ASUPRA REPREZENTĂRII NOMOGRAFICE A UNOR SISTEME DE ECUAȚII

DE

L. BAL

În nomograma unei ecuații cu mai multe variabile,

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}) = 0$$

în cazul cînd e posibilă construcția ei, se cere să se găsească valorile funcției implicite z_{n+1}, pentru un număr destul de mare de sisteme de valori ale variabilelor $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$. Odată construită nomograma, acest calcul se face destul de simplu cu ajutorul elementelor cotate, puncte și curbe cotate.

În acest cadru intră cea mai simplă din ecuații, ecuația cu trei variabile

$$F(z_1, z_2, z_3) = 0$$

care știm că se rezolvă cu ajutorul unei nomograme cu linii cotate. Ori care din variabilele z poate fi considerată ca funcție implicită de celelalte două variabile.

Pentru ecuațiile cu mai multe variabile, prin introducerea unor variabile auxiliare, se asociază ecuației date un anumit sistem care admite o reprezentare nomografică, în care valorile variabilelor auxiliare nu trebuie calculate.

Se mai întîlnesc probleme, în care se cere calcularea valorilor mai multor funcții, date prin mai multe ecuații. Aceasta revine din punct de vedere grafic la căutarea unor reprezentări nomografice pentru sisteme. În cele ce urmează vom considera cîteva cazuri de această natură.

Fie sistemul de două ecuații cu trei variabile

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

în care se dau valorile lui z și se cer valorile corespunzătoare ale variabilelor x și y. Aceasta revine la calcularea valorilor funcțiilor implicite $x(z)$ și $y(z)$, date de acest sistem.

Pentru problema noastră presupunem că sînt îndeplinite condiţiile de existenţă ale acestor funcţii implicite şi vom da numai metode nomografice pentru găsirea valorilor lor.

O reprezentare nomografică a fiecărei ecuaţii, spre exemplu cu o nomogramă cu linii cotate, nu duce la rezultat, deoarece în fiecare nomogramă trebuie să cunoaştem un cuplu de valori, ceea ce este contrar ipotezei.

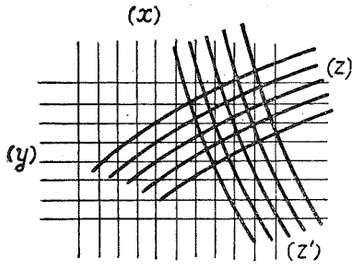


Fig. 1

Dacă în cele două nomograme considerăm aceeaşi reţea a curbelor (x) şi (y) pe acelaşi plan, atunci obţinem o nomogramă cu ajutorul căreia putem calcula valorile variabilelor x şi y, cînd se dă z. Zicem că am reprezentat nomografic sistemul (1) (fig. 1).

Pentru claritatea figurii să folosim la desenarea reţelei (x), (y), altă culoare şi să presupunem că famila (z) reprezintă variabila z din prima ecuaţie a sistemului şi (z') variabila z din cea de a doua ecuaţie. În acest caz fiind dată o valoare z_1 a variabilei z, o reprezentăm prin curbele cotate corespunzătoare din cele două familii (z), care se taie într-un punct P. Făcînd abstracţie de familiile (z), punctul P se găseşte în reţeaua curbelor (x), (y). Cotele corespunzătoare x_1, y_1 sînt valorile căutate.

Acest mod de rezolvare a sistemului (1) este complicat deoarece presupune trasarea simultană a patru familii de curbe cotate pe acelaşi plan.

Sistemul poate fi rezolvat mai simplu, dacă renunţăm la familiile (z) şi (z') din cele două ecuaţii şi trecem în locul lor numai curba obţinută ca locul geometric al punctelor cu aceiaşi cotă z, sau curba obţinută prin eliminarea parametrului z din cele două ecuaţii. Pe ea trecem gradaţiile variabilei z. Aceasta ne duce la ecuaţiile parametrice ale curbei obţinute

$$x = \varphi(z)$$
$$y = \psi(z).$$

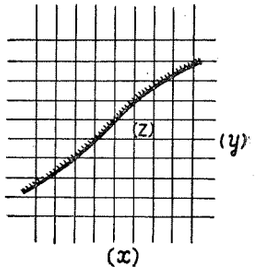


Fig. 2

Reprezentarea nomografică în acest caz devine deosebit de simplă. Reprezentăm în plan o reţea x, y pe care desenăm scara variabilei (z). Reţeaua (x, y) poate fi reţeaua de coordonate (fig. 2).

Aceste reprezentări se simplifică şi mai mult dacă familiile de curbe sînt familii de drepte şi se transformă figura obţinută prin dualitate.

În primul caz se obţin patru scări, iar în cazul al doilea două scări şi o familie de drepte (fig. 3 şi fig. 4). Utilizarea lor este simplă.

Fiind dată o valoare a variabilei z, în prima figură corespund două puncte pe scările variaibilei z şi în a doua o dreaptă din familia (z).

Intersecţia dreptelor formate cu scările variabilelor (x) şi (y) ne dau valorile căutate.

Să considerăm acum un sistem de 2 ecuaţii cu 4 variabile x, y, z şi t

$$F(x, y, z, t) = 0 \qquad G(x, y, z, t) = 0 \tag{2}$$

în care se dau valorile a două variabile şi se cer valorile celorlalte variabile.

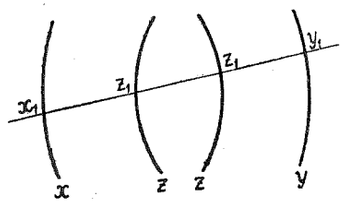


fig. 3

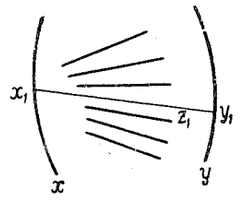


fig. 4

Presupunînd că z şi t sînt variabilele ale căror valori sînt date, să le eliminăm succesiv din cele două ecuaţii. Obţinem în acest fel sistemul echivalent

$$f(x, y, z) = 0$$
$$g(x, y, t) = 0 \tag{2'}$$

care poate fi reprezentat analog cu sistemul (1).

Reprezentînd simultan cele două ecuaţii ale sistemului (2') în acelaşi plan cu condiţia ca reţeaua variabilelor (x, y) să fie comună, obţinem reprezentarea nomografică care rezolvă orice sistem de forma (2).

În fig. 5 sînt trecute numai familiile cotate corespunzătoare variabilelor z şi t, pentru simplificarea desenului. Utilizarea ei este imediată. Fiind date valorile z_1 şi t_1, lor le corespunde punctul P, coordonatele lui P în reţeaua (x, y) sînt valorile căutate. Evident sistemul (2') determină un cîmp binar de variabilele z şi t, care în cazuri particulare poate fi format din două familii de drepte. În acest caz fiecare din ecuaţiile sistemului se reduce la o ecuaţie Cauchy

$$f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0 \tag{2''}$$
$$f_1 f_4 + f_2 g_4 + h_4 = 0$$

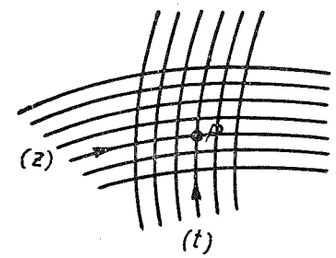


fig. 5

cu funcţiile f_1 şi f_2 comune.

Printr-o transformare duală nomograma cu linii cotate se transformă într-o nomogramă cu două scări rectilinii pentru variabilele x şi y şi două scări curbilinii pentru variabilele z şi t. Aceste scări pot fi rectilinii dacă familiile de drepte z şi t sînt fascicole. Utilizarea acestei nomograme devine foarte simplă.

Fiind date valorile pentru z şi t acestea determină o dreaptă care taie scările x şi y în punctele de cote căutate (fig. 6) Condiţiile ca un sistem (2) să poată fi reprezentat cu o nomogramă de tipul celei din figura 6 sînt condiţii care permit sistemului scrierea sub forma ecuaţiilor lui Cauchy.

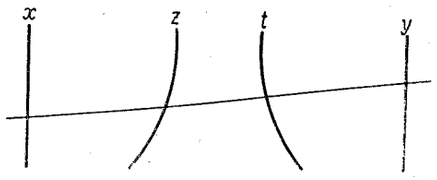


fig. 6

Ele se scriu separat pentru fiecare ecuaţie în parte, după ce s-a pus sistemul sub forma (3).

Nomogramele construite funcţionează, oricare din cele 4 variabile ar fi cele două variabile date.

Pentru sistemul (2) se poate construi de asemenea o nomogramă cu transparent orientat în care se presupun construite două cîmpuri în planul fix şi două puncte în planul transparent (fig. 7).

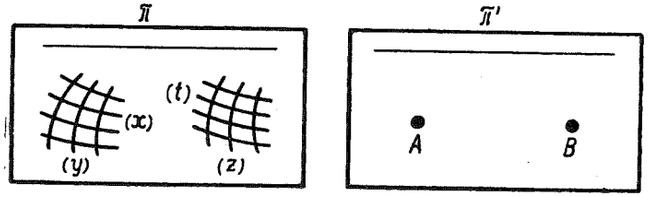


fig. 7

Transparentul se simplifică în cazul sistemului (2''). Acest tip de sistem poate fi generalizat printr-un sistem de n ecuaţii cu $n+2$ necunoscute.

$$\begin{aligned} &F_1(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}, z_{n+2}) = 0 \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &F_n(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}, z_{n+2}) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Presupunînd că sînt îndeplinite condiţiile pentru existenţa celor n funcţii implicite, acest sistem este echivalent cu sistemul

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1(z_{n+1}, z_{n+2}) \\ z_2 &= \varphi_2(z_{n+1}, z_{n+2}) \\ &\ldots \quad \ldots \\ z_n &= \varphi_n(z_{n+1}, z_{n+2}). \end{aligned} \tag{3'}$$

Dacă reprezentăm în acelaşi plan o reţea (z_{n+1}, z_{n+2}) comună tuturor ecuaţiilor sistemului, atunci celor n ecuaţii le mai corespund încă n familii de curbe cotate (z_1), (z_2), ..., (z_n) construite pe reţeaua (z_{n+1}, z_{n+2}).

Renunţînd la reţeaua de bază (z_{n+1}, z_{n+2}), care poate fi şi reţeaua carteziană de coordonate, obţinem graficul din fig. 8, care reprezintă nomograma sistemului de ecuaţii (3) considerat.

Utilizarea acestei nomograme este analoagă cu utilizarea nomogramei sistemului (2). Fiind date valorile z_{n+1}, z_{n+2}, acestea determină un punct în planul nomogramei. Cotele liniilor (z_1), (z_2), $(z_3)\ldots$, (z_n) ce trec prin acest punct sînt valorile căutate.

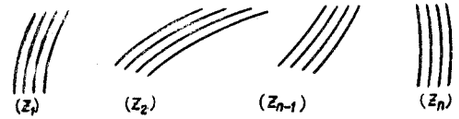


Fig. 8

Complicaţia nomogramei creşte pe măsură ce creşte numărul ecuaţiilor. Practic pentru un număr mare de ecuaţii, nomograma de acest tip nu mai poate fi utilizată.

Există cazuri particulare de sisteme care conduc la ecuaţii simple, chiar cînd numărul ecuaţiilor sistemului este mare. Astfel dacă reţeaua şi familiile de linii cotate sînt formate din familii de drepte, prin aplicarea dualităţii, nomograma devine cu puncte cotate; familiile de linii se transformă în scările variabilelor $z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}, z_{n+2}$.

Dacă reţeaua de bază este o reţea carteziană, adică o reţea formată din drepte paralele cu axele de coordonate, atunci ea se transformă prin dualitate în două scări rectilinii, iar celelalte putînd fi scări rectilinii sau curbilinii,

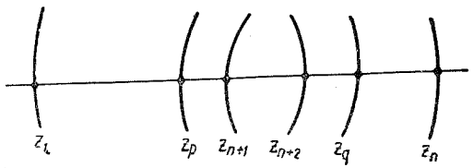


fig. 9

după cum familiile celelalte de drepte sînt sau nu sînt fascicole. În acest caz toate ecuaţiile fascicolului sînt ecuaţii tip Cauchy cu funcţiile care conţin variabilele z_{n+1} şi z_{n+2} identice sau combinaţii liniare de aceeaşi funcţie.

Dacă nu există o reţea de drepte comună tuturor ecuaţiilor, dar toate ecuaţiile sînt reprezentabile cu o nomogramă cu trei familii de drepte, atunci sistemul are o nomogramă compusă din nomograme izolate.

Cu această ocazie constatăm că se pune problema condiţiilor de anamorfoză pentru un sistem, analoagă cu anamorfoza unei ecuaţii.

Ca şi în cazul ecuaţiilor cu mai mult de trei variabile, sistemele de ecuaţii cu mai mult de patru variabile nu admit în general reprezentare nomografică.

Există o clasă importantă de sisteme, reprezentabile nomografic, sistemele reprezentabile prin nomograme cu transparent orientat. Cu nomogramele cu transparent orientat pot fi reprezentate anumite sisteme de patru ecuații cu cel mult 12 variabile.

Ele sînt de forma

$$\begin{aligned} f_{12} - f_{78} &= f_{34} - f_{9,10} = f_{56} - f_{11,12} \\ g_{12} - g_{78} &= g_{34} - g_{78} = g_{56} - g_{11,12}. \end{aligned} \tag{4}$$

Pentru sisteme de tipul (1) și (2) se poate construi o nomogramă cu transparent orientat care are în planul mobil două puncte și în planul fix două cîmpuri binare sau un cîmp și o scară.

De asemenea pot fi reprezentate cu acest tip de nomograme și sistemele de tipul (3)

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) &= 0 \\ g_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) &= 0 \\ h_1(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

În același mod poate fi reprezentat cu nomograme cu transparent orientat și sistemul

$$f_i(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = 0; \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{6}$$

În acest ultim caz variabilele date pot fi notate cu z_5 și z_6, apar în același cîmp și, prin alegerea convenabilă a cîmpului, nomogramele pot fi simplificate.

Pentru sistemele care nu mai intră în categoria celor studiate pînă acum, în general nu există o reprezentare nomografică. Ca și la ecuațiile cu mai mult de patru variabile se pune problema a cunoaște multe tipuri de nomograme cu formele lor canonice și a căuta condițiile în care sistemul dat poate admite o astfel de reprezentare.

Pentru sistemul

$$f_i(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0; \quad i = 1, 2, 3$$

se consideră scările

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi(z_4); \qquad z_2 = \psi(z_4) \\ z_1 &= \varphi(z_4); \qquad z_3 = \varkappa(z_4) \end{aligned} \tag{7}$$

reprezentate în același plan pe rețelele (z_1, z_2) și (z_1, z_3) luate ca rețele de coordonate. Ele ne dau posibilitatea ca la fiecare valoare a argumentului z_4, să găsim valorile corespunzătoare ale variabilelor z_1, z_2 și z_3.

Pentru sistemele

$$f_i(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = 0; \qquad (i = 1, 2) \tag{8}$$

$$f_i(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = 0; \quad (i = 1, 2) \tag{9}$$

putem construi nomograme numai în cazuri particulare.

Prin exemplele prezentate, am semnalat cîteva aspecte simple care se întrevăd la o primă examinare a problemei reprezentării nomografice a sistemelor de ecuații.

BIBLIOGRAFIE

[1]. *L. Bal.* Nomograme cu transparent orientat pentru sisteme ramificate. Studii și cercetări de matematică (Cluj) T. XIII (1962), 2; 241–252.
[2]. *L. Bal.* Cîteva ecuații reprezentate cu nomograme cu transparent orientat. Bul. științific al Inst. Politehnic Cluj, 5 1962, p. 27–39.
[3]. *V. Pleskot,* Nomografie. SNTL, Praha, 1963.

РЕЗЮМЕ

О НОМОГРАФИЧЕСКОМ ИЗОБРАЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Л. БАЛ

Взяты системы (1), (2), (3) и даются различные типы номограм при помощи которых они могут быть решены.

Потом взяты системы (4), (5) и (6) и находится их решение с помощью номограм.

Эти системы рассматриваются, предполалая, что семейства кривых являются семействами прямых или пучками кривых. Указаны и некоторые проблемы в связи с этими системами.

RÉSUMÉ

SUR LA REPRÉSENTATION NOMOGRAPHIQUE DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

PAR

L. BAL

On considère les systèmes (1), (2), (3) et on présente de différents types de nomogrammes à l'aide desquels peuvent être résolus.

Par suite on considère les systèmes (4), (5) et (6) et on cherche leur représentation à l'aide des nomogrammes à transparent orienté.

On étudie ces systèmes dans l'hypothèse que les familles de courbes, sont des familles de droites ou fascicules de droites. On montre aussi certains problèmes qui sont mis en liaison avec ces systèmes.