

UNELE ASPECTE ALE TEORIEI CONURILOR CONVEXE ÎN SPAȚII HILBERT DIN PUNCTUL DE VEDERE AL NOȚIUNII DE POLARĂ

DE

A. B. NÉMETH

Comunicare prezentată de academician T. POPOVICIU în ședința din 7 mai 1963

Noțiunea de polară a unei mulțimi joacă un rol însemnat în teoria inegalităților liniare (a se vedea [1], [2] și [3]). Fie E spațiul euclidian n dimensional și M o submulțime a lui. Numim polară a mulțimii M mulțimea

$$M^* = \{x \mid (x, y) \geq 0 \text{ pentru toți } y \in M\},$$

unde (x, y) înseamnă produsul scalar al vectorilor x și y . Teorema lui Farkas exprimă că dacă M este con convex avem

$$M^{**} = M.$$

În analiza funcțională există noțiuni mai generale de polară cum este cea întâlnită în [4].

Introducem și noi o noțiune de polară, fiind imediata generalizare a celei de mai sus.

DEFINIȚIA 1. Fie H un spațiu Hilbert real, nu neapărat separabil, și M o submulțime a lui. Vom numi polară de pas r a mulțimii M mulțimea

$$M^r = \{x \mid (x, y) \geq r \|x\| \|y\| \text{ pentru toți } y \in M\},$$

unde (x, y) este produsul scalar definit în H .

DEFINIȚIA 2. Fie $x_0 \in N$, $\|x_0\| = 1$.

Vom numi con circular cu unghiul $\rho \geq 0$ și centrul în x_0 submulțimea $\chi_\rho \subset H$ definită după cum urmează:

$$\chi_\rho = \{x \mid (x_0, x) \geq \rho \|x\|\}.$$

Am stabilit următoarele teoreme:

1. Transformarea polară de pas $2\rho^{2-1}$ lasă invariante conurile circulare cu unghiul ρ , adică

$$\chi_{\rho}^{2\rho^{2-1}} = \chi_{\rho}.$$

2. Dacă $-\sqrt{1-\rho^2} \leq s \leq \rho$, dacă ρ și $s\rho + \sqrt{(1-s^2)(1-\rho^2)}$ nu sînt ambele egale cu zero, atunci

$$\chi_{\rho}^s = \chi_{s\rho + \sqrt{(1-s^2)(1-\rho^2)}}.$$

3. Pentru orice s , pentru care sînt satisfăcute condițiile de mai sus

$$\chi_{\rho}^{ss} = \chi_{\rho}.$$

4. Condiția necesară și suficientă ca pentru $\alpha \geq 0$

$$M^{\alpha\alpha} = M$$

este ca mulțimea M să fie intersecție de conuri circulare χ_{α} .

5. Dacă $0 \leq \beta \leq \alpha$, atunci pentru orice mulțime pentru care

$$M^{\alpha\alpha} = M,$$

avem de asemenea

$$M^{\beta\beta} = M.$$

Academia R.P.R., Filiala Cluj
Institutul de calcul

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ КОНУСОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ПОНЯТИЯ ПОЛЯРНОЙ

РЕЗЮМЕ

Работа вводит новое понятие полярного подмножества действительного гильбертова пространства H . Изучаются множества, для которых имеет место теорема Фаркаша, с помощью введенного понятия полярной.

QUELQUES ASPECTS DE LA THÉORIE DES CÔNES CONVEXES DANS LES ESPACES HILBERTIENS AU POINT DE VUE DE LA NOTION DE POLAIRE

RÉSUMÉ

L'auteur introduit une nouvelle notion de polaire d'un sous-ensemble dans l'espace de Hilbert réel H . Il étudie les ensembles pour lesquels, dans la conception de la nouvelle notion de polaire, le théorème de Farkas est valable.

BIBLIOGRAFIE

1. D. GALE, *Convex polyhedral cones and linear inequalities*, in „Activity analysis of production and allocation” (ed. T.C. Koopmans), J. Wiley & Sons, New York, 1951.
2. M. GARSTENHABER, *Theory of convex polyhedral cones*, in „Activity analysis of production and allocation” (ed. T. C. Koopmans), J. Wiley & Sons, New York, 1951, 287—316.
3. A. I. GOLDMAN, A. W. TUCKER, *Polyhedral convex cones*, in „Linear inequalities and related systems” (ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker), Princeton University Press, Princeton, 1956.
4. Д. А. РАЙКОВ, *Векторные пространства*, Физматгиз, Москва, 1962, III, II.