

ASUPRA METODEI MONTE-CARLO DE EVALUARE A INTEGRALELOR¹⁾

DE

ȘTEFAN N. BERTI

În această lucrare vom studia problema micșorării dispersiei în metoda Monte-Carlo. Fie ξ o variabilă aleatoare de distribuție uniformă pe $[0,1]$. Dacă $f(x)$ este o funcție integrabilă Riemann pe $[0,1]$, atunci variabila aleatoare $f(\xi)$ va fi un estimator al integralei

$$I = \int_0^1 f(x) dx \quad (1)$$

deoarece așteptarea matematică a lui $f(\xi)$ va fi

$$Ef(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dF(x) = \int_0^1 f(x) dx = I.$$

S-a ținut seama de funcția de repartiție a lui ξ :

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

O transformare de funcție T este estimatoare dacă $ET f(\xi) = I$. Astfel transformarea

$$U_N f(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{\xi + j}{N}\right)$$

este estimatoare, deoarece

$$EU_N f(\xi) = I.$$

¹⁾ Comunicare prezentată la Colocviul de Teoria probabilităților, Brașov, 22–26 octombrie 1962.

Se arată ușor că T și T_1 fiind transformări estimatoare, produsul $T_1 T$ în sensul

$$T_1 T f = T_1 (T f)$$

va fi de asemenea o transformare estimatoare. Hammersley și Morton au pus problema aflării unor transformări de funcții, astfel încât dispersia să fie micșorată.

Dacă se presupune $f(x)$ de m ori derivabilă, cu derivata de ordin m continuă, atunci după formula lui Euler-Mac Laurin, pentru dispersia lui $U_N f(\xi)$ vom avea expresia

$$\sigma^2 U_N f(\xi) = \sum_{\mu, \nu \geq 1}^{\mu+\nu \leq m} \frac{(-1)^{\mu-1} \cdot \Delta^{(\mu-1)} f \cdot \Delta^{(\nu-1)} f \cdot B_{\mu+\nu}}{(\mu + \nu)! N^{\mu+\nu}} + o\left(\frac{1}{N^m}\right),$$

unde $\Delta^{(k)} f$ este diferența derivatei de ordinul k a lui f pe $[0,1]$ iar B_k este al k -lea număr al lui Bernoulli.

Folosind formulele

$$\Delta^{(m)} U_N f(x) = \frac{1}{N^{m+1}} \Delta^{(m)} f(x), \quad \Delta^{(m)} U_N f(1-x) = \frac{(-1)^{m+1}}{N^{m+1}} \Delta^{(m)} f(x),$$

se consideră estimatori de forma

$$H_M f(x) = \sum_{l=1}^{M+1} \alpha_l U_l f(x) \quad (2)$$

și

$$K_M f(x) = \sum_{l=1}^{\frac{M+1}{2}} \frac{\beta_l}{2} [U_l f(x) + U_l f(1-x)] \quad (M \text{ impar}) \quad (3)$$

și se determină $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{M+1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\frac{M+1}{2}}$ astfel încât

$$EH_M f(x) = I, \quad \Delta^{(j)} H_M f(x) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M-1),$$

respectiv

$$EK_M f(x) = I, \quad \Delta^{(j)} H_M f(x) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M-1).$$

Pentru determinarea coeficienților α_i vom avea de rezolvat sistemul de ecuații

$$\sum_{i=1}^{M+1} \frac{1}{i^j} \alpha_i = \delta_{0,j} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, M)$$

care are soluția

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{k+M+1} \cdot k^M}{(k-1)! (M+1-k)!} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, M+1).$$

Pentru a determina coeficienții β_i vom avea sistemul de ecuații

$$\sum_{i=1}^{\frac{M+1}{2}} \frac{1}{i^{2j}} \beta_i = \delta_{0,j} \quad \left(j = 0, 1, 2, \dots, \frac{M-1}{2}\right)$$

care are soluția

$$\beta_k = (-1)^{\frac{2k+M+1}{2}} \frac{2k^{M+1}}{\left(\frac{M+1}{2} + k\right)! \left(\frac{M+1}{2} - k\right)!} \quad \left(k = 1, 2, \dots, \frac{M+1}{2}\right).$$

Dispersiile variabilelor aleatoare $U_N H_M f(\xi)$ și $U_N K_M f(\xi)$ vor fi

$$\sigma^2 U_N H_M f(\xi) = h_M \cdot \frac{(\Delta^{(M)} f)^2 \cdot B_{2M+2}}{N^{2M+2} \cdot (2M+2)!} + o\left(\frac{1}{N^{M+1}}\right) \quad (4)$$

$$\sigma^2 U_N K_M f(\xi) = k_M \cdot \frac{(\Delta^{(M)} f)^2 \cdot B_{2M+2}}{N^{2M+2} \cdot (2M+2)!} + o\left(\frac{1}{N^{M+1}}\right), \quad (5)$$

unde

$$h_M = \left(\sum_{l=1}^{M+1} \frac{(-1)^{l+M+1}}{l! (M+l-1)!} \right)^2 \quad (M \text{ impar})$$

și

$$k_M = 4 \sum_{l=1}^{\frac{M+1}{2}} \frac{(-1)^{l+\frac{M+1}{2}}}{\left(\frac{M+l}{2} - 1\right)! \left(\frac{M+l}{2} + 1\right)!}.$$

În lucrarea [2] se află expresiile efective ale lui

$$H_i, h_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ și } K_j, k_j \quad (j = 1, 3, 5, 7).$$

Folosind formula asimptotică pentru numerele lui Bernoulli de ordin par

$$B_{2k} \sim 2(2k)! (2\pi)^{-2k}$$

pentru valori mari ale lui M , vom avea următoarele expresii asimptotice ale dispersiilor respective:

$$U_N H_M f(\xi) \sim \frac{(\Delta^{(M)} f)^2 \cdot h_M}{(2\pi N)^{2M+2}}, \quad U_N K_M f(\xi) \sim \frac{(\Delta^{(M)} f)^2 \cdot k_M}{(2\pi N)^{2M+2}}.$$

Primită la redacție la 10 decembrie 1962

О МЕТОДЕ МОНТЕ-КАРЛО ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача об уменьшении дисперсии в вычислении интегралов вида (1) методом Монте-Карло, с помощью функциональных преобразований вида (2) и (3). После установления выражений коэффициентов α и β в этих преобразованиях, даются выражения (4) и (5) для дисперсии, а также их асимптотическая форма.

SUR LA MÉTHODE DE MONTE-CARLO POUR L'ÉVALUATION DES INTÉGRALES

RÉSUMÉ

L'auteur traite le problème de la diminution de la dispersion dans l'évaluation des intégrales de la forme (1) par la méthode dite de Monte-Carlo, par les transformations des fonctions de la forme (2) et (3). Après avoir établi les expressions des coefficients α et β de ces formes, il donne les expressions (4) et (5) de la dispersion, ainsi que leur forme asymptotique.

BIBLIOGRAPHIE

1. В. И. КРЫЛОВ, *Приближенное вычисление интегралов*. Государственное издательство, Москва, 1959.
 2. PIERRE-JEAN LAURENT, *Remarque sur l'évaluation d'intégrales par la méthode de Monte-Carlo*. C. R. Acad. Sci. Paris, **253**, 4, 610—612 (1960).
-