CÎTEVA ECUAȚII REPREZENTATE CU NOMOGRAME CU TRANSPARENT ORIENTAT

DE

L. BAL

În studiul general al nomogramelor concepute cu ajutorul elementelor mobile se introduce noțiunea de contact, de legătură dintre elementele din planul mobil și cele din planul fix. O legătură care micșorează numărul gradelor de libertate ale planului mobil cu o unitate, se numește contact simplu. El poate fi obținut fie prin apartenența unui punct dintr-un plan la o curbă din al doilea, fie prin tangența unei curbe dintr-un plan cu o curbă din al doilea plan [1.]

Pentru fixarea planului mobil π' pe planul fix π, sînt necesare 3 contacte simple care se numesc și *contacte de poziție*. Dacă se mai dau și alte contacte numite contacte de rezolvare, acestea formează condiții, care reprezintă anumite ecuații a căror structură este strîns legată de forma contactelor.

Dacă în planul fix avem cîmpuri binare și în planul mobil familii de curbe, atunci cele 4 contacte se exprimă cu *ecuația de structură*

$$P_{12} \vdash\!\dashv C_9\,;\ P_{34} \vdash\!\dashv C_{10}\,;\ P_{56} \vdash\!\dashv C_{11}\,;\ P_{78} \vdash\!\dashv C_{12} \qquad (1)$$

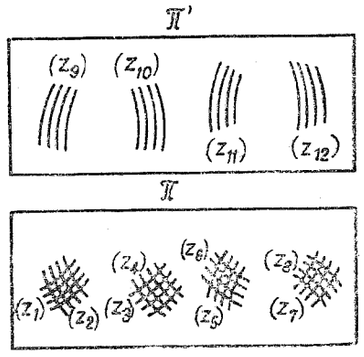


Fig. 1

Expresiile analitice ale acestor contacte conțin parametrii de poziție ai planului mobil pe planul fix pe care să-i notăm cu α, a, b. Eliminarea lor din cele 4 relații ne conduce la o ecuație între elementele cotate, căreia îi corespunde desenul cotat, numit *nomogramă*.

Trei din aceste contacte fixează poziția planului mobil, iar al patrulea permite citirea rezultatului. Din acest motiv el se numește contact de rezolvare.

În felul acesta se obțin toate tipurile de nomograme concepute izolat și deduse din proprietățile geometrice ale figurilor care intervin în nomografie;

nomogramele cu rețele sau cu linii concurente și nomogramele cu puncte aliniate, apar ca niște cazuri particulare.

Printre aceste nomograme mai simple apar acelea, în care o dreaptă din planul mobil sau *planul transparent* este paralelă cu o dreaptă din planul fix. Acestea sînt numite *nomograme cu transparent orientat* [2] [8].

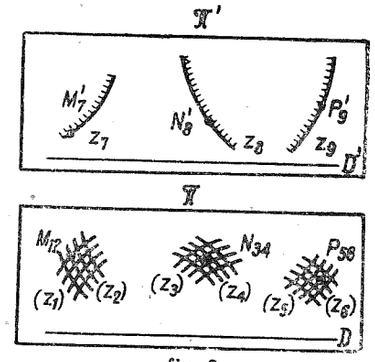


fig. 2

Nomogramele cu transparent orientat sînt puțin răspîndite și nu au constituit obiectul unor studii teoretice decît tîrziu. Acum cîțiva ani [4] [5] [6], matematicianul sovietic G. S. Hovanski a reluat studiul lor și prin introducerea unor considerații noi a îmbunătățit substanțial aceste nomograme. În ecuațiile de structură ale nomogramelor intră mai multe contacte de rezolvare. Aceasta a permis introducerea unor funcții și variabile auxiliare care au adus simplificari importante. De asemenea ele admit o transformare destul de generală. Din acest motiv nomogramele cu transparent orientat pot deveni simple atît în construcție cît și în mînuire.

G. S. Hovanski consideră la început [4] nomogramele cu transparent orientat cu următoarea ecuație de structură

$$M_{12} \models\!\mid M'_7 \ : \ N_{34} \models\!\mid N'_8 \text{ și } P_{56} \models\!\mid P'_9 , \tag{2}$$

în care unul din contactele duble e un contact de poziție și celelalte două sînt contacte de rezolvare (fig. 2).

Această formulă de structură stabilește următoarele relații între coordonatele punctelor în contact.

$$\begin{aligned} f_{12} - f_7 &= f_{34} - f_8 = f_{56} - f_9 \\ g_{12} - g_7 &= g_{34} - g_8 = g_{56} - g_9 \end{aligned} \tag{3}$$

Relațiile (3) constituie un sistem de 4 ecuații cu nouă necunoscute ce se rezolvă cu nomograma cu transparent din fig. 2.

Fiind date variabilele z_1, z_2, z_7, z_8 și z_9 se caută valorile variabilelor z_3, z_4, z_5, și z_6. După ce se pune în coincidență M_{12} cu M'_7, atunci punînd și $D' \parallel$ cu D poziția transparentului π' este fixată. Punctele N'_8 și P'_9 de cote z_8 și z_9 date, coincid cu punctele N_{34} și P_{56} din cîmpurile binare (z_3, z_4) și (z_5, z_6) din planul fix, ale căror cote z_3, z_4, z_5 și z_6 se citesc pe nomogramă. Se pot considera și alte grupări de valori date și valori căutate.

În cazul cînd scările din planul mobil sînt înlocuite cu cîmpuri binare, atunci nomograma obținută are formula de structură

$$M_{12} \models\!\mid M'_{78} \ ; \ N_{34} \models\!\mid N'_{9,10} \ ; \ P_{56} \models\!\mid P_{11,12} \tag{4}$$

și rezolvă sistemul

$$\begin{aligned} f_{12} - f_{78} &= f_{34} - f_{9,10} = f_{56} - f_{11,12} \\ g_{12} - g_{78} &= g_{34} - g_{9,10} = g_{56} - g_{11,12} \end{aligned} \tag{5}$$

Această nomogramă permite de asemenea să se găsească valorile a patru variabile z_9, z_{10}, z_{11} și z_{12} cînd se cunosc valorile $z_1, z_2, \ldots, z_8$.

Cele două sisteme se numesc *sisteme fundamentale*. Dacă o ecuație sau un sistem de ecuații se poate pune sub forma uneia din sistemele fundamentale, atunci ea se poate rezolva cu nomograma corespunzătoare lor. Se poate obține o mare varietate de nomograme cu sistemele lor corespunzătoare, dacă utilizăm, în cele două plane, diferite distribuții de cîmpuri binare scări sau puncte fixe. Se pot folosi sisteme numai cu două ecuații dacă ecuația de structură conține un *contact dublu de rezolvare*.

Pentru a aduce o ecuație dată sau un sistem de ecuații date la forma sistemelor fundamentale se introduc variabile și funcții auxiliare care, pe lîngă faptul că permit reprezentarea ecuației cu nomograme cu transparent orientat, ajută și la alegerea convenabilă a elementelor nomogramei în cele două plane.

Aceste tipuri de nomograme admit o transformare afină generală ai cărei parametri G. S. Hovanski îi scrie astfel încît să aibe interpretări geometrice simple. [4]. Pentru nomograma corespunzătoare sistemului fundamental (5) ecuațiile elementelor nomogramei, în cazul transformării cea mai generală, se scriu ca în tabele de mai jos.

Planul fix

Coordonate	Cîmpul binar (z_1, z_2)	Cîmpul binar (z_3, z_4)	Cîmpul binar (z_5, z_6)
x	$a_0 + \mu_x(f_{12} + \delta_x g_{12})$	$a_0 + a + \mu_x(f_{34} + \delta_x g_{34})$	$a_0 + c + \mu_x(f_{56} + \delta_x g_{55})$
y	$b_0 + \mu_y(\delta_y f_{12} + g_{12})$	$b_0 + b + \mu_y(\delta_y f_{34} + g_{34})$	$b_0 + d + \mu_y(\delta_y f_{56} + g_{56})$

Planul mobil

Coordonate	Cîmpul binar (z_7, z_8)	Cîmpul binar $(z_9\ z_{10})$	Cîmpul binar (z_{11}, z_{12})
x	$a'_0 + \mu_y(f_{78} + \delta_x g_{78})$	$a'_0 + a + \mu_x(f_{9,10} + \delta_x g_{9,10})$	$a'_0 + c + \mu_x(f_{11,12} + \delta_x g_{11,12})$
y	$b'_0 + \mu_y(\delta_y f_{78} + g_{78})$	$b'_0 + b + \mu_y(\delta_y f_{9,10} + g_{9,10})$	$b'_0 + d + \mu_y(\delta_y f_{11,10} + g_{11,12})$

Aceşti parametri permit alegerea unor module convenabile şi a unei distribuţii avantajoase a cîmpurilor, familiilor cotate şi scărilor nomogramei în cele două plane.

II. Să folosim aceste rezultate la reprezentarea cîtorva ecuaţii şi sisteme de ecuaţii cu ajutorul nomogramelor cu transparent orientat.

1°. Să pornim dela sistemul

$$g = 0{,}95\,\frac{V^3}{V_0^3}\,(V - V_0)\,\frac{d^{\frac{3}{4}}}{H^{\frac{1}{4}}} \tag{6}$$

$$V_0 = 4{,}0\,d^{\frac{1}{3}}H^{\frac{1}{6}}$$

unde g, V, V_0, d şi H au anumite semnificaţii în hidrologie. Cu aceste formule, fiind date d, H şi V se calculează V_0 şi g.

Aplicînd logaritmii, sistemul (6) se poate aduce uşor la forma sistemului fundamental (5)

$$\log 4{,}0\,d^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6}\log H = \log V_0 \tag{7}$$

$$\log \frac{1}{0{,}95 d^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{4}\log H = \log \frac{V^3(V - V_0)}{V_0^3} - \log g.$$

Acest sistem conduce la ecuaţiile cîmpurilor şi scărilor nomogramei cu transparent căutat.

Planul fix

Coordonate	Cîmpul (d, H)	Cîmpul (d, H)	Cîmpul (V, V)
x	$a_0 + \mu_x\left(\log \frac{4{,}0\,d^{\frac{1}{3}}}{H^{\frac{1}{6}}} + \delta_x \log \frac{H^{\frac{1}{4}}}{0{,}95\,d^{\frac{3}{4}}}\right)$	$a_0 + a + \mu_x\left(\log \frac{4{,}0\,d^{\frac{1}{3}}}{H^{\frac{1}{6}}} + \delta_x \log \frac{H^{\frac{1}{4}}}{0{,}95\,d^{\frac{3}{4}}}\right)$	$a_0 + c + \mu_x\left[\log V_0 + \delta_x \log \frac{V^3(V - V_0)}{V_0^3}\right]$
y	$b_0 + \mu_y\left(\delta_y \log \frac{4{,}0\,d^{\frac{1}{3}}}{H^{\frac{1}{6}}} + \log \frac{H^{\frac{1}{4}}}{0{,}95\,d^{\frac{3}{4}}}\right)$	$b_0 + b + \mu_y\left(\delta_y \log \frac{4{,}0\,d^{\frac{1}{3}}}{H^{\frac{1}{6}}} + \log \frac{H^{\frac{1}{4}}}{0{,}95\,d^{\frac{3}{4}}}\right)$	$b_0 + d + \mu_y\left[\delta_y \log V_0 + \log \frac{V^3}{V_0^3}(V - V_0)\right]$

Planul transparent

Coordonate	Punctul A'	Punctul B'	Scara (g)
x	a_0'	$a_0' + a$	$a_0' + c + \mu_x\,\delta_x \log g$
y	b_0'	$b_0' + b$	$b_0' + d + \mu_y \log g$

Nomograma astfel concepută are ecuaţia de structură

$$A' \vdash\!\dashv C_d \;;\quad B' \vdash\!\dashv C_H \;;\quad P_g \vdash\!\dashv P_{V_0,\,V}$$

Fiind date d şi H, se fixează planul π' pe planul π şi scara (g) taie curba de cotă V dată. Cota punctului scării (g) situată la intersecţie şi cota curbei (V_0) care trece prin acest punct sînt valorile căutate.

O nomogramă mai simplă mi-a fost sugerată de matematicianul sovietic G. S. Hovanski.

Eliminînd pe V_0 în sistemul (7) găsim

$$g = 0{,}01485\,\frac{V^4}{d^{\frac{1}{4}}H^{\frac{3}{4}}} - 0{,}0594\,\frac{V^3 d^{\frac{1}{12}}}{H^{\frac{7}{12}}} \tag{8}$$

Punînd

$$10^M = \frac{V^4}{d^{\frac{1}{4}}H^{\frac{3}{4}}}\;;\quad 10^N = \frac{V^3 d^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{7}{12}}} \tag{9}$$

ecuaţia (8) devine

$$g = 0{,}01485 \cdot 10^M - 0{,}0594 \cdot 10^N. \tag{8'}$$

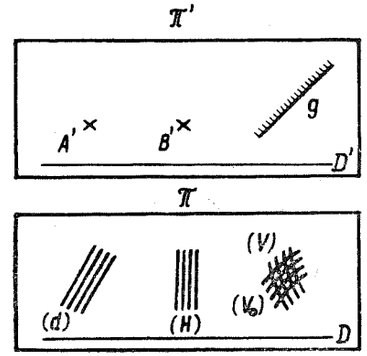


Fig. 3

Sistemul fundamental corespunzător sistemului (9) se poate găsi simplu

$$\begin{aligned} \log d + 3\log H &= -4M + 16\log V \\ 15\log d + \log H &= 36\,M - 48\,N \end{aligned} \tag{10}$$

şi conduce la nomograma (fig. 4) cu formula de structură

$$A' \vdash\!\dashv C_d\;;\quad B' \vdash\!\dashv C_H\;;\quad P_V' \vdash\!\dashv C_g.$$

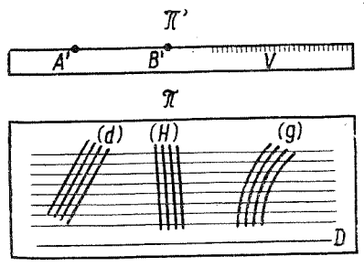


Fig. 4

2° Nomogramele cu transparent orientat pot să dea nomograme mai simple şi în cazul sistemelor ramificate [3].

Să considerăm o ecuație cu 8 variabile care admite disocierea următoare prin introducerea unor variabile auxiliare

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) &= 0\\
\varphi_1(\lambda_1,\ \lambda_4,\ z_5) &= 0\\
\varphi_2(\lambda_2,\ z_3,\ z_4) &= 0\\
\varphi_3(\lambda_3,\ z_1,\ z_2) &= 0\\
\varphi_4(\lambda_4,\ \lambda_5,\ z_6) &= 0\\
\varphi_5(\lambda_5,\ z_7,\ z_8) &= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Evident că fiecare din ecuațiile sistemului admite o reprezentare nomografică, printr-o nomogramă cu rețele. Nomograma compusă (fig. 5) corespunzătoare acestui sistem este reprezentarea nomografică a ecuației cu 8 variabile corespunzătoare

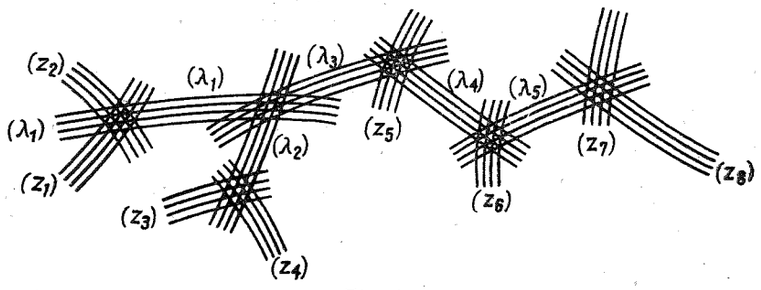


Fig. 5

În acest caz ecuația cu 8 variabile se poate scrie în forma

$$\Phi\ \{\varphi_1\ [\varphi_2\ [\varphi_3\ (z_1,\ z_2,)\ z_3\ ]\ z_4],\ \varphi_4\ (z_5,z_6),\varphi_5(z_7,z_8)\} = 0 \tag{12}$$

Rezolvînd în raport cu φ_1 avem

$$\varphi_1\ [\varphi_2\ [\varphi_3\ (z_1,z_2),\ z_3],z_4] = \psi_1[\varphi_4(z_5,z_6),\ \varphi_5(z_7,\ z_8)] \tag{13}$$

Sub această formă ecuația se poate rezolva de asemenea cu două nomograme cu transparent orientat.

Ecuația (13) admite disocierea

$$\begin{aligned}
\psi_1\ (\psi_{56},\ \psi_{78}) &= \mu\\
\varphi_1[\varphi_2[\varphi_3(z_1,z_2,)\ z_3] &= \mu
\end{aligned} \tag{14}$$

sau

$$\begin{aligned}
\psi_1\ [\psi_{56},\ \psi_{78}) &= \mu\\
\psi_2\ [\psi_2\ (u,\ z_4),\ \varphi_3\ (z_1,\ z_2)\ ] &= z_3.
\end{aligned} \tag{14'}$$

Să construim cele două sisteme fundamentale pentru ecuațiile sistemului (14'). Punînd

$$M = \varphi_3\ (z_1,\ z_2)\ ;\ N = \psi_2\ (z_4,u)\ ;\ \psi_3\ (M,N) = z_3$$

și

$$M_1 = \psi_{56}\ ;\ N_1 = \psi_{78}\ ;\ \psi_1(\ M_1,\ N_1) = \mu$$

găsim

$$\begin{aligned}
M &= T_4 - \alpha = \varphi_3\ (z_1,z_2)\\
N &= \psi_2\ (z_4,u) = T_1 - \beta
\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
M_1 &= T_7 - \alpha = \psi_{56}\\
N_1 &= \psi_{78} = T_5 - \beta
\end{aligned}$$

Aceste sisteme permit scrierea ecuațiilor elementelor celor două nomograme.

Pentru prima nomogramă, în planul de bază, avem

$$\begin{aligned}
x &= \varphi_3\ (z_1,z_2)\ ; \quad x = T_4\ ;\ x = M\\
y &= T_1 \qquad\quad ; \quad y = \psi_2\ (z_4,u)\ ;\ y = N
\end{aligned}$$

și în planul transparent

$$\begin{aligned}
x &= \alpha\ ,\ x = 0,\ \ x = 0\\
y &= 0\ ,\ y = \beta\ ,\ \ y = 0
\end{aligned}$$

Pentru a doua nomogramă avem;

$$\begin{aligned}
x &= T_7\ ;\ x = \psi_{56}\ ;\ x = M_1\\
y &= \psi_{78}\ ,\ y = T_5\ ,\ y = N_1
\end{aligned}$$

în planul fix

și

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1\ ,\ x = 0\ ,\ x = 0\\
y &= 0\ ,\ y = \beta_1\ ,\ y = 0
\end{aligned}$$

în planul mobil

Cele două nomograme reprezentate în fig. 6 și fig. 7 se utilizează după formulele de structură

$$\begin{aligned}
A' &\longmapsto (z_3)\ ;\ I_1 \longmapsto (z_1,z_2) \text{ și } I_2 \longmapsto (z_4,u)\\
B' &\longmapsto (u)\ \ ;\ J_1 \longmapsto (z_5,z_6) \text{ și } J_2 \longmapsto (z_7,\ z_8)
\end{aligned}$$

În realitate dreptele I_1, I_2, J_1, J_2 sînt scări ale variabilelor ajutătoare α, β; α_1, β_1, dar valorile lor nu ne interesează.

Dacă este posibil să se găsească astfel de cîmpuri ca cele două familii de curbe cotate (u) să coincidă în cele două plane de bază, se poate lua un singur plan de bază și un singur plan transparent, în care sînt trecute toate

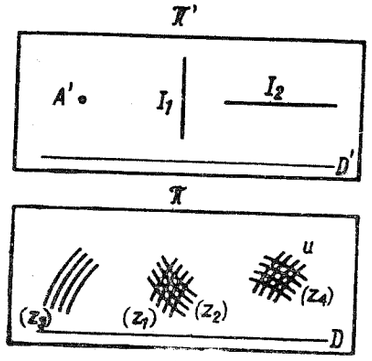


Fig. 6

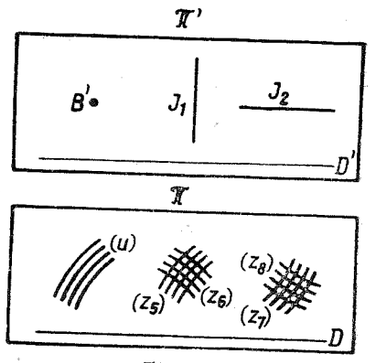


Fig. 7

elementele necesare. În acest caz în loc de a utiliza două nomograme distincte se va folosi un sigur plan de bază pe care se surpapune de două ori planul transparent.

Nomogramele sînt mai simple dacă ecuația cu 8 variabile admite separarea

$$\varphi_1 [\varphi_{12}, \varphi_{34}] = \psi_1 [\psi_{56}, \psi_{78}]$$

3°. Deși pentru ecuațiile cu 3 variabile se pot construi întodeauna nomograme cu rețele, totuși prezintă interes și cazurile cînd se pot construi nomograme mai simple cum sînt spre exemplu nomogramele cu puncte aliniate.

Ecuațiile

$$f_3 = f_1 f_2 + g_1 g_2 \tag{15}$$

$$\frac{f_3}{f_1 - f_2} - \frac{g_3}{g_1 - g_2} + 1 = 0 \tag{16}$$

respectiv de ordinul 5 și 6 nomografic, deși foarte simple nu pot fi reprezentate cu nomograme cu puncte aliniate. Evident ele pot fi reprezentate cu nomograme cu rețele, dar pentru ele se pot construi și nomograme cu transparent orientat destul de simple [7].

Astfel în prima ecuație, făcînd una din notațiile

$$M = f_1 f_2 \qquad N = g_1 g_2 \qquad f_3 = M + N$$

sau

$$10^M = f_1 f_2 \qquad 10^N = g_1 g_2 \qquad f_3 = 10^M + 10^N$$

obținem sistemele fundamentale

$$M - 0 = f_1 f_2 - 0 \qquad N - 0 = g_1 g_2 - 0 \qquad f_3 = M + N$$

sau

$$M - 0 = \log f_1 + \log f_2 \qquad N - 0 = \log g_1 + \log g_2$$

Pentru primul sistem corespunde nomograma (fig.8) cu formula de structură

$$A' \vdash\!\dashv (z_1, z_2) \; ; \; B' \vdash\!\dashv (z_3)$$

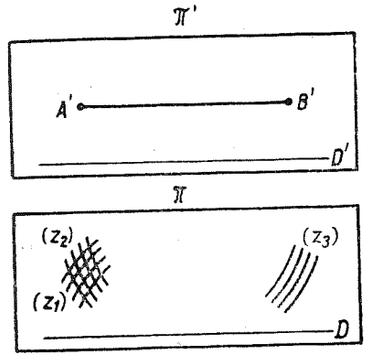


Fig. 8

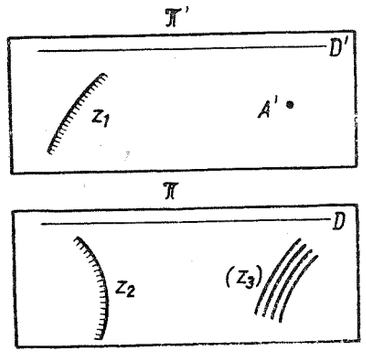


Fig. 9

Pentru al doilea sistem corespunde nomograma (fig. 9) cu formula de structură

$$(z_1) \vdash\!\dashv (z_2) \; ; \; A' \vdash\!\dashv (z_3)$$

Pentru a doua ecuație putem obține nomograme asemănătoare folosind sistemele

$$M = \frac{1}{f_1 - f_2} \qquad N = \frac{1}{g_1 - g_2} \qquad f_3 M - N g_3 + 1 = 0$$

sau

$$M = f_1 - f_2 \qquad N = g_1 - g_2 \qquad \frac{f_3}{M} - \frac{g_3}{N} + 1 = 0$$

Găsim nomogramele fig. 10 și 11 cu formulele de structură

$$A' \mid\!=\!\mid (z_1, z_2) \; ; \; B' \mid\!-\!\mid (z_3)$$

$$z_1 \mid\!=\!\mid z_2 \qquad ; \; A' \mid\!-\!\mid (z_3)$$

și

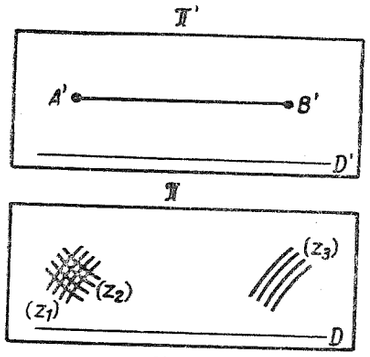


Fig. 10

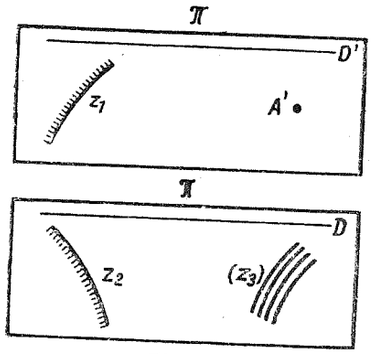


Fig. 11

Din aceste cîteva exemple se pot vedea multiplele posibilități pe care le au nomogramele cu transparent orientat pentru reprezentarea ecuațiilor și sistemelor.

BIBLIOGRAFIE

[1] *L. Bal și F. Rado,* Lecții de nomografie, Editura tehnică. București 1956.

[2] *Л. Бал,* Канонические формы для уравнений с четырьмя и пятью переменными. Mathematica t. 24(2), 193—197. (1959).

[3] *L. Bal,* Nomograme cu transparent orientat pentru sisteme ramificate. Studii și cercetări mat. (Cluj) 1962 sub tipar.

[4] *Г. С. Хованский,* Номограммы с ориентированным транспарантом. Гостехиздат, 1957.

[5] *Г. С. Хованский,* Некоторые вопросы практической номографии. Вычис. мат. сб. 4. с. 3—103, Изд-во А. Н. СССР., 1959.

[6] *Г. С. Хованский,* Исследование возможностей преобразования номограмм прозрачным ориентированным транспарантом. Вычис. мат. сб. 7. с. 133—150. Изд-во А.Н. СССР., 1961.

[7] *E. Jokl,* Nomogramy s pohyblirymi. Snb. vd Praci Fak. inz. stavitesti 69—73 (1961)

[8] *V. Pleskot,* K obecne teorii nomogramem. Sbo.ik vedeckyeh Praci Fakulty inzenyrskene stavitesti. 87 (1961)

РЕЗЮМЕ

НЕСКОЛЬКО УРАВНЕНИЙ С НОМОГРАММАМИ С ОРИЕНТИРОВАННЫМ ТРАНСПАРАНТОМ

Л. БАЛ

В этой статье автор изучает для уравнений и системы уравнений (6), (8), (11), (15), (16) возможность представления их номограмми с ориентированным транспарантом.

Даются уравнения элементов номограмм в инициальной плоскости и в прозрачной плоскости, а также и их схемы.

RÉSUMÉ

QUELQUES ÉQUATIONS REPRÉSENTÉES PAR DES NOMOGRAMMES À TRANSPARENT ORIENTÉ.

PAR

L. BAL

Dans cette note l'auteur ètudie quelques équations et systèmes d'équations (6), (8), (11), (15), (16) en vue de leur representation par des nomogrammes simples à transparent oriénté.

On donne les équations des éléments des nomogrammes dans le plan fixe et dans le plan mobile et aussi leur schémas.