

DESPRE REZOLVAREA ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE PRIN METODA HIPERBOLELOR TANGENTE. I

DE

B. JANKÓ

Comunicare prezentată de academician T. POPOVICIU în ședința din 7 mai 1963

Considerăm ecuația funcțională $P(x) = 0$, $P(x)$ fiind o operație neliniară definită în domeniul S complet și convex al spațiului liniar normat X și cu valori în spațiul liniar normat Y . Mai presupunem că operația $P(x)$ este continuă și admite derivate de tip Fréchet pînă la ordinul 3 inclusiv.

Metoda hiperbolelor tangente este dată prin algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n) \Gamma_n P(x_n) \right]^{-1} \Gamma_n P(x_n), \quad (1)$$

unde s-a notat $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$. La aplicarea metodei se alege în prealabil aproximația inițială $x_0 \in S \subset X$ și elementele $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in X$ se calculează succesiv prin formula (1).

În cele ce urmează vom stabili două teoreme referitoare la existența soluției $P(x) = 0$, precum și pentru convergența metodei date prin algoritmul (1).

TEOREMA 1. Presupunem că pentru aproximația inițială x_0 sînt îndeplinite următoarele condiții:

1° pentru derivata Fréchet $P'(x_0)$ există operația inversă și are loc delimitarea

$$\|\Gamma_0\| \leq B_0;$$

2° există inversa $Q_0 = \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_0 P''(x_0) \Gamma_0 P(x_0) \right]^{-1}$ și avem

$$\|Q_0 \Gamma_0 P(x_0)\| \leq \gamma_0;$$

3° derivatele Fréchet de ordinul 2, respectiv 3, sînt uniform mărginite în domeniul $S(x_0, r)$

$$\|P''(x)\| \leq M, \quad \|P'''(x)\| \leq N,$$

unde $S(x_0, r)$ este o sferă în spațiul X cu centrul în x_0 și de rază $r = 2\eta_0$;

$$4^\circ \quad h_0 = BM\eta_0 \leq \frac{1}{2};$$

$$5^\circ \quad \rho_0 = \frac{5}{4 - 2h_0} + \frac{5N}{6BM^2} \leq 4.$$

În aceste condiții, pentru ecuația operațională $P(x) = 0$ există o soluție $x^* \in S(x_0, 2\eta_0)$ care este limita șirului de aproximație $\{x_n\}$. Rapiditatea convergenței se caracterizează prin delimitarea

$$\|x^* - x_n\| \leq 2^{1-n}(2h_0)3^{n-1}\eta_0.$$

Observăm că condiția 5° este mai puțin restrictivă decît condiția corespunzătoare din lucrarea [1].

TEOREMA 2. Dacă avem îndeplinite condițiile

1° $\| \Gamma(x) \| \leq B < +\infty$ pentru orice $x \in S$, unde s-a notat $\Gamma(x) = [P'(x)]^{-1}$ iar $S \subset X$ este o sferă definită de inegalitatea $\|x - x_0\| \leq K\eta$ și $K = \sum_{i=0}^{\infty} (hf)^{3i-1}$;

2° avem delimitarea $\|x_1 - x_0\| \leq \eta < +\infty$;

3° există derivatele Fréchet $P''(x)$, $P'''(x)$ precum și delimitările

$$\|P''(x)\| \leq M, \quad \|P'''(x)\| \leq N$$

pentru orice $x \in S$;

4° sînt îndeplinite inegalitățile

$$h = B\eta M \quad \text{și} \quad hf < 1,$$

unde am notat

$$f^2 = \frac{1}{1 - \frac{h}{2}} \left(\frac{1}{4 - 2h} + \frac{N}{6BM^2} \right),$$

atunci ecuația operațională $P(x) = 0$ admite o soluție $x^* \in S$ la care tind aproximațiile $x_n (n = 1, 2, \dots)$ calculate prin algoritmul (1). Rapiditatea convergenței se exprimă prin evaluarea

$$\|x^* - x_n\| \leq K\eta(hf)^{3^n-1}.$$

Menționăm că $f < g$, unde g este notația corespunzătoare din lucrarea [2].

Academia R.P.R., Filiala Cluj
Institutul de calcul

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ. I

РЕЗЮМЕ

В работе улучшаются условия существования решения операционного уравнения $P(x) = 0$, а также условия сходимости метода касательных гипербола, данного М. А. Мертвцовою и В. Е. Мираковым.

SUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES NON LINÉAIRES PAR LA MÉTHODE DES HYPERBOLES TANGENTES. I

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on procède à l'amélioration des conditions d'existence de la solution de l'équation opérationnelle $P(x) = 0$, ainsi que des conditions de convergence de la méthode des hyperboles tangentes, posées par M. A. Mertvetzova et V. E. Mirakov.

BIBLIOGRAFIE

1. М. А. МЕРТВЕЦОВА, Аналог процесса касательных гипербола для общих функциональных уравнений, ДАН СССР, 1953, 88, 4, 611—614.
2. В. Е. МИРАКОВ, О сходимости метода касательных гипербола для нелинейных функциональных уравнений при условии типа Коши, Тр. Моск. физ.-техн. инст., 1958, 1, 204—213.