

ASUPRA MULȚIMILOR CONVEXE CARE ADMIT SECANTE COMUNE

DE

VASILE PETEANU

Comunicare prezentată de academician T. POPOVICIU în ședința din 7 mai 1963

1. În 1942 L. A. Santaló [6] demonstrează

TEOREMA 1. *Fie dată în plan o familie finită de segmente de dreaptă, paralele. Dacă oricare trei segmente pot fi intersectate cu o dreaptă, atunci există o dreaptă care intersectează toate segmentele familiei.*

Această teoremă reprezintă soluționarea unui caz particular al unei probleme enunțate în [7]. Ea a fost generalizată în mai multe direcții [1], [3], [4], [5]. Toate aceste generalizări s-au limitat însă la E_2 . În prezenta notă ne propunem să extindem o parte din rezultatele cunoscute și în E_3 .

2. Fie în E_3 o familie $\mathcal{M}$ de corpuri convexe $C_1, C_2, \dots, C_m$. Vom nota cu $\mathcal{F}_{ij}$ mulțimea dreptelor care intersectează simultan corpurile C_i și C_j . De asemenea, vom nota cu $\mathcal{F}_{ijk\dots l}$ mulțimea dreptelor care intersectează simultan corpurile $C_i, C_j, C_k, \dots, C_l$.

Avem următoarele relații evidente:

$$\mathcal{F}_{ijk} = \mathcal{F}_{ij} \cap \mathcal{F}_{ik} = \mathcal{F}_{ij} \cap \mathcal{F}_{ik} \cap \mathcal{F}_{ik},$$

$$\mathcal{F}_{ijkl} = \mathcal{F}_{ij} \cap \mathcal{F}_{ik} \cap \mathcal{F}_{il} = \mathcal{F}_{ij} \cap \mathcal{F}_{kl} = \mathcal{F}_{ijk} \cap \mathcal{F}_{il} = \dots$$

Spunem că planul P separă două corpuri $C_i \in C_k$ dacă $C_i \in H \cup P$ și $C_k \in H^* \cup P$, unde H și H^* sînt cele două semispații deschise determinate de P . Are loc

TEOREMA 2. *Intersecția F_{ik} a lui $\mathcal{F}_{ik}$ cu un plan care separă corpurile C_i și C_k , sau cu un plan paralel la acesta, și care nu intersectează nici unul din cele două corpuri, este o figură plană convexă.*

Această teoremă nu mai este adevărată pentru F_{ijk} . Dacă însă corpurile C_i sînt figuri plane convexe situate în plane paralele, iar P

este un plan paralel cu planele familiei $\mathcal{M}$ atunci $F_{ij\dots i}$ sînt figuri plane convexe.

3. Vom considera în cele ce urmează că avem de-a face cu figuri plane convexe C_i situate în plane paralele.

DEFINIȚIE. Un punct din E_3 îl numim punct V al mulțimii dacă se bucură de următoarele proprietăți:

a) Oricare trei figuri din $\mathcal{M}$ admit o secantă comună care trece prin V .

b) Există un plan care îl conține pe V și toate figurile mulțimii $\mathcal{M}$ sînt de aceeași parte a lui.

TEOREMA 3. Condiția necesară și suficientă ca să existe o secantă comună tuturor figurilor mulțimii $\mathcal{M}$ este ca $\mathcal{M}$ să admită un punct V .

Demonstrația teoremei este imediată și se bazează pe faptul că o mulțime de drepte care trec prin V și intersectează o mulțime convexă din $\mathcal{M}$, determină un con convex. Teorema rămîne valabilă pentru mulțimi convexe arbitrare în E_n cu modificările respective în definiția punctului V .

TEOREMA 4. Dacă oricare 5 figuri din $\mathcal{M}$ admit o secantă comună, atunci există o secantă comună tuturor figurilor din $\mathcal{M}$.

Faptul că oricare 5 figuri din $\mathcal{M}$ admit o secantă comună ne asigură că oricare trei din figurile convexe F_{ijk} au un punct comun deci conform teoremei lui Helly [2] că toate au un punct comun care este un punct V pentru $\mathcal{M}$. De aici prin intermediul teoremei 3 rezultă teorema 4.

Academia R.P.R., Filiala Cluj
Institutul de calcul

О ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ОБЩИЕ СЕКУЩИЕ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассматриваются множества прямых, пересекающих одновременно два, три или больше выпуклых тел. Обозначается через $\mathcal{M}$ семейство плоских выпуклых фигур, расположенных на различных параллельных плоскостях. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Если любые 5 фигур из $\mathcal{M}$ допускают общую секущую, то существует секущая, общая для всех фигур $\mathcal{M}$.

SUR LES ENSEMBLES CONVEXES ADMETTANT DES SÉCANTES COMMUNES

RÉSUMÉ

On considère des ensembles de droites coupant simultanément deux, trois ou plusieurs corps convexes. On désigne par $\mathcal{M}$ une famille de figures planes convexes situées dans des plans parallèles et distinctes. On énonce le

THÉOREME 3. Si 5 figures quelconques de $\mathcal{M}$ admettent une sécante commune, il s'ensuit qu'il y a une sécante commune à toutes les figures de $\mathcal{M}$.

BIBLIOGRAFIE

1. B. GRÜNBAUM, On a theorem of L. A. Santaló, Pacific J. Math., 1955, 5, 351—359.
2. E. HELLY, Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, Jber. Deutschen Math. Verein, 1923, 32, 175—176.
3. V.L. KLEE, Common secants for plane convex sets, Proc. of the American Math. Soc., 1954, 4, 639—641.
4. ELENA MOLDOVAN, Asupra noțiunii de funcție convexă față de o mulțime de funcții interpolatoare, St. cerc. mat. Cluj, 1958, 9, 1—4, 161—224.
5. H. RADEMACHER, I. J. SCHOENBERG, Helly's theorem on convex domains and Tchebycheff's approximation problem, Canadian Journal of Mathematics, 1950, 2, 245—256.
6. L. A. SANTALÓ, Supplement to the note: A theorem on sets of parallelepipeds with parallel edges, Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral, 1942, 3, 202—210.
7. P. VINCENCINI, Figures convexes et variétés linéaires de l'espace euclidien à n dimensions, Bull. Sci. Math., 1935, 59, 163—174.