $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$ doivent nécessairement être simples pour $y_0(x)$. Les autres racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$ ont des ordres pairs de multiplicité et, parmi ces racines, se trouve également la racine x_{i_0} , qui a l'ordre π_{i_0} satisfaisant à l'inégalité (21). Il en résulte que la courbe intégrale d'équation $y = y_0(x)$ traverse aussi l'axe Ox dans chacune des racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$ et se situe de même côté de l'axe Ox , dans le voisinage de chacune des racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$. En tenant compte de ces propriétés établies pour les intégrales $\mu(x)$ et $y_0(x)$, ainsi que du fait que toutes les racines $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\gamma$ de l'intégrale $\mu(x)$ sont situées en dehors de l'intervalle $[x_1, x_m]$, il s'ensuit que si la variable x croît de la valeur a à la valeur b , alors, au moins pour une des intégrales $\mu(x)$ ou $-\mu(x)$, le sens du changement de son signe, en chacune des racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$, coïncidera au sens du changement du signe de l'intégrale $y_0(x)$ en chacune de ces racines. Notons par $\bar{\mu}(x)$ celle des intégrales $\mu(x)$ et $-\mu(x)$, pour laquelle cette condition est remplie, c'est-à-dire pour laquelle, dans des voisinages suffisamment petits de nombres $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$ ont lieu les égalités :

$$\operatorname{sgn} \{\bar{\mu}(x)\} = \operatorname{sgn} \{y_0(x)\}, \begin{pmatrix} x \in [x_{i_1} - \varepsilon_1, x_{i_1} + \varepsilon_1] \\ \dots \\ x \in [x_{i_\beta} - \varepsilon_\beta, x_{i_\beta} + \varepsilon_\beta] \end{pmatrix} \quad (25)$$

Ici, les intervalles $[x_{i_1} - \varepsilon_1, x_{i_1} + \varepsilon_1], \dots, [x_{i_\beta} - \varepsilon_\beta, x_{i_\beta} + \varepsilon_\beta]$ sont choisis suffisamment petits, de manière à être contenus dans (a, b) et qu'il ne contiennent pas d'autres racines de l'intégrale $y_0(x)$ que, respectivement, $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$.

En tenant compte du fait établi antérieurement que l'intégrale $\bar{\mu}(x)$ n'a pas dans l'intervalle (a, b) d'autres racines distinctes que $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\gamma$ (du premier ordre), ainsi que la racine paire x_{i_0} , il résulte que l'égalité (25) aura lieu aussi dans des voisinages suffisamment petits des racines paires $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$ de l'intégrale $y_0(x)$, à l'exception, éventuellement, des centres de ces voisinages. Notons par (Γ) la courbe d'équation $y = y_0(x)$ et par (Γ_ε) la courbe d'équation $y = \varepsilon \bar{\mu}(x)$, où ε est un paramètre prenant des valeurs positives.

On constate facilement qu'il existe un seuil E_1 , de manière que si $\varepsilon < E_1$, alors dans chacun des points $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$ les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersectent, se traversant l'une l'autre. (Cette affirmation résulte du fait que les nombres $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$ sont des racines simples pour chacune des intégrales $y_0(x)$ et $\bar{\mu}(x)$).

Choisissant ensuite des voisinages suffisamment petits des racines paires $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$, à l'exception de la racine x_{i_0} , il existe pour eux un seuil E_2 , tel que, quel que soit ε satisfaisant aux inégalités $0 < \varepsilon < E_2$, les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersectent dans chacun des voisinages considérés, dans deux points distincts, se traversant l'une l'autre dans ces points.

En ce qui concerne le point x_{i_0} , compte tenu des relations (24) et (21), nous constatons que la courbe d'équation $y = \bar{\mu}(x)$ a dans x_{i_0} un contact du premier ordre avec l'axe Ox ,

$$\mu(x_{i_0}) = \bar{\mu}'(x_{i_0}) = 0, \bar{\mu}''(x_{i_0}) \neq 0, \quad (24')$$

tandis que la courbe d'équation $y = y_0(x)$ a dans x_{i_0} un contact d'ordre impair ≥ 3 avec l'axe Ox ,

$$y_0(x_{i_0}) = y_0'(x_{i_0}) = y_0''(x_{i_0}) = \dots = y_0^{(\pi_{i_0}-1)}(x_{i_0}) = 0 \quad (26)$$

$$y_0^{(\pi_{i_0})}(x_{i_0}) \neq 0.$$

Soit un intervalle fermé $[x_{i_0} - \varepsilon_{i_0}, x_{i_0} + \varepsilon_{i_0}]$ choisi suffisamment petit, pour qu'il soit contenu dans (a, b) et ne contienne aucune autre racine de l'intégrale $y_0(x)$, ou de l'intégrale $\bar{\mu}(x)$. De la manière dont l'intégrale $\bar{\mu}(x)$ a été choisie parmi les intégrales $\mu(x)$ et $-\mu(x)$, il s'ensuit que si le voisinage $[x_{i_0} - \varepsilon_{i_0}, x_{i_0} + \varepsilon_{i_0}]$ du point x_{i_0} est suffisamment petit, alors les courbes d'équation $y = y_0(x)$ et $y = \bar{\mu}(x)$ se situeront de même côté de l'axe Ox , c'est-à-dire qu'aura lieu l'égalité

$$\operatorname{sgn} \{y_0(x)\} = \operatorname{sgn} \{\bar{\mu}(x)\}, x \in [x_{i_0} - \varepsilon_{i_0}, x_{i_0} + \varepsilon_{i_0}]. \quad (25')$$

Supposons, pour fixer les idées, que $\bar{\mu}''(x_{i_0}) > 0$. Il s'ensuit en vertu des relations (24') et (25') que $\operatorname{sgn} \{y_0(x)\} = \operatorname{sgn} \{\bar{\mu}(x)\} = 1$, lorsque $x \in [x_{i_0} - \varepsilon_{i_0}, x_{i_0}]$ et lorsque $x \in [x_{i_0}, x_{i_0} + \varepsilon_{i_0}]$, fig. 5.

Nous démontrerons dans ce qui suit qu'il existe un seuil E_3 de sorte que si ε satisfait aux inégalités $0 < \varepsilon < E_3$, alors dans le voisinage $[x_{i_0} - \varepsilon_{i_0}, x_{i_0} + \varepsilon_{i_0}]$ les courbes d'équation $y = y_0(x)$ et $y = \varepsilon \bar{\mu}(x)$, à l'exception du point x_{i_0} où elles présentent un contact du premier ordre,

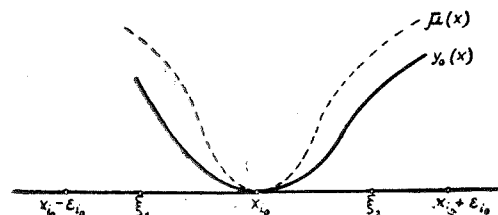


Fig. 5

s'intersectent encore dans deux points distincts, se traversant l'une l'autre dans ces derniers. En effet, soient $\bar{\xi}_1$ et $\bar{\xi}_2$ des nombres réels satisfaisant aux inégalités :

$$x_{i_0} - \varepsilon < \bar{\xi}_1 < x_{i_0} < \bar{\xi}_2 < x_{i_0} + \varepsilon_{i_0}.$$

Soit $\bar{\varepsilon}$ un nombre positif suffisamment petit, de sorte que soient satisfaites les inégalités (fig. 6) :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} \bar{\mu}(\bar{\xi}_1) &< y_0(\bar{\xi}_1), \\ \bar{\varepsilon} \bar{\mu}(\bar{\xi}_2) &< y_0(\bar{\xi}_2). \end{aligned} \quad (27)$$

Développant les fonctions $y_0(x)$ et $\varepsilon \bar{\mu}(x)$ selon la formule de Taylor dans le point x_{i_0} et tenant compte des relations (24'), (26), (25'), ainsi que du fait que $\pi_{i_0} > 2$, on constate que, quel que soit ε positif, dans un sous-voisinage suffisamment petit du point x_{i_0} , la courbe $y = y_0(x)$ se situe en dessous de la courbe $y = \varepsilon \bar{\mu}(x)$, (fig. 6). Compte tenu de cette constatation, ainsi que des inégalités (27), il résulte que pour tout ε positif, satisfaisant à l'inégalité $\varepsilon < \bar{\varepsilon} = E_3$, les courbes d'équations $y = y_0(x)$ et $y = \varepsilon \bar{\mu}(x)$ s'entre-couperont dans deux points distincts de $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$, se traversant l'une l'autre dans ces points, et présentant en même temps, dans le point x_{i_0} , un contact du premier ordre (fig. 6). En conclusion, compte tenu de ce qu'on vient de montrer ci-dessus, il résulte que si ε satisfait à l'inégalité $0 < \varepsilon < \min \{E_1, E_2, E_3\}$ alors l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon \bar{\mu}(x)$ aura dans l'intervalle (a, b) des racines provenant de la manière suivante :

A chaque racine x_i d'ordre pair, de l'intégrale $y_0(x)$, à l'exception de la racine x_{i_0} , correspondront pour l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, deux racines distinctes $\bar{x}_i$ et $\bar{x}_i$.

A la racine x_{i_0} multiple d'ordre pair ≥ 4 , de l'intégrale $y_0(x)$, correspondront, pour l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, une racine double x_{i_0} et deux autres racines simples $\bar{x}_{i_0}, \bar{x}_{i_0}$.

Enfin, les racines x_i d'ordre impair (simples) de l'intégrale $y_0(x)$ sont des racines simples également pour $\tilde{y}_\varepsilon(x)$.

Il résulte, en définitive, que l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ aura dans l'intervalle (a, b) une racine du deuxième ordre et autres $2(\alpha - 1) + 2 + \beta = 2\alpha + \beta$ racines simples. Mais, puisque $2\alpha + \beta = n - 1$, ce que l'on déduit de (16) et (17), compte tenu des propriétés (19) et (20), il s'ensuit que $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ a dans l'intervalle (a, b) au moins $(n - 1) + 1 = n$ racines distinctes (dont l'une est double). Alors, étant donné que par hypothèse la famille $\mathcal{Y}_n$ a la pro-

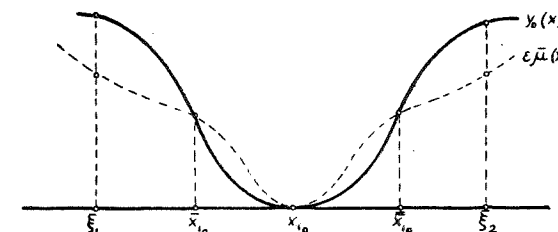


Fig. 6

priété $I_n(a, b)$, il résulte, en vertu du lemme 2, que $\tilde{y}_\varepsilon(x) \equiv 0$ dans l'intervalle (a, b) . Cette identité contredit le fait que $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon \bar{\mu}(x)$ ne s'annule pas dans les nœuds supplémentaires $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_v$ dont le nombre, comme on l'a déjà montré, satisfait à l'inégalité $v \geq 2$.

Il résulte, en définitive, que l'inégalité (21) ne peut avoir lieu et, conformément à la propriété (20), c'est l'égalité $\pi_{i_0} = p_{i_0}$ qui doit avoir lieu, c.q.f.d.

* * *

Nous passerons maintenant à la démonstration effective du théorème 1.

Démonstration du théorème 1.

Pour simplifier l'exposé, nous donnons d'abord les définitions suivantes :

Définition 4. Nous disons que la famille $\mathcal{Y}_n$ a la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$ (où k est un nombre naturel satisfaisant à l'inégalité $k \leq n$), si cette famille $\mathcal{Y}_n$ a les propriétés $I_{p_1, p_2, \dots, p_m}(a, b)$, se référant à tous les systèmes de nombres naturels $m, p_1, p_2, \dots, p_m$ satisfaisant aux conditions :

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \dots + p_m &= n \\ \max \{p_1, p_2, \dots, p_m\} &= k. \end{aligned} \quad (28)$$

Définition 5. Nous disons que la famille $\mathcal{Y}_n$ possède la propriété $P_n^{(k)}(a, b)$ (où k est un nombre naturel satisfaisant à l'inégalité $k \leq n - 1$), si quelle que soit l'intégrale non identiquement nulle $y(x) \in \mathcal{Y}_n$, qui dans m points distincts $x_1, x_2, \dots, x_m \in (a, b)$ satisfait aux conditions :

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y'(x_1) = \dots = y^{(p_1-1)}(x_1) = 0 \\ y(x_2) &= y'(x_2) = \dots = y^{(p_2-1)}(x_2) = 0 \\ &\dots \dots \dots \\ y(x_m) &= y'(x_m) = \dots = y^{(p_m-1)}(x_m) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

où $p_1, p_2, \dots, p_m$ sont des nombres naturels quelconque, satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + \dots + p_m &= n - 1 \\ \max \{p_1, p_2, \dots, p_m\} &= k, \end{aligned} \quad (30)$$

il résultera de la réalisation des conditions (29) et (30):

$$y^{(p_1)}(x_1) \neq 0, y^{(p_2)}(x_2) \neq 0, \dots, y^{(p_m)}(x_m) \neq 0. \quad (31)$$

Pour la démonstration du théorème 1, nous montrerons de proche en proche que, dans les hypothèses de ce théorème, la famille $\mathfrak{Y}_n$ possède les propriétés

$$\begin{aligned} \{I_n^{(1)}(a, b), P_n^{(1)}(a, b)\}, \{I_n^{(2)}(a, b), P_n^{(2)}(a, b)\}, \dots, \{I_n^{(k)}(a, b), P_n^{(k)}(a, b)\}, \\ \dots, \{I_n^{(n-1)}(a, b), P_n^{(n-1)}(a, b)\}, I_n^{(n)}(a, b). \end{aligned} \quad (32)$$

Dans ce but, nous utiliserons le principe de l'induction relativement à l'indice supérieur k . Nous observerons d'abord que, pour la famille $\mathfrak{Y}_n$, les propriétés $\{I_n^{(1)}(a, b), P_n^{(1)}(a, b)\}, \{I_n^{(2)}(a, b), P_n^{(2)}(a, b)\}$ qui correspondent aux valeurs $k=1$ et $k=2$, sont vraies en vertu des affirmations des lemmes 4, 5 et 6. Supposons maintenant que pour la famille $\mathfrak{Y}_n$ aient lieu les propriétés:

$$\{I_n^{(1)}(a, b), P_n^{(1)}(a, b)\}, \{I_n^{(2)}(a, b), P_n^{(2)}(a, b)\}, \dots, \{I_n^{(k-1)}(a, b), P_n^{(k-1)}(a, b)\}, \quad (33)$$

correspondant respectivement aux valeurs $1, 2, \dots, k-1$ de l'indice supérieur. Démontrons que, dans cette hypothèse, la famille $\mathfrak{Y}_n$ a aussi les propriétés $I_n^{(k)}(a, b)$ et $P_n^{(k)}(a, b)$. Nous supposons dans ce qui suit que $k > 2$. Nous commencerons par établir le lemme suivant:

Lemme 7. Si la famille $\mathfrak{Y}_n$ a toutes les propriétés indiquées en (33), alors cette famille a aussi la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$.

Démonstration. Nous utiliserons, afin d'établir la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$, le procédé de démonstration indiqué à l'occasion de l'établissement du lemme 5.

Supposons, par l'absurde, que, dans les hypothèse du lemme 7, la famille $\mathfrak{Y}_n$ n'aurait pas la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$. Alors, conformément au lemme 1, il résulterait que l'équation différentielle (1) admet au moins une intégrale non identiquement nulle $y_0(x)$, qui ait dans l'intervalle (a, b) , m racines distinctes $x_1, x_2, \dots, x_m$, ayant les ordres de multiplicité $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ de sorte que

$$\pi_1 \geq p_1, \pi_2 \geq p_2, \dots, \pi_m \geq p_m, \quad (34)$$

où $p_1, p_2, \dots, p_m$ représentent des nombres naturels, satisfaisant aux conditions (28).

Nous observons dès le début que, pour la démonstration de la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$, nous pouvons supposer qu'au moins deux des nombres $p_1, p_2, \dots, p_m$ sont égaux au nombre k . En effet, il résulte de l'hypothèse $\max \{p_1, p_2, \dots, p_m\} = k$, qui intervient dans la définition de la pro-

priété $I_n^{(k)}(a, b)$ qu'au moins l'un des nombres $p_1, p_2, \dots, p_m$ est égal à k . Si un seul des nombres $p_1, p_2, \dots, p_m$ est égal à k , et tous les autres sont plus petits que k , alors l'existence d'une intégrale $y_0(x)$ non identiquement nulle, satisfaisant aux conditions (29) serait en contradiction avec la propriété $P_n^{(k-1)}(a, b)$, supposée vraie par hypothèse. En conclusion, pour la démonstration de la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$, nous pouvons donc supposer qu'au moins deux des nombres $p_1, p_2, \dots, p_m$ sont égaux à k .

Nous associerons aux nombres $p_1, p_2, \dots, p_m$, respectivement les nombres $p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*$, comme suit:

$$p_i^* = \begin{cases} p_i, & \text{si } \pi_i \text{ et } p_i \text{ sont de même parité} \\ p_i + 1, & \text{si } \pi_i \text{ et } p_i \text{ ne sont pas de même parité} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (35)$$

Considérons ensuite la suite de nombres $p_1^{**}, p_2^{**}, \dots, p_m^{**}$, définie de la façon suivante:

$$p_i^{**} = \begin{cases} p_i^* - 2, & \text{si } p_i^* > 1 \\ p_i^*, & \text{si } p_i^* = 1 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (36)$$

Il est évident que les suites de nombres $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}, \{p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*\}, \{p_1^{**}, p_2^{**}, \dots, p_m^{**}\}$ sont tels que leurs termes du même rang ont la même parité, dans la dernière suite pouvant figurer également le nombre zéro.

Puisque, par hypothèse, au moins deux des nombres $p_1, p_2, \dots, p_m$ sont égaux à k , et puisque, toujours par hypothèse, $k > 2$, il résulte, en tenant compte de (35) et de (36) qu'au moins pour deux indices i a lieu l'inégalité stricte $p_i^{**} < p_i$. De là, en tenant compte des inégalités $p_i^{**} \leq p_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) — qui résultent également de (35) et (36), puis de la première relation de (28), il s'ensuit l'inégalité:

$$\sum_{i=1}^m p_i^{**} \leq n - 2. \quad (37)$$

Nous diviserons l'ensemble des nombres $p_1^{**}, p_2^{**}, \dots, p_m^{**}$ en deux sous-ensembles, comme suit: nous noterons par $i_1, i_2, \dots, i_\alpha$ les indices i pour lesquels p_i^{**} prend la valeur zéro, et par $j_1, j_2, \dots, j_\beta$ les indices j pour lesquels p_j^{**} prend des valeurs plus grandes que zéro (si, bien entendu, il existe de tels indices).

Notons par ν la somme de ces nombres p_j^{**} . Compte tenu de (37), il résulte de façon évidente l'inégalité

$$\nu = p_{i_1}^{**} + p_{i_2}^{**} + \dots + p_{j_\beta}^{**} \leq n - 2. \quad (37')$$

Sans restreindre la généralité de la démonstration, nous pouvons supposer que les racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ de l'intégrale $y_0(x)$ sont consécutives et satisfont aux inégalités $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ (cela parce que le nombre naturel m peut être quelconque).

Nous choisirons dans l'intervalle (x_m, b) , $n - \nu - 1$ nœuds distincts $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-\nu-1}$, de façon qu'aucun de ces nœuds ne coïncidera avec une des racines de l'intégrale $y_0(x)$ qui se trouverait éventuellement dans l'intervalle (x_m, b) . En tenant compte de (37'), on constate que le nombre $n - \nu - 1$, qui représente le nombre des nœuds supplémentaires $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-\nu-1}$, est plus grand ou au moins égal à 1, de sorte que l'ensemble de ces nœuds n'est pas vide.

Considérons maintenant les racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$, correspondant aux nombres $p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \dots, p_{i_\beta}^{**}$ mis antérieurement en évidence, et soit $\eta(x)$ une intégrale non identiquement nulle de l'équation (1), qui vérifie les conditions :

[illegible]

au nombre de $n - 1$. L'existence d'une telle intégrale non identiquement nulle résulte de l'hypothèse que $\mathfrak{Y}_n$ a toutes les propriétés $I_n^{(1)}(a, b)$, $I_n^{(2)}(a, b), \dots, I_n^{(k-1)}(a, b)$, qui figurent en (33), et du fait que les ordres de multiplicité $p_{j_1}^{**}, p_{j_2}^{**}, \dots, p_{j_\beta}^{**}$ qui interviennent dans les conditions (38) satisfont à l'inégalité

$$\max \{p_{j_1}^{**}, p_{j_2}^{**}, \dots, p_{j_m}^{**}\} \leq k - 1, \quad (39)$$

qui résulte de (35), (36) et (28).

Puisque, par hypothèse, les propriétés $P_n^{(1)}(a, b)$, $P_n^{(2)}(a, b), \dots, P_n^{(k-1)}(a, b)$ sont vraies, il résulte de la relation (39) que l'intégrale $\eta(x)$, supposée non identiquement nulle, satisfait aux relations :

$$\begin{aligned} \eta^{(p_{j_1})^{**}}(x_{j_1}) &\neq 0, \quad \eta^{(p_{j_2})^{**}}(x_{j_2}) \neq 0, \dots, \quad \eta^{(p_{j_\beta})^{**}}(x_{j_\beta}) \neq 0 \\ \eta'(\xi_1) &\neq 0, \quad \eta'(\xi_2) \neq 0, \dots, \quad \eta'(\xi_{n-\gamma-1}) \neq 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Il résulte encore que les seules racines distinctes de (a, b) de l'intégrale $\eta(x)$ sont les nombres $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-\gamma-1}$ ¹⁾. En tenant compte de cette dernière constatation, puis des relations (38) considérées avec (40), ainsi que de la constatation faite antérieurement, que les nombres $p_1^{**}, p_2^{**}, \dots, p_m^{**}$ sont respectivement de la même

¹⁾ Cette affirmation résulte également de l'hypothèse que la famille $\mathcal{A}_n$ a les propriétés $I_a^{(1)}(a, b), \dots, I_a^{(k-1)}(a, b)$.

parité que les nombres $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$, il résulte qu'au moins une des intégrales $\eta(x)$ ou $-\eta(x)$ aura le même signe que $y_0(x)$, dans des voisinages suffisamment petits des points $x_1, x_2, \dots, x_m$, à l'exception, éventuellement, des centres de ces voisinages. Nous noterons par $\bar{\eta}(x)$ celle d'entre les intégrales $\eta(x)$ et $-\eta(x)$ qui satisfait à cette condition.

Puis nous noterons par (Γ) la courbe d'équation $y = y_0(x)$ et par (Γ_ε) la courbe d'équations $y = \varepsilon \bar{y}(x)$, où ε est un paramètre. Nous nous proposons d'examiner de quelle façon se situent l'une par rapport à l'autre les courbes (Γ) et (Γ_ε) , lorsque ε tend vers zéro par des valeurs positives.

Nous observons dès le début que, quel que soit $\varepsilon > 0$, les courbes intégrales (Γ) et (Γ_ε) ne peuvent coïncider identiquement dans l'intervalle (a, b) , puisque dans les nœuds supplémentaires $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-\nu-1}$ (dont le nombre est plus grand que 1, comme on l'a déjà montré), l'intégrale $\bar{\eta}(x)$ s'annule, tandis que $y_0(x)$ prend des valeurs différentes de zéro.

En nous référant d'abord aux nombres $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$, nous constaterons qu'ils représentent pour la fonction $y_0(x)$ des racines d'ordre pair. Cette affirmation se justifie aussitôt, en tenant compte du fait que $p_{i_1}^{**} = p_{i_2}^{**} = \dots = p_{i_\alpha}^{**} = 0$, ainsi que de (35) et (36). Par contre, la fonction $\bar{\eta}(x)$ ne s'annule dans aucun des points $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$. Il résulte, du choix de l'intégrale $\bar{\eta}(x)$ parmi les intégrales $\eta(x)$ et $-\eta(x)$, que dans des voisinages suffisamment petits des points $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$, à l'exception, toutefois, des centres de ces voisinages, a lieu la relation

$$\operatorname{sgn} \{ \bar{\eta}(x) \} = \operatorname{sgn} \{ y_0(x) \}.$$

Il résulte de ces constatations que si le paramètre ε est positif et inférieur à un certain seuil, alors dans chacun des voisinages respectifs des points $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$, les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersecteront dans deux points distincts. Nous noterons les abscisses de ces points d'intersection, respectivement par $\bar{x}_{i_1}, \bar{\bar{x}}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \bar{\bar{x}}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_\alpha}, \bar{\bar{x}}_{i_\alpha}$.

Ensuite, en nous référant aux racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$, nous les diviserons en deux sous-ensembles, comme suit: Nous noterons par $x_{i_{k_1}}, x_{i_{k_2}}, \dots, x_{i_{k_{\gamma}}}$ les racines x_i pour lesquelles le nombre π_i correspondant est égal à 1, et par $x_{i_{t_1}}, x_{i_{t_2}}, \dots, x_{i_{t_\delta}}$ les racines pour lesquelles le nombre π_i correspondant est plus grand que 1.

Nous remarquerons, en tenant compte de (35) et (36), qu'ont lieu les égalités :

[illegible]

En vertu de ce qui précède et de (40), il résulte que les nombres $x_{j_{k_1}}, x_{j_{k_2}}, \dots, x_{j_{k_r}}$ représentent pour $y_0(x)$ et $\bar{\gamma}(x)$ des racines simples, et

donc que $y_0'(x)$ et $\bar{\eta}'(x)$ prennent de valeurs différentes de zéro pour chacun d'entre elles.

Il s'ensuit que si le paramètre $\varepsilon > 0$ est inférieur à un certain seuil, alors les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersecteront dans les points $x_{i_{k_1}}, x_{i_{k_2}}, \dots, x_{i_{k_Y}}$ se traversant l'une l'autre dans ces points.

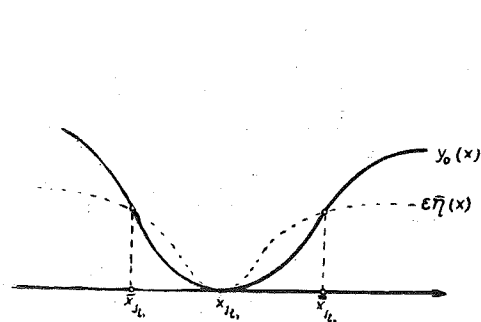


Fig. 7

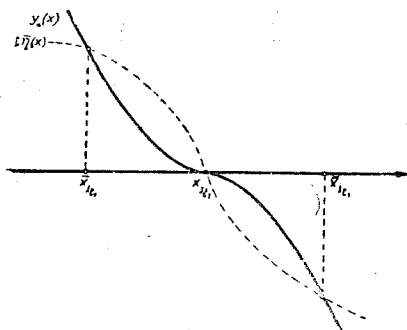


Fig. 8

Enfin, en nous référant aux racines qui nous sont restées $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_8}$, nous observerons, en tenant compte de (35) et (36) que, pour elles, ont lieu les relations :

$$0 < p_{i_1}^{**} \leq \pi_{i_1} - 2; \quad 0 < p_{i_2}^{**} \leq \pi_{i_2} - 2; \quad \dots, \quad 0 < p_{i_8}^{**} \leq \pi_{i_8} - 2,$$

qui nous montrent, compte tenu de (38), que chacun des nombres $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_8}$, représente des racines aussi bien pour la fonction $\bar{\eta}(x)$ que pour $y_0(x)$ — et que l'ordre d'une quelconque de ces racines, concernant la fonction $\bar{\eta}(x)$, est plus petit de deux unités au moins, que l'ordre de la même racine concernant la fonction $y_0(x)$. D'autre part, comme on l'a déjà spécifié, les nombres $p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \dots, p_{i_8}^{**}$ sont respectivement de la même parité que les nombres $\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \dots, \pi_{i_8}$. En vertu de ces constatations, il résulte les conséquences suivantes :

1°. Quelle que soit la valeur du paramètre ε , les fonctions $y_0(x)$ et $\varepsilon\bar{\eta}(x)$ prennent des valeurs égales dans les points $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_8}$, la coïncidence ayant lieu jusqu'à leurs dérivées d'ordre $p_{i_1}^{**} - 1, p_{i_2}^{**} - 1, \dots, p_{i_8}^{**} - 1$. Donc les courbes (Γ) et (Γ_ε) présenteront dans ces points des contacts tangentiels, respectivement de l'ordre $p_{i_1}^{**} - 1, p_{i_2}^{**} - 1, \dots, p_{i_8}^{**} - 1$.

2°. Si le paramètre $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, alors les fonctions $y_0(x)$ et $\varepsilon\bar{\eta}(x)$ prendront des valeurs égales en autres 2δ points, situés

deux par deux dans des voisinages suffisamment petits des nombres $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_8}$. Nous noterons les abscisses de ces points d'intersection, respectivement par $\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \bar{x}_{i_3}, \bar{x}_{i_4}, \dots, \bar{x}_{i_8}, \bar{x}_{i_9}$. (fig. 7 ou 8). Cette affirmation se fonde sur le lemme suivant :

L e m m e 8. Si deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies dans un intervalle (a, b) , ont les propriétés suivantes :

1°. Elles admettent dans (a, b) des dérivées continues de l'ordre p , respectivement $p + 2k$, où $k \geq 1$.

2°. Elles possèdent dans l'intervalle (a, b) une racine commune x_0 , qui pour $f(x)$ est multiple d'un certain ordre p et pour $g(x)$ est multiple de l'ordre $p + 2k$.

3°. $\text{sgn}\{f^{(p)}(x_0)\} = \text{sgn}\{g^{(p+2k)}(x_0)\} \neq 0$.

Dans ces conditions, étant donné un voisinage quelconque $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ contenu dans l'intervalle (a, b) , il existe pour ce voisinage un seuil $E > 0$, de sorte que si le paramètre ε satisfait aux inégalités $0 < \varepsilon < E$, alors les fonctions $\varepsilon f(x)$ et $g(x)$ prennent des valeurs communes dans au moins trois points distincts du voisinage $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ considéré. L'un de ces points est x_0 , où les courbes correspondantes présentent entre elles un contact tangentiel de l'ordre $p - 1$, et dans les autres deux points d'intersection, les courbes se traversent réciproquement.

La démonstration de ce lemme se fait facilement, en développant les fonctions $\varepsilon f(x)$ et $g(x)$, selon la formule de TAYLOR, dans le point x_0 .

Revenant à la démonstration du lemme 7, considérons la fonction $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon\bar{\eta}(x)$, qui représente évidemment une intégrale de l'équation différentielle (1) et qui n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle (a, b) , puisque comme on l'a déjà montré, les fonctions $y_0(x)$ et $\varepsilon\bar{\eta}(x)$ ne peuvent coïncider identiquement dans l'intervalle (a, b) , quelle que soit la valeur prise par le paramètre ε . En tenant compte des constatations précédentes, concernant le comportement des courbes (Γ) et (Γ_ε) entre elles, nous arriverons, en vertu du lemme 8, à la conclusion suivante : Si le paramètre ε prend des valeurs positives, inférieures à un certain seuil E , alors l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ s'annule pour les valeurs distinctes ¹⁾ suivantes de l'intervalle (a, b) :

$$\begin{aligned} & \bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \bar{x}_{i_3}, \bar{x}_{i_4}, \dots, \bar{x}_{i_8}, \bar{x}_{i_9} \\ & x_{i_{k_1}}, x_{i_{k_2}}, \dots, x_{i_{k_Y}} \\ & \bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \bar{x}_{i_3}, \bar{x}_{i_4}, \dots, \bar{x}_{i_8}, \bar{x}_{i_9} \\ & x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_8} \end{aligned} \quad (42)$$

Les racines qui figurent dans la dernière ligne de (42) ont, relativement à la fonction $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, respectivement les ordres $p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \dots, p_{i_8}^{**}$.

¹⁾ Les valeurs écrites dans la première et la troisième ligne dépendent de ε .

Compte tenu de (39), il résulte que ces ordres sont tout au plus égaux au nombre $k - 1$.

On constate ensuite que le nombre total des conditions d'annulation de l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, correspondant aux racines de (42), est plus grand ou au moins égal à la somme :

$$N = 2\alpha + \gamma + 2\delta + p_{i_1}^{**} + p_{i_2}^{**} + \dots + p_{i_s}^{**}. \quad (43)$$

Nous montrerons que cette somme est plus grande ou au moins égale à n . En effet, en tenant compte du fait que les nombres $p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \dots, p_{i_\alpha}^{**}$ sont tous égaux à zéro (par hypothèse), il résulte de (36) que les nombres $p_{i_1}^*, p_{i_2}^*, \dots, p_{i_\alpha}^*$ sont tous égaux à 2, puis, de (35), que les nombres $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_\alpha}$ sont plus petits ou tout au plus égaux à 2. Il s'ensuit de cette dernière affirmation, l'inégalité

$$2\alpha \geq p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_\alpha}. \quad (44)$$

Ensuite, de (41), résulte l'égalité :

$$\gamma = p_{i_{k_1}} + p_{i_{k_2}} + \dots + p_{i_{k_\gamma}} \quad (45)$$

et enfin, de (36), résultent les inégalités :

$$p_{i_{l_1}}^{**} \geq p_{i_{l_1}}^* - 2, \quad p_{i_{l_2}}^{**} \geq p_{i_{l_2}}^* - 2, \dots, p_{i_{l_s}}^{**} \geq p_{i_{l_s}}^* - 2. \quad (46)$$

Additionnant, membre par membre, les inégalités (46), nous obtenons :

$$2\delta + p_{i_{l_1}}^{**} + p_{i_{l_2}}^{**} + \dots + p_{i_{l_s}}^{**} \geq p_{i_{l_1}}^* + p_{i_{l_2}}^* + \dots + p_{i_{l_s}}^*. \quad (47)$$

Puis, compte tenu des inégalités $p_i^* \geq p_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), qui résultent de (35), on déduit de (47) l'inégalité :

$$2\delta + p_{i_{l_1}}^{**} + p_{i_{l_2}}^{**} + \dots + p_{i_{l_s}}^{**} \geq p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_s}. \quad (48)$$

Additionnant, membre par membre, les inégalités (44) (45), (48), nous obtenons l'inégalité :

$$N \geq (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_\alpha}) + (p_{i_{k_1}} + p_{i_{k_2}} + \dots + p_{i_{k_\gamma}}) + (p_{i_{l_1}} + p_{i_{l_2}} + \dots + p_{i_{l_s}}). \quad (49)$$

Mais, comme parmi les indices $i_1, i_2, \dots, i_\alpha; j_{k_1}, j_{k_2}, \dots, j_{k_\gamma}; j_{l_1}, j_{l_2}, \dots, j_{l_s}$, figure chacun des indices $1, 2, \dots, m$, une fois, est seulement une fois, il résulte que l'expression du deuxième membre de l'inégalité (49) représente la somme des nombres p_i correspondant à toutes les racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ considérées, de l'intégrale $y_0(x)$. Ainsi, l'inégalité (49) peut être transcrite de la manière suivante

$$N \geq p_1 + p_2 + \dots + p_m. \quad (49')$$

Toutefois, conformément à la première relation de (28), il résulte que la somme du membre droit de l'inégalité (49') est égale au nombre n , de sorte que l'inégalité (49) devient $N \geq n$, où, compte tenu de (43) :

$$N = 2\alpha + \gamma + 2\delta + p_{i_1}^{**} + p_{i_2}^{**} + \dots + p_{i_s}^{**} \geq n. \quad (50)$$

On obtient finalement le résultat suivant :

L'intégrale non identiquement nulle $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ de l'équation différentielle (1) s'annule dans l'intervalle (a, b) , au moins pour les valeurs indiquées au tableau (42), — toutes ces valeurs étant distinctes. Les racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$ qui figurent dans la dernière ligne de (42) ont, relativement à l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, les ordres de multiplicité, respectivement $p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \dots, p_{i_s}^{**}$ satisfaisant à l'inégalité

$$\max \{p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \dots, p_{i_s}^{**}\} \leq k - 1,$$

qui résulte de (39). Les autres racines de l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ qui figurent au tableau (42) ont des ordres de multiplicité plus grands ou au moins égaux à 1. L'inégalité (50) a également lieu.

Compte tenu du lemme 1, ces résultats obtenus par rapport à l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ sont en contradictions avec l'hypothèse que la famille $\mathfrak{Y}_n$ possède les propriétés $I_n^{(1)}(a, b), I_n^{(2)}(a, b), \dots, I_n^{(k-1)}(a, b)$.

Il résulte, en définitive, que si la famille $\mathfrak{Y}_n$ a les propriétés (33), alors $\mathfrak{Y}_n$ a également la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$.

* * *

Ensuite, nous démontrerons le lemme suivant :

L e m m e 9. Si la famille $\mathfrak{Y}_n$ a toutes les propriétés indiquées dans (33), alors cette famille a également la propriété $P_n^{(k)}(a, b)$.

Démonstration. Soit $y_0(x)$ une intégrale non identiquement nulle de l'équation différentielle (1), qui dans m points distincts $x_1, x_2, \dots, x_m$ de l'intervalle (a, b) satisfait aux conditions (29) et (30). Notons par $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ les ordres de multiplicité des racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ de l'intégrale $y_0(x)$. Nous voulons démontrer que, dans l'hypothèse que $\mathfrak{Y}_n$ a les propriétés (33), les relations (31) ont lieu, c'est-à-dire les égalités

$$\pi_1 = p_1, \pi_2 = p_2, \dots, \pi_m = p_m.$$

Nous observons dès le début que l'intégrale $y_0(x)$ considérée ne peut avoir dans l'intervalle (a, b) d'autres racines, outre $x_1, x_2, \dots, x_m$, puisque, au cas contraire, l'affirmation du lemme 7 serait contredite. Nous supposons dans ce qui suit que $x_1 < x_2 < \dots < x_m$.

Avec ces précisions, nous démontrerons d'abord que :

Dans les hypothèses adoptées, les nombres $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ et $p_1, p_2, \dots, p_m$ sont respectivement de la même parité. } (51)

Nous considérerons, dans ce but, l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon \tilde{\eta}(x)$, où $y_0(x)$ est l'intégrale choisie précédemment et $\tilde{\eta}(x)$ est toujours une

intégrale de l'équation différentielle (1) construite relativement aux racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ de l'intégrale $y_0(x)$ selon le procédé utilisé antérieurement dans la démonstration du lemme 7. Nous tiendrons compte des différences suivantes concernant l'intégrale $y_0(x)$, qui ont lieu dans le cas du lemme présent.

D'abord, il faut remarquer qu'au lieu de la première égalité de (28), on considère dans le cas présent, l'égalité $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n - 1$, comme on l'indique dans (30). Ensuite, il résulte de la seconde relation (30), qu'au moins l'un des nombres $p_1, p_2, \dots, p_m$ est égal au nombre k . Dans cette situation, à l'encontre du cas du lemme 7, nous prendrons en considération également le cas où un seul des nombres $p_1, p_2, \dots, p_m$ est égal au nombre k , tous les autres étant plus petits que k .

Puisque, par hypothèse nous avons $k > 2$, il résulte compte tenu de (35) et (36) qu'au moins pour l'un des indices i a lieu l'inégalité stricte $p_i^{**} < p_i$. De là, compte tenu des inégalités $p_i^{**} \leq p$ ($i = 1, 2, \dots, m$), qui résultent toujours de (35) et (36), puis de la première relation de (30), nous déduisons l'inégalité $\sum_{i=1}^m p_i^{**} \leq n - 2$, de laquelle résulte, de façon évidente, l'inégalité :

$$v = p_{i_1}^{**} + p_{i_2}^{**} + \dots + p_{i_p}^{**} \leq n - 2. \quad (52)$$

Cette inégalité est analogue à l'inégalité (37'), établie à l'occasion de la démonstration du lemme 7. Tout comme dans ce cas-là, on choisit à volonté $n - v - 1$ nœuds distincts $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n-v-1}$ de l'intervalle (x_m, b) . En tenant compte de (52), le nombre de ces nœuds supplémentaires satisfait à l'inégalité $n - v - 1 \geq 1$. Pour ce qui suit, il est utile de relever le fait que l'intégrale $y_0(x)$ ne peut s'annuler pour aucune des valeurs $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-v-1}$, choisies, puisque, comme on l'a déjà montré, cette intégrale n'a pas, dans l'intervalle (a, b) , d'autres racines outre $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Nous considérerons ensuite une intégrale non identiquement nulle $\eta(x)$, qui satisfasse aux conditions (38) se référant aux racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ de l'intégrale $y_0(x)$ ainsi qu'aux nœuds $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-v-1}$ choisis. Tout comme pour le lemme 7, on montre que dans les hypothèses adoptées, au moins une des intégrale $\eta(x)$ ou $-\eta(x)$ aura le même signe que $y_0(x)$ dans des voisinages suffisamment petits des points $x_1, x_2, \dots, x_m$, à l'exception éventuellement des centres de ces voisinages. Désignant par $\bar{\eta}(x)$ celle qui satisfait ce desideratum, nous considérons $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon \bar{\eta}(x)$. On constate également que quelle que soit la valeur du paramètre ε , les fonctions $y_0(x)$ et $\varepsilon \bar{\eta}(x)$ ne peuvent pas être identiquement égales dans l'intervalle (a, b) , et donc l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ ne peut être identiquement nulle dans cet intervalle. Tout comme dans la démonstration du lemme 7, on montre que si le paramètre ε est positif et inférieur à un certain seuil, alors l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ s'annulera pour certains points distincts de l'intervalle (a, b) , indiqués dans le tableau (42). Les racines qui figurent dans la dernière ligne de (42) ont, relativement à l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, les ordres de multiplicité

$p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \dots, p_{i_p}^{**}$. Comme il résulte de (39), ces ordres satisfont à la relation

$$\max \{p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \dots, p_{i_p}^{**}\} \leq k - 1. \quad (53)$$

On constate que le nombre des conditions d'annulation de l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ correspondant aux racines écrites dans le tableau (42) est au moins égal à la somme

$$N = 2\alpha + \gamma + 2\delta + p_{i_1}^{**} + p_{i_2}^{**} + \dots + p_{i_p}^{**}. \quad (54)$$

On montre, tout comme dans la démonstration du lemme 7, que les inégalités (44), (45), (46), (47), (48) (49) ont lieu, ainsi que l'inégalité

$$N \geq p_1 + p_2 + \dots + p_m, \quad (55)$$

qui est analogue à l'inégalité (49'). En nous fondant sur cette dernière inégalité, et compte tenu de la première relation de (30), nous obtenons l'inégalité

$$N \geq n - 1. \quad (56)$$

Nous passerons maintenant à la démonstration effective de la propriété (51). Nous supposons par absurde le contraire, à savoir que parmi les racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ de l'intégrale $y_0(x)$, il existerait au moins une racine x_τ , pour laquelle les nombres p_τ et π_τ correspondants, seraient de parités différentes.

Compte tenu de la relation de définition (35), il s'ensuit que

$$p_\tau^* = p_\tau + 1 \quad (57)$$

et, puisque $p_\tau \geq 1$, il résulte de (57) que $p_\tau^* \geq 2$, puis de (36), que

$$p_\tau^{**} = p_\tau^* - 2 = p_\tau - 1. \quad (58)$$

Il peut se présenter les deux cas suivantes, selon que $p_\tau^{**} = 0$, ou $p_\tau^{**} > 0$.

Cas 1. $p_\tau^{**} = 0$. Dans ce cas, on déduit de (58) l'égalité

$$p_\tau = 1 \quad (59)$$

D'autre part, puisque nous avons supposé que $p_\tau^{**} = 0$, il résulte que l'indice τ représente l'un des indices $i_1, i_2, \dots, i_\alpha$. Puis, compte tenu que les nombres $p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \dots, p_{i_\alpha}^{**}$ sont tous égaux à zéros, il résulte de (36) que les nombres $p_{i_1}^*, p_{i_2}^*, \dots, p_{i_\alpha}^*$ sont tous égaux à 2, et de (35) que les nombres $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_\alpha}$ sont au plus égaux à 2. De là, en tenant aussi compte de l'égalité (59), il résulte l'inégalité stricte

$$2\alpha > p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_\alpha} \quad (60)$$

analogue à l'inégalité (44), à la différence que, à la place du signe $\geq$, se trouve dans le cas présent le signe de l'inégalité stricte.

Poursuivant le raisonnement que nous a mené de l'égalité (43) à l'inégalité (49'), nous arrivons à la conclusion que, dans le cas présent, grâce à l'inégalité stricte (60), il y aura dans la relation (49) le signe de l'inégalité stricte, à la place du signe $\geq$. On obtient ainsi, en définitive, l'inégalité stricte $N > p_1 + p_2 + \dots + p_m$, d'où, compte tenu de la première relations de (30), il résultera l'inégalité

$$N > n - 1. \quad (61)$$

Ceci nous montre que le nombre des conditions d'annulation auquel satisfait l'intégrale non identiquement nulle $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, concernant les racines indiquées dans le tableau (42), est plus grand ou au moins égal à n . En même temps pourtant, a lieu également la relation (53). Conformément au lemme 1, cette situation est en contradiction avec les propriétés $I_n^{(1)}(a, b)$, $I_n^{(2)}(a, b), \dots, I_n^{(k-1)}(a, b)$ de la famille $\mathfrak{U}_n$ supposées par hypothèse, vraies.

Cas 2. $p_\tau^{**} \geq 1$. Dans ce cas, nous déduisons de (58) que $p_\tau \geq 2$ et de là, à fortiori, l'inégalité $\pi_\tau \geq 2$. Conformément aux précisions antérieurs, il résulte que l'indice τ représente l'un des indices $j_{i_1}, j_{i_2}, \dots, j_{i_s}$. Puis, dans un autre ordre d'idées, compte tenu de l'égalité (57), ainsi que des inégalités $p_i^* \geq p_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) qui résultent de (35), nous déduisons, en additionnant membre à membre les inégalités (46), l'inégalité stricte suivante :

$$2\delta + p_{i_{i_1}}^{**} + p_{i_{i_2}}^{**} + \dots + p_{i_{i_s}}^{**} > p_{i_{i_1}} + p_{i_{i_2}} + \dots + p_{i_{i_s}} \quad (62)$$

analogue à l'inégalité (48).

Suivant le raisonnement qui nous a conduit de l'égalité (43) à l'inégalité (49'), nous arriverons à la conclusion que, grâce à l'inégalité stricte (62), aura lieu à la place de l'inégalité (49'), l'inégalité stricte $N > p_1 + p_2 + \dots + p_m$ et en vertu de la première relation de (30), l'inégalité stricte $N > n - 1$. Cette inégalité nous montre que le nombre des conditions d'annulation auxquelles satisfait l'intégrale non identiquement nulle $\tilde{y}_\varepsilon(x)$, concernant les racines indiquées au tableau (42), est au moins égal à n . Mais, en même temps, a lieu également la relation (53). Cette circonstance est en contradiction avec les propriétés $I_n^{(1)}(a, b)$, $I_n^{(2)}(a, b), \dots, I_n^{(k-1)}(a, b)$ de la famille $\mathfrak{U}_n$, supposées par hypothèse vraies. En conclusion, étant donné que ces deux cas épuisent tous les cas possibles concernant p_τ^{**} , il s'ensuit, de leur examen, la propriété (51) c.q.f.d.

Nous considérerons ensuite une intégrale non identiquement nulle $y_0(x)$, de l'équation (1), qui dans m points distincts $x_1, x_2, \dots, x_m$ de l'intervalle (a, b) satisfait aux conditions (29) et (30).

Nous noterons respectivement par $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ les ordres de multiplicité des racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ de l'intégrale $y_0(x)$. Nous démontrerons la propriété suivante :

Si la famille $\mathfrak{U}_n$ a les propriétés (33), alors dans l'hypothèse que l'intégrale $y_0(x)$ satisfait aux conditions (29) et (30), il résulte que cette intégrale satisfait aux relations (31). (63)

Afin de démontrer cette propriété, supposons par l'absurde que $y_0(x)$ ne satisfait pas aux conditions (31). Alors, au moins pour l'une des racines x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) aura lieu l'inégalité stricte $\pi_i > p_i$. Pour clarification, nous supposons que cette racine correspond à l'indice 1, c'est-à-dire que

$$\pi_1 > p_1. \quad (64)$$

Dans ces hypothèses, nous observons dès le début que si $p_1 < k$, alors, compte tenu de (64), nous pourrions considérer en ce qui concerne la racine x_1 , au lieu du nombre p_1 , le nombre $p_1 + 1$ (qui est au plus égal à k), et, par cette substitution, la somme figurant dans la première relation de (30) sera égale à n . Ainsi, conformément au lemme 1, la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$ de la famille $\mathfrak{U}_n$, propriété assurée par le lemme 7, serait contredite.

Il résulte, en définitive, l'inégalité $p_1 \geq k$, et, comme par hypothèse, la deuxième relation de (30) doit avoir lieu, il s'ensuit l'égalité

$$p_1 = k. \quad (65)$$

Compte tenu des relations (64) et (65), il résulte l'inégalité stricte $\pi_1 > k$ et, ensuite, compte tenu de la propriété (51) établie précédemment, il s'ensuivra l'inégalité

$$\pi_1 \geq k + 2. \quad (66)$$

En ce qui concerne le nombre k , nous observons qu'il faut qu'ait lieu l'inégalité

$$k \leq n - 3, \quad (67)$$

puisque, au cas contraire, c'est-à-dire au cas où $k > n - 3$, il résulterait de (66) que $\pi_1 > n - 1$ et que donc x_1 est une racine multiple d'ordre au moins égal à n pour l'intégrale $y_0(x)$. Mais ce résultat serait incompatible avec l'hypothèse que $y_0(x)$ n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle (a, b) .

En ce qui concerne les ordres $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$, nous distinguerons les deux cas suivants :

Cas. 1. $\pi_1 \geq k + 2$; $\pi_2 = \pi_3 = \dots = \pi_m = 1$, ($2 < k \leq n - 3$). Dans ce cas, la courbe d'équation $y = y_0(x)$ traversera l'axe Ox dans chacun des points $x_2, x_3, \dots, x_m$, puisque la fonction $y_0(x)$ change de sens dans ces points. Soit ε un nombre réel non nul et soit $\mu_\varepsilon(x)$ l'intégrale de l'équation (1) qui satisfait, dans le point x_1 aux conditions de CAUCHY :

$$\mu_\varepsilon(x_1) = y_0(x_1) = 0; \mu'_\varepsilon(x_1) = y'_0(x_1) = 0; \dots, \mu_\varepsilon^{(k)}(x_1) = y_0^{(k)}(x_1) = 0, \\ \mu_\varepsilon^{(k+1)}(x_1) = \varepsilon; \quad (68)$$

$$\mu_\varepsilon^{(k+2)}(x_1) = y_0^{(k+2)}(x_1); \dots, \mu_\varepsilon^{(n-1)}(x_1) = y_0^{(n-1)}(x_1).$$

Ceci veut dire que l'intégrale $\mu_\varepsilon(x)$ satisfait dans le point x_1 aux mêmes conditions de CAUCHY que $y_0(x)$, à l'exception de la dérivée de l'ordre $k + 1$, qui prend la valeur $\varepsilon \neq 0$ dans le cas de la fonction $\mu_\varepsilon(x)$,

Nous observons en outre que l'ordre le plus élevé de dérivation qui intervient dans (74) est égal au nombre $k - 1$, ce qui résulte de (69) et

de la seconde relation de (30). Conformément à la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$ de la famille $\mathcal{U}_n$ (établie par le lemme 7), il résulte l'existence d'une telle intégrale non identiquement nulle $\eta(x)$, qui satisfasse aux conditions (74).

Nous diviserons l'ensemble des racines $x_2, x_3, \dots, x_m$ en deux catégories, comme suit : Nous notons par $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$ celles des racines x_i pour lesquelles le nombre correspondant p_i satisfait à l'égalité $p_i = 1^1$ et par $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_\beta}$ celles des racines x_j pour lesquelles le nombre correspondant p_j satisfait à l'inégalité $p_j > 1$. Evidemment que $\alpha + \beta = m - 1$, puisque la racine x_1 n'a pas été prise en considération. En tenant compte des formules (69), nous obtenons les égalités

$$\begin{aligned} p_{i_1}^{**} &= p_{i_1} = 1; p_{i_2}^{**} = p_{i_2} = 1; \dots; p_{i_\alpha}^{**} = p_{i_\alpha} = 1 \\ p_{j_1}^{**} &= p_{j_1} - 2; p_{j_2}^{**} = p_{j_2} - 2; \dots; p_{j_\beta}^{**} = p_{j_\beta} - 2. \end{aligned} \quad (76)$$

A partir de ces égalités, en tenant compte de la deuxième relation de (30), résulte la relation

$$\max \{p_{i_1}^{**}, p_{i_2}^{**}, \dots, p_{i_\alpha}^{**}; p_{j_1}^{**}, p_{j_2}^{**}, \dots, p_{j_\beta}^{**}\} \leq k - 2. \quad (77)$$

Nous montrerons maintenant qu'ont lieu les relations :

$$\begin{aligned} \eta^{(p_{i_1}^{**})}(x_{i_1}) &\neq 0, \quad \eta^{(p_{i_2}^{**})}(x_{i_2}) \neq 0, \dots, \eta^{(p_{i_\alpha}^{**})}(x_{i_\alpha}) \neq 0 \\ \eta^{(p_{j_1}^{**})}(x_{j_1}) &\neq 0, \quad \eta^{(p_{j_2}^{**})}(x_{j_2}) \neq 0, \dots, \eta^{(p_{j_\beta}^{**})}(x_{j_\beta}) \neq 0. \end{aligned} \quad (78)$$

En effet, si une relation quelconque de (78) n'avait pas lieu, ceci contredirait la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$ de la famille $\mathcal{U}_n$ (vraie en vertu du lemme 7), puisque le nombre des conditions d'annulation de (74), vérifiées par l'intégrale non identiquement nulle $\eta(x)$, est égal à $n - 1$, toujours à cause de la relation (77). Compte tenu de (76), les relations (78) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \eta'(x_{i_1}) &\neq 0, \quad \eta'(x_{i_2}) \neq 0, \dots, \eta'(x_{i_\alpha}) \neq 0 \\ \eta^{(p_{j_1}-2)}(x_{j_1}) &\neq 0, \quad \eta^{(p_{j_2}-2)}(x_{j_2}) \neq 0, \dots, \eta^{(p_{j_\beta}-2)}(x_{j_\beta}) \neq 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Ces relations, avec les égalités (74), nous montrent qu'en ce qui concerne l'intégrale $\eta(x)$, les racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$ sont simples, et que $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_\beta}$ ont respectivement les ordres $p_{j_1} - 2, p_{j_2} - 2, \dots, p_{j_\beta} - 2^2$.

Nous référant à l'intégrale $y_0(x)$, et en tenant compte des égalités $p_{i_1} = p_{i_2} = \dots = p_{i_\alpha} = 1$, nous déduisons, pour les mêmes raisons que ci-dessus, les relations :

$$y'_0(x_{i_1}) \neq 0, \quad y'_0(x_{i_2}) \neq 0, \dots, y'_0(x_{i_\alpha}) \neq 0,$$

¹) L'ensemble de ces racines pourrait être vide.

²) Les nombres x_j pour lesquels $p_j^{**} = 0$ ne sont pas des racines pour $\eta(x)$.

qui nous montrent que les racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$ sont simples en ce qui concerne aussi l'intégrale $y_0(x)$.

Puis, en vertu de la propriété (51) établie antérieurement il résulte que les ordres de multiplicité $\pi_{j_1}, \pi_{j_2}, \dots, \pi_{j_\beta}$ des racines $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_\beta}$ sont, en ce qui concerne l'intégrale $y_0(x)$, de la même parité que les nombres $p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_\beta}$ et compte tenu des relations (74), (76) et (79), il résulte qu'ils sont de même parité que les ordres des mêmes racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$ relativement à l'intégrale $\eta(x)$.

Toujours en vertu de la propriété (51), on constate que l'ordre de multiplicité de la racine x_1 , se référant à l'intégrale $y_0(x)$, est de la même parité que le nombre p_1 , lequel, en vertu de l'égalité (65), est égal à k . De même, l'ordre de multiplicité de la même racine x_1 , se référant à l'intégrale $\eta(x)$ est de la même parité que le nombre p correspondant, lequel, comme nous le montre la première suite d'égalités (74), est égal à k . En conclusion, il s'ensuit que les ordres de multiplicité de la racine x_1 , relativement aux deux intégrales $y_0(x)$ et $\eta(x)$, sont de la même parité.

Nous avons obtenu en définitive, le résultat suivant :

Les ordres de multiplicité des racines $x_1, x_2, \dots, x_m$, relativement à l'intégrale $\eta(x)$, sont respectivement de la même parité que les ordres des mêmes racines, relativement à l'intégrale $y_0(x)$.

Dans un autre ordre d'idées, nous constatons que l'intégrale non identiquement nulle $y_0(x)$ ne peut avoir dans l'intervalle (a, b) d'autres racines que $x_1, x_2, \dots, x_m$, puisque, au cas contraire compte tenu des relations (29) et (30), la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$ de la famille $\mathcal{U}_n$ — propriété, vraie en vertu du lemme 7, serait contredite. Pour ces mêmes raisons, l'intégrale non identiquement nulle $\eta(x)$ ne peut pas avoir dans l'intervalle (a, b) d'autres racines que $x_1, x_2, \dots, x_m, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-v-1}$.

A partir de toutes ces conclusions, compte tenu aussi du fait que toutes les racines $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-v-1}$ de l'intégrale $\eta(x)$ sont situées en dehors de l'intervalle (x_1, x_m) , il s'ensuit que si l'on considère les intégrales $\eta(x)$ et $-\eta(x)$, alors l'une d'elles maintiendra dans des voisinages suffisamment petits des racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ le même signe que l'intégrale $y_0(x)$ (à l'exception éventuellement, des centres de ces voisinages). Nous noterons l'intégrale qui satisfait ce desideratum par $\bar{\eta}(x)$. Donc $\bar{\eta}(x)$ est non identiquement nulle, satisfait aux conditions (74) et, en outre, à l'égalité

$$\operatorname{sgn} \{\bar{\eta}(x)\} = \operatorname{sgn} \{y_0(x)\}, \quad (85)$$

valable dans des voisinages suffisamment petits des points $x_1, x_2, \dots, x_m$, à l'exception éventuellement des centres de ces voisinages.

Nous considérons maintenant la courbe intégrale (Γ) d'équation $y = y_0(x)$ et la courbe intégrale (Γ_ε) d'équation $y = \varepsilon \bar{\eta}(x)$, où ε est un paramètre prenant des valeurs positives. Nous examinerons ensuite la manière dont se situent l'une à l'égard de l'autre les courbes (Γ) et (Γ_ε) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

En nous référant d'abord aux nombres $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$ et, compte tenu du fait établie précédemment que ces nombres sont des racines simples

aussi bien pour $\bar{\eta}(x)$ que pour $y_0(x)$, il s'ensuit que, si le paramètre ε prend des valeurs positives, inférieures à un certain seuil E_1 , alors les courbes (Γ) et (Γ_ε) se traverseront dans les points $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha}$ (sans être tangente entre elles dans ces points).

Puis, en nous référant aux racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$ et compte tenu des relations (29), (74), et (79), nous arrivons aux conclusions suivantes :

1°. Dans les points $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$ les courbes (Γ) et (Γ_ε) présentent des contacts tangentiels, respectivement d'ordres $p_{i_1} - 3, p_{i_2} - 3, \dots, p_{i_\beta} - 3$, c'est-à-dire que les fonctions $y_0(x)$ et $\bar{\eta}(x)$ coïncident, respectivement, dans ces points jusqu'à leur dérivée respectives d'ordres $p_{i_1} - 3, p_{i_2} - 3, \dots, p_{i_\beta} - 3$ inclusivement ¹⁾.

2°. Si le paramètre ε est suffisamment petit, alors, compte tenu du fait que les ordres de multiplicité $\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \dots, \pi_{i_\beta}$ des racines $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$ relativement à l'intégrale $y_0(x)$, sont respectivement de même parité que les ordres $p_{i_1} - 2, p_{i_2} - 2, \dots, p_{i_\beta} - 2$ des mêmes racines relativement à l'intégrale $\bar{\eta}(x)$, compte tenu aussi des inégalités strictes

$$\pi_{i_1} > p_{i_1} - 2, \pi_{i_2} > p_{i_2} - 2, \dots, \pi_{i_\beta} > p_{i_\beta} - 2,$$

il résultera, en vertu du lemme 8, que si le paramètre ε est positif et inférieur à un certain seuil E_2 , alors dans des voisinages donnés, suffisamment petits des points $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$, les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersecteront encore dans certains points $\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_\beta}$, différents l'un de l'autre et différents de $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\beta}$, se traversant réciproquement dans ces points.

Enfin, en nous référant à la racine x_1 nous déduisons à partir de (64), (65) et (74) que, quelle que soit la valeur prise par le paramètre ε , les courbes (Γ) et (Γ_ε) présenteront dans ce point un contact d'ordre au moins égal à $k - 1$.

En conclusion, en tenant compte de ce qu'on vient de constater ci-dessus, nous arrivons au résultat suivant :

Si le paramètre $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, alors l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon \bar{\eta}(x)$ de l'équation différentielle (1) admettra dans l'intervalle (a, b) , outre la racine x_1 , multiple d'ordre $\geq k$, les racines distinctes suivantes :

$$\begin{aligned} & x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_\alpha} \\ & \bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \dots, \bar{x}_{i_\beta} \end{aligned} \quad (80)$$

¹⁾ Par hypothèse, les nombres $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_\beta}$ sont plus grands ou au moins égaux à 2. Dans le cas où l'un des ces nombres, par exemples p_{i_1} est égal à 2, le résultat ci-dessus doit être interprété ainsi : La courbe (Γ) a avec l'axe Ox dans le point correspondant x_{i_1} un contact de l'ordre $\pi_{i_1} - 1$ où π_{i_1} est un nombre pair ≥ 2 et la courbe (Γ_ε) ne s'intersecte pas avec l'axe Ox dans le voisinage de ce point x_{i_1} , se situant par rapport à cet axe, du côté où se situe (Γ) .

ayant des ordres de multiplicité respectivement plus grands ou au moins égaux aux nombres

$$\begin{aligned} & 1, 1, \dots, 1 \\ & p_{i_1} - 2, p_{i_2} - 2, \dots, p_{i_\beta} - 2 \\ & 1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1. \end{aligned} \quad (81)$$

La somme des nombres se trouvant dans (81), est égale à

$$s = \alpha + p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_\beta}$$

et, compte tenu des premières relations de (76), puis de la première relation de (30), ainsi que de l'égalité (65), il s'ensuit pour la somme s l'égalité

$$\begin{aligned} s &= (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_\alpha}) + (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_\beta}) = \\ &= n - 1 - p_1 = n - 1 - k. \end{aligned} \quad (82)$$

En nous référant à la racine x_1 de l'intégrale $\bar{\eta}(x)$ et en tenant compte des conditions (74) que satisfait cette intégrale, nous distinguerons les deux sous-cas suivants, selon que $\bar{\eta}^{(k)}(x)$ s'annule ou non pour la valeur $x = x_1$.

Sous-cas 1 : $\bar{\eta}(x_1) = \bar{\eta}'(x_1) = \dots = \bar{\eta}^{(k-1)}(x_1) = 0$; $\bar{\eta}^{(k)}(x_1) \neq 0$.

Dans ce sous-cas, si l'on tient compte de l'inégalité $\pi_1 \geq k + 2$ de (66), ainsi que de l'hypothèse spécifique au cas considéré, on constate que les courbes (Γ) et (Γ_ε) présentent dans le point x_1 un contact de tangence de l'ordre $k - 1$ (c'est-à-dire que la coïncidence des fonctions $y_0(x)$ et $\bar{\eta}(x)$ pour la valeur $x = x_1$ se réalise jusqu'aux dérivées de l'ordre $k - 1$, inclusivement). Ensuite, en tenant compte du fait établi antérieurement que les nombres π_1 , ($\pi_1 \geq k + 2$) et k , qui représentent respectivement les ordres de multiplicité de la racine x_1 , relativement aux intégrales $y_0(x)$ et $\bar{\eta}(x)$ sont de même parité, on déduit en vertu du lemme 8 que, si le paramètre ε prend des valeurs positives, inférieures à un certain seuil E_2 , alors dans le voisinage du point x_1 , les courbes (Γ) et (Γ_ε) s'intersecteront en outre dans deux autres points distincts $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_1$ de l'intervalle (a, b) , différents de x_1 et des points de (80). Il résulte en définitive, que si le paramètre ε prend des valeurs positives et suffisamment petites, alors l'intégrale $\tilde{y}_\varepsilon(x) = y_0(x) - \varepsilon \bar{\eta}(x)$ satisfait, en ce qui concerne les points $x_1, \bar{x}_1, \bar{x}_1$ et les points de (80), à un nombre de $s + k + 2$ conditions d'annulation, c'est-à-dire, tenant également compte de (82), à un nombre de $(n - 1 - k) + k + 2 = n + 1$ conditions d'annulation. Mais puisque $\tilde{y}_\varepsilon(x)$ ne peut être identiquement nulle dans l'intervalle (a, b) quel soit $\varepsilon \neq 0$ (ce qui se déduit en tenant compte que $y_0(\xi_1) \neq 0$ et $\bar{\eta}(\xi_1) = 0$), il résulterait des considérations ci-dessus que la famille $\mathcal{Y}_n$ n'aurait pas la propriété $I_n^{(k)}(a, b)$. Ce résultat contredirait l'affirmation du lemme 7. Nous arrivons ainsi à la conclusion que, dans les hypothèses du lemme 9, le sous-cas 1 ne peut avoir lieu.

Sous-cas 2 : $\bar{\eta}(x_1) = \bar{\eta}'(x_1) = \dots = \bar{\eta}^{(k-1)}(x_1) = \bar{\eta}^{(k)}(x_1) = 0$.

Nous montrerons d'abord que dans ce sous-cas, dans l'hypothèse que la famille $\mathcal{Y}_n$ a toutes les propriétés (33), a lieu aussi l'égalité $\bar{\eta}^{(k+1)}(x_1) = 0$, c'est-à-dire que l'ordre de multiplicité de la racine x_1 , relativement à l'intégrale $\bar{\eta}(x)$, est plus grand ou au moins égal à $k + 2$. En effet, nous observons d'abord que les conditions d'annulations (74) satisfaites

¹⁾ L'existence de telles intégrales non identiquement nulles est assurée par la propriété $I_m^*(a, b)$.

Dans ces hypothèses, ont lieu les relations

$$h_1(x) \neq 0, W[h_1(x), h_2(x)] \neq 0, \dots, W[h_1(x), \dots, h_{n-1}(x)] \neq 0, \quad (86)$$

valables dans les intervalles (a, x_1) et (x_{n-1}, b) . Ici $W[h_1(x), \dots, h_k(x)]$ représente le wronskien des fonctions $h_1(x), \dots, h_k(x)$.

La démonstration ci-dessous est en quelque sorte analogue à la démonstration du théorème IV établi par G. PÓLYA dans le travail [13]¹⁾. Ainsi, puisque par hypothèse l'intégrale non identiquement nulle $h_1(x)$ s'annule pour $n-1$ valeurs distinctes $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ de (a, b) , résulte-t-il que cette intégrale ne peut s'annuler pour aucune autre valeur de cet intervalle, puisque au cas contraire, la propriété $I_n^*(a, b)$ de la famille $\mathfrak{Y}_n$ serait contredite (conformément au lemme 1). Ainsi, la première relation de (86) est établie. Nous adopterons les notations $h_1(x) = w_1(x)$ et $W[h_1(x), h_2(x), \dots, h_k(x)] = w_k(x)$, ($k = 2, \dots, n-1$).

Utilisant la méthode de l'induction, supposons que dans les deux intervalles (a, x_1) et (x_{n-1}, b) ont lieu les relations.

$$w_1(x) \neq 0, w_2(x) \neq 0, \dots, w_k(x) \neq 0, \quad (87)$$

le nombre k satisfaisant à l'inégalité $1 \leq k < n-1$.

Dans ces hypothèses, nous démontrerons que la relation $w_{k+1}(x) \neq 0$ a également lieu dans les intervalles (a, x_1) et (x_{n-1}, b) . Dans ce but, considérons la combinaison linéaire

$$h(x) = C_1 h_1(x) + C_2 h_2(x) + \dots + C_k h_k(x) + h_{k+1}(x), \quad (88)$$

où $C_1, C_2, \dots, C_k$ représentent des constantes arbitraires. Nous observons dès le début, que quelles que soient les valeurs prises par ces constantes, la fonction correspondante $h(x)$ s'annule dans les points $x_1, x_2, \dots, x_{n-k-1}$, cela puisque chacune des fonctions $h_1(x), h_2(x), \dots, h_k(x), h_{k+1}(x)$ qui interviennent dans l'expression de la fonction $h(x)$, s'annule dans ces points. Soit maintenant x_0 un point arbitraire de l'intervalle ouvert (a, x_1) , ou de l'intervalle (x_{n-1}, b) . Nous déterminons les constantes $C_1, C_2, \dots, C_k$ de manière que $h(x)$ s'annule k fois dans le point x_0 , c'est-à-dire qu'elle admette la valeur x_0 comme racine multiple de l'ordre k . Une telle détermination est possible et cela d'une seule manière, puisque le déterminant des k équations qui se forment en écrivant ces conditions, est $W[h_1(x), \dots, h_k(x)] \neq 0$. Ce déterminant est différent de zéro, conformément à l'hypothèse (87). Soient $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_k$ les valeurs ainsi déterminées des constantes $C_1, C_2, \dots, C_k$ et soit $\bar{h}(x)$ la fonction correspondante, obtenue à l'aide de la formule (88). Cette fonction aura donc comme racines les nombres $x_0, x_1, \dots, x_{n-k-1}$, la racine x_0 ayant l'ordre de multiplicité au moins égal à k .

¹⁾ Dans l'énoncé du théorème IV du travail [13] de G. PÓLYA on suppose que la famille $\mathfrak{Y}_n$ a la propriété $I_n^*[a, b]$, c'est-à-dire qu'elle est interpolatrice de l'ordre n dans l'intervalle semi-fermé $[a, b]$ et les nœuds $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ qui interviennent dans les conditions (85) sont considérés tous confondus dans le point $x = a$. Dans cette hypothèse, on montre la validité des relations (86) dans l'intervalle ouvert (a, b) . Voir le théorème A énoncé dans ce qui suit.

Il s'ensuit que $\bar{h}(x)$ s'annule au total $(n-k-1) + k = n-1$ fois dans l'intervalle (a, b) . Nous observons encore que l'intégrale $\bar{h}(x)$ n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle (a, b) , puisque $\bar{h}(x_{n-k}) = h_{k+1}(x_{n-k}) = 1$.

Puisque, par hypothèse, la famille $\mathfrak{Y}_n$ des intégrales de l'équation différentielle (1) a la propriété $I_n^*(a, b)$, il résulte conformément au lemme 1, que les racines $x_1, x_2, \dots, x_{n-k}$ de l'intégrale $\bar{h}(x)$ sont simples, et la racine x_0 ne peut avoir un ordre de multiplicité plus grand que k .

Nous utilisons maintenant l'identité suivante, établie par G. PÓLYA dans [13]:

$$W[h_1, \dots, h_k, y] = \frac{w_k^2}{w_{k-1}} \cdot \frac{d}{dx} \frac{w_{k-1}^2}{w_{k-2} w_k} \dots \frac{d}{dx} \frac{w_2^2}{w_1 w_3} \cdot \frac{d}{dx} \frac{w_1^2}{w_0 w_2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{y}{w_1}, \quad (89)$$

valable dans tout intervalle de l'axe Ox , où les fonctions

$$w_1 = h_1(x), w_2 = W[h_1(x), h_2(x)], \dots, w_k = W[h_1(x), \dots, h_k(x)]$$

ne s'annulent pas, et pour toute fonction $y(x)$ ayant des dérivées continues dans cet intervalle, jusqu'à l'ordre k inclusivement. Dans la formule (89) on convient de prendre $w_0 = 1$.

Supposons maintenant que les fonctions $h_1(x), h_2(x), \dots, h_k(x)$ qui interviennent en (89) sont celles qui ont été considérées dans l'énoncé du présent lemme, c'est-à-dire celles qui satisfont aux conditions (85). Dans le cas de ces fonctions, en tenant compte de l'hypothèse (87) il résulte que l'identité (89) est valable dans les intervalles ouverts (a, x_1) et (x_{n-1}, b) , quelle que soit la fonction $y(x)$, ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre k inclusivement. En particulier, en substituant la fonction $y(x)$ à $\bar{h}(x)$ dans (89), nous obtenons l'identité

$$W[h_1, \dots, h_k, \bar{h}] = \frac{w_k^2}{w_{k-1}} \cdot \frac{d}{dx} \frac{w_{k-1}^2}{w_{k-2} w_k} \dots \frac{d}{dx} \frac{w_2^2}{w_1 w_3} \cdot \frac{d}{dx} \frac{w_1^2}{w_0 w_2} \cdot \frac{d}{dx} \frac{\bar{h}}{w_1}. \quad (90)$$

Compte tenu de la relation (88) qui définit la fonction $h(x)$, on observe que

$$W[h_1, \dots, h_k, \bar{h}] = W[h_1, \dots, h_k, h_{k+1}] \equiv w_{k+1} \quad (91)$$

D'autre part, en tenant compte du fait établi antérieurement, à savoir que l'ordre de multiplicité de la racine x_0 relativement à la fonction $\bar{h}(x)$ ne peut être plus grand que k , et en tenant compte également des relations (87), supposées valables dans les deux intervalles (a, x_1) et (x_{n-1}, b) , on déduit par application successive du théorème de Rolle que le deuxième membre de l'identité (90) ne s'annule pas dans le point x_0 . Cela étant, compte tenu de l'identité (91), il s'ensuit que la fonction $w_{k+1}(x)$ ne s'annule pas dans le point x_0 . Mais, comme x_0 a été choisi arbitrairement dans l'intervalle (a, x_1) ou (x_{n-1}, b) , il résulte la relation $w_{k+1}(x) \neq 0$, valable dans chacun de ces intervalles, c.q.f.d.

En vertu du principe de l'induction, il en résulte le lemme 10.

Observation. Supposant que l'équation différentielle (1) a les coefficients $a_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) continus dans l'intervalle semi-fermé $[a, b]$ et en choisissant les nœuds $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ qui interviennent dans

$$\bar{L}_{n-1}(u) = u^{(n-1)} + \bar{a}_1(x) u^{(n-2)} + \dots + \bar{a}_{n-1}(x) u = 0, \quad (97)$$

ayant les coefficients continus dans l'intervalle $[a, x_1]$. L'intégrale $u_0(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y_0(x)}{h_1(x)} \right)$ de l'équation (97) correspondra à l'intégrale $y_0(x)$ de l'équation différentielle (1). Etant donné que par hypothèse, la fonction $y_0(x)$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $[a, x_1]$, notamment dans les points $\xi_1 = a, \xi_2, \dots, \xi_m$, ayant les ordres de multiplicité respectivement $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ satisfaisant évidemment à l'inégalité $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_m \geq n$, il résulte que l'intégrale $u_0(x)$ de l'équation (97) s'annulera au moins $n - 1$ fois dans l'intervalle $[a, x_1]$. D'autre part, en tenant compte du fait que l'intégrale $y_0(x)$ n'est pas identiquement nulle dans (a, b) , il s'ensuit que également $u_0(x)$ n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle $[a, x_1]$. En effet, en supposant le contraire, c'est-à-dire que $u_0(x) \equiv 0$ dans l'intervalle $[a, x_1]$, il résulterait, compte tenu des changements de variable (95) et (96) que l'identité $y_0(x) = Ch_1(x)$ a lieu dans l'intervalle $[a, x_1]$ et donc dans tout l'intervalle (a, b) . Dans cette identité, C représente une constante. Etant donné que $y_0(x)$ est par hypothèse, non identiquement nulle dans l'intervalle (a, b) , il s'ensuit de l'identité $y_0(x) \equiv Ch_1(x)$ que $C \neq 0$. Il résulterait en même temps que l'intégrale $h_1(x)$ s'annule dans l'intervalle $[a, x_1]$ pour toutes les valeurs de cet intervalle pour lesquelles s'annule aussi $y_0(x)$. Mais la fonction $y_0(x)$ s'annule n fois dans l'intervalle $[a, x_1]$ dans les points $\xi_1 = a, \xi_2, \dots, \xi_m$ ayant les ordres de multiplicité respectivement $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ ($\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_m \geq n$). Mais, puisque $y_0(x)$ n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle (a, b) , il résulte que le nombre m de ces points satisfait à l'inégalité $m \geq 2$ et donc que la fonction $y_0(x)$ s'annule au moins dans un point à l'intérieur de l'intervalle (a, x_1) . D'autre part, comme il ressort de (85), l'intégrale $h_1(x)$ s'annule encore $n - 1$ fois dans l'intervalle $[x_1, b]$. On arrive en définitive à la conclusion que l'intégrale non identiquement nulle $h_1(x)$ de l'équation (1) s'annule au moins n fois dans l'intervalle ouvert (a, b) , ce qui contredirait la propriété $I_n^*(a, b)$ de la famille $\mathcal{U}_n$, propriété supposée valable par hypothèse.

Nous obtenons en définitive, le résultat suivant : l'intégrale $u_0(x)$ de l'équation (97) n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle $[a, x_1]$ et s'annule au moins $n - 1$ fois dans cet intervalle.

Par la suite, aux intégrales $h_2(x), \dots, h_{n-1}(x)$ de l'équation (1) correspondront respectivement les intégrales $u_2(x), \dots, u_{n-1}(x)$ de l'équation (97), ayant les expressions :

$$u_i(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{h_i(x)}{h_1(x)} \right), \quad i = 2, \dots, n - 1 \quad (98)$$

Ces intégrales sont définies dans l'intervalle $[a, x_1]$, où $h_1(x)$ ne s'annule pas. Utilisant l'identité

$$W \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right)', \left(\frac{h_3}{h_1} \right)', \dots, \left(\frac{h_i}{h_1} \right)' \right] = \frac{1}{h_1^i} W[h_1, h_2, \dots, h_i],$$

établie par G. PÓLYA dans [13] et en tenant compte des formules (98), on constate que les intégrales $u_2(x), \dots, u_{n-1}(x)$ de l'équation (97) satis-

font dans l'intervalle (a, x_1) aux conditions suivantes, analogues aux conditions (94) :

$$u_2(x) \neq 0, W[u_2, u_3] \neq 0, \dots, W[u_2, u_3, \dots, u_{n-1}] \neq 0 \quad (99) \\ \text{pour } x \in (a, x_1).$$

Nous arrivons ainsi à la conclusion que l'équation différentielle (97) a les coefficients continus dans l'intervalle semi-fermé $[a, x_1]$ et satisfait aux conditions (99) dans l'intervalle ouvert (a, x_1) .

Conformément au théorème I du travail [13] de G. PÓLYA (voir théorème B énoncé ci-dessous), il résulte que la famille $\mathcal{U}_n$ des intégrales de l'équation différentielle (97) aura la propriété $I_{n-1}^*(a, x_1)$. Puis, en tenant compte de l'hypothèse faite initialement, à savoir que la propriété exprimée par le théorème 2 du présent travail est vraie pour le nombre naturel $n - 1$ ¹⁾, il résulte que la famille $\mathcal{U}_{n-1}$ des intégrales de l'équation différentielle (97) a également la propriété $I_{n-1}^*[a, x_1]$. Mais cette conclusion est incompatible avec l'existence de l'intégrale $u_0(x)$ de la même équation (97), qui, comme on l'a montré précédemment, n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle $[a, x_1]$ et s'annule en même temps dans cet intervalle $n - 1$ fois. Cette contradiction provient de l'hypothèse absurde selon laquelle dans les conditions du théorème 2, l'équation différentielle (1) admettrait dans l'intervalle $[a, b)$ une intégrale non identiquement nulle $y_0(x)$, qui s'annule n fois dans cet intervalle. Il résulte donc que, dans les hypothèses du théorème 2 du présent travail, l'équation différentielle (1) n'admet aucune intégrale $y_0(x)$ de ce genre, et donc que la famille $\mathcal{U}_n$ a la propriété $I_n^*[a, b)$ c.q.f.d.

Avant de formuler les conséquences des résultats obtenus ci-dessus, nous énoncerons le théorème suivant qui est également donné par G. PÓLYA dans le travail [13].

Théorème B.²⁾ Si l'équation différentielle (1) a les coefficients continus dans l'intervalle ouvert (a, b) , et si elle admet $n - 1$ intégrales $h_1(x), \dots, h_{n-1}(x)$ satisfaisant dans cet intervalle aux relations :

$$h_1(x) \neq 0, W[h_1(x), h_2(x)] \neq 0, \dots, W[h_1(x), \dots, h_{n-1}(x)] \neq 0,$$

alors la famille $\mathcal{U}_n$ des intégrales de l'équation différentielle (1) a la propriété $I_n^*(a, b)$.

Conséquences

Il résulte dès théorèmes A et B de G. PÓLYA, en tenant compte également du théorème 2 démontré ci-dessus, le

Théorème 3. Dans l'hypothèse que l'équation différentielle (1) a les coefficients continus dans l'intervalle semi-fermé $[a, b)$, la condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathcal{U}_n$ des intégrales de l'équation (1) ait la propriété $I_n^*[a, b)$ est que pour tout système de $n - 1$ intégrales $h_1(x), h_2(x), \dots, h_{n-1}(x)$ de l'équation différentielle (1), satisfaisant aux conditions (92), aient lieu les relations (93) dans l'intervalle ouvert (a, b) .

¹⁾ Cette hypothèse a été faite à l'occasion de l'application du principe de l'induction.

²⁾ Ce théorème est numéroté par II dans le travail [13] cité.

Observation. Supposons que l'équation différentielle (1) ait les coefficients continus dans un intervalle semi-fermé $[a, b)$ et qu'elle admette un système particulier de $n - 1$ intégrales $h_1(x), h_2(x), \dots, h_{n-1}(x)$ satisfaisant aux conditions (93) dans l'intervalle (a, b) . Dans ces hypothèses, tout autre système de $n - 1$ intégrales, satisfaisant aux conditions (92), vérifiera également les relations (93) dans l'intervalle (a, b) .

Cette propriété résulte immédiatement des théorèmes A et B de G. PÓLYA ainsi que du théorème 2 du présent travail.

* * *

Ensuite, en tenant compte du théorème 1 établi dans le présent travail, ainsi que du théorème 3 énoncé ci-dessus, nous obtiendrons le

Théorème 4. Dans l'hypothèse que l'équation différentielle (1) a les coefficients continus dans l'intervalle semi-fermé $[a, b)$, la condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathcal{V}_n$ des intégrales de cette équation ait la propriété $I_n[a, b)$ est que pour tout système de $n - 1$ intégrales $h_1(x), h_2(x), \dots, h_{n-1}(x)$ de l'équation différentielle (1), satisfaisant aux conditions (92), aient lieu les relations (93) dans l'intervalle ouvert (a, b) .

Applications

La détermination de l'intervalle maximum $[a, b)$, à l'extrémité gauche donnée, où la famille $\mathcal{V}_n$ des intégrales de l'équation différentielle (1) a la propriété $I_n[a, b)$ et donc la propriété $I_n^*[a, b)$.

Ce problème est relié à de nombreux travaux concernant les problèmes aux limites polylocaux relatifs aux équations différentielles linéaires. Dans le présent travail, on donne une solution de ce problème, liée aux résultats obtenus dans les paragraphes précédents.

Supposons qu'on donne une équation différentielle (1) ayant les coefficients $a_i(x)$ continus dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Soit $x = a$ un nombre réel quelconque donné. Nous nous proposons de déterminer l'intervalle semi-fermé $[a, b)$, de longueur maximum, où la famille $\mathcal{V}_n$ des intégrales de l'équation différentielle (1) a la propriété $I_n[a, b)$ (donc également la propriété $I_n^*[a, b)$). Dans ce but, en tenant compte du théorème 4, ainsi que de l'observation faite à l'occasion du théorème 3, nous pouvons procéder de la manière suivante :

Nous considérons d'abord un système particulier quelconque de $n - 1$ intégrales $h_1(x), h_2(x), \dots, h_{n-1}(x)$ de l'équation différentielle (1), satisfaisant aux conditions (92), et ensuite nous déterminerons l'intervalle ouvert maximum (a, b) , où aient lieu les relations (93) pour le système d'intégrales choisi. L'intervalle semi-fermé $[a, b)$ sera l'intervalle cherché.

Exemple.

Soit l'équation différentielle linéaire et homogène à coefficients constants, du 3^{ème} ordre

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0. \quad (100)$$

Nous supposons que le polynôme caractéristique associé à cette équation a une racine réelle r et deux racines complexes $\alpha \pm i\beta$. Nous nous proposons de déterminer les intervalles de longueur maximum, de la forme $[a, b)$, où la famille $\mathcal{V}_3$ des intégrales de cette équation différentielle a la propriété respective $I_3[a, b)$ (donc également la propriété $I_3^*[a, b)$).

Comme on l'a montré dans le travail [2], la longueur de ces intervalles maximaux d'interpolation ne dépend pas du nombre a qui représente l'extrémité gauche de l'intervalle (ceci, puisque une telle équation différentielle reste inchangée, si une translation quelconque est effectuée sur la variable indépendante). En notant par l la longueur cherchée et en prenant $a = 0$, le problème se réduit à trouver l'intervalle maximum de la forme $[0, l)$ où la famille $\mathcal{V}_3$ a la propriété $I_3[0, l)$.

Toujours dans le travail [2] on a montré que, en utilisant un changement de variables

$$x = \beta^{-1}t, \quad y = e^{\frac{\alpha}{\beta}t} \cdot z(t),$$

l'équation différentielle donnée se transforme en une autre équation différentielle, ayant des coefficients constants, réels, dont le polynôme caractéristique a pour racines complexes, les nombres $+i$ et $-i$. En notant par l^* la longueur de l'intervalle maximum de la forme $[0, l^*)$, où l'ensemble des intégrales de l'équation transformée a la propriété $I_3[0, l^*)$, on constate aisément que l'égalité $l = |\beta|^{-1} \cdot l^*$ a lieu. Ainsi, sans restreindre la généralité du problème, on peut supposer que les deux racines complexes du polynôme caractéristique associé à l'équation donnée (100), sont $+i$ et $-i$. Nous noterons toujours par r la racine réelle du polynôme caractéristique associé à cette équation. Nous observons encore que nous pouvons supposer cette racine non négative, ce qui peut toujours se réaliser, en effectuant le changement de la variable indépendante $x = -\xi$.

Ainsi nous supposerons dans ce qui suit que les racines de polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle (100) sont $r \geq 0$, $+i$ et $-i$. Dans cette hypothèse, l'intégrale générale de l'équation (100) s'écrira

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 \sin x + C_3 \cos x. \quad (101)$$

Pour trouver le nombre l correspondant, nous utiliserons la méthode de travail présenté précédemment.

Nous déterminons d'abord deux intégrales $h_1(x)$ et $h_2(x)$ de l'équation différentielle donnée, qui satisfassent aux conditions :

$$\begin{aligned} h_1(0) &= h_1'(0) = 0, & h_1''(0) &= 1 \\ h_2(0) &= 0, & h_2'(0) &= 1, & h_2''(0) &= 0. \end{aligned} \quad (102)$$

On trouve que

$$h_1(x) = \frac{1}{1+r^2} (e^{rx} - r \sin x - \cos x)$$

$$h_2(x) = \sin x;$$

$$w_1(x) = h_1(x) = \frac{1}{1+r^2} (e^{rx} - r \sin x - \cos x)$$

$$w_2(x) = \frac{1}{1+r^2} [e^{rx} (\cos x - r \sin x) - 1].$$

Il faudra trouver l'intervalle ouvert maximal $(0, l)$ où aient lieu les relations $w_1(x) \neq 0$, $w_2(x) \neq 0$. La longueur l de cet intervalle est donnée par la formule $l = \min \{\rho_1, \rho_2\}$ où ρ_1 et ρ_2 représentent les plus petits racines positives des équations $w_1(x) = 0$, respectivement $w_2(x) = 0$. Nous distinguons les deux cas suivants, selon que $r > 0$, ou $r = 0$.

Cas 1. $r > 0$.

Pour étudier dans ce cas le comportement de la fonction $w_1(x)$ dans l'intervalle $(0, \infty)$ nous calculons

$$\frac{d}{dx} w_1(x) = \frac{1}{1+r^2} (re^{rx} - r \cos x + \sin x).$$

On observe d'une manière directe que dans le cas considéré a lieu dans l'intervalle $(0, \pi)$, l'inégalité $\frac{d}{dx} w_1(x) > 0$. Donc, dans cet intervalle, la fonction $w_1(x)$ est croissante et comme $w_1(0) = 0$, il s'ensuit que $w_1(x)$ prend des valeurs positives dans l'intervalle $(0, \pi)$.

D'autre part, nous observons que si $x \geq \pi$, alors ont lieu les inégalités :

$$(1+r^2)w_1(x) = e^{rx} - r \sin x - \cos x > e^{r\pi} - r - 1 > 0.$$

Il s'ensuit que dans l'intervalle $[\pi, \infty)$, la fonction $w_1(x)$ ne s'annule pas, restant toujours positive. En définitive nous obtenons le résultat que, dans le cas considéré, la fonctions $w_1(x)$ n'a pas de racines positives.

En ce qui concerne le comportement de la fonction $w_2(x)$, on obtient aussitôt que $\frac{d}{dx} w_2(x) = -e^{rx} \sin x$, d'où l'on déduit que la fonction $w_2(x)$ est décroissante dans l'intervalle $(0, \pi)$ et croissante dans l'intervalle $(\pi, 2\pi)$. Nous obtenons le tableau de variation :

x	0	π	2π
$\frac{d}{dx} w_2(x)$	0	— — — 0	+ + + + 0
$w_2(x)$	0	$\searrow$ min $\nearrow$	$\frac{1}{1+r^2} (e^{2\pi r} - 1)$

Il résulte de ce tableau que, si $r > 0$, alors la plus petite racine positive de la fonction $w_2(x)$ est située dans l'intervalle $(\pi, 2\pi)$.

En conclusion, dans le cas $r > 0$ considéré, nous avons $l = \rho_2$.

Cas 2. $r = 0$.

Dans ce cas, nous avons

$$w_1(x) = 1 - \cos x, \quad w_2(x) = \cos x - 1$$

et on voit que $l = \rho_1 = \rho_2 = 2\pi$.

Nous retrouvons, en définitive, le résultat suivant, établi par une autre voie dans le travail [2] :

Si le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle (100) a une racine réelle $r \geq 0$, ainsi que deux racines complexes $+i$ et $-i$, alors le nombre l correspondant à l'équation différentielle considérée est égal à la racine de l'intervalle $(\pi, 2\pi)$ de l'équation

$$(1+r^2)w_2(x) = e^{rx}(\cos x - r \sin x) - 1 = 0.$$

L'Académie de la République Populaire Roumaine,
L'Institut de calcul

BIBLIOGRAPHIE

1. АЛИЕВ Р. Г., К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Итоговая научная аспирантская конференция за 1962 год — Казань (Тезисы докладов), под редакцией проф. М. И. Абдрахманова.
2. ARAMĂ O., RÎPIANU D., Asupra problemei polilocale pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți (I). Studii și cercetări de matematică (Cluj), VIII, 37—74 (1957).
3. ARAMĂ O., RÎPIANU D., Asupra problemei polilocale pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți (II). Studii și cercetări de matematică (Cluj), VIII, 211—265 (1957).
4. АЗБЕЛЛЕВ Н. В., ЦАЛЮК, З. Б., К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка. Матем. сборник, 51 (93), 4, 475—486 (1960).
5. БЕССМЕРТНЫХ Г. А. и ЛЕВИН А. Ю., О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной. Доклады Акад. Наук СССР, 144, № 3, 471—474 (1962).
6. FOIAS C., GUSSI G., POENARU V., Despre problema polilocală la ecuații diferențiale lineare de ordinul al doilea. Bul. șt. al Acad. R.P.R., Secț. șt. mat. și fiz., VII, 3, 699—721 (1953).
7. HARTMAN Ph. and WINTNER A., On an oscillation criterion of de la Vallée Poussin. Quarterly of Applied Mathematics, 13, 3, 330—332 (1955).
8. КОНДРАТЬЕВ В. А., О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка. Труды московского математического общества, том 8, 259—281 (1959).
9. КОНДРАТЬЕВ В. А., О нулях решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$. Докл. Акад. Наук СССР, 120, № 6, 1180—1182 (1958).
10. ЛЕВИН А. Ю., О некоторых оценках дифференцируемой функции. Доклады Акад. Наук СССР, 138, № 1, 37—38 (1961).

11. MAMMANA G., *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogene in prodotto di fattori, e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari.* Math. Zeitschr., **33**, 186—231 (1931).
12. OPIAL Z., *Sur une inégalité de C. de la Vallée Poussin dans la théorie de l'équation différentielle linéaire de second ordre.* Annales Polon. Mathem., **VI**, 1, 87—91 (1959).
13. PÓLYA G., *On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation.* Amer. Math. S. Bull. **24**, 312—324 (1922).
14. DE LA VALLÉE POUSSIN CH. J., *Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une integrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n.* Journ. de Math. pures et appl., (9), **3**, 125—144 (1929).
15. SANSONE G., *Equazioni differenziali nel campo reale (parte prima)*, Bologna, 1948.
16. ZAJDMAN S., *Evaluări ale distanței între zerourile ecuațiilor diferențiale.* Revista Univ. C. I. Parhon și a Politehnicii București, nr. 6—7 (1955).