

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

EXTRAS

3

TOMUL 15

1964

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

O EXTINDERE A NOȚIUNII DE ȘIR DE DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ

DE

ȘTEFAN BERTI

1. NOȚIUNEA CLASICĂ DE ȘIR DE DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ

Se numește șir de distribuție uniformă în hipercubul unitar d -dimensional $E: (0 \leq \xi_i < 1; i = 1, \dots, d)$ orice șir de puncte din E :

$$\omega: x_1, x_2, x_3, \dots$$

pentru care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(\omega, Q) = \mu(Q),$$

oricare ar fi hiperparalelipipedul $Q: (0 \leq a_i \leq \xi_i < b_i \leq 1; i = 1, \dots, d)$.

Prin $v_n(\omega, Q)$ s-a notat frecvența de apartenență la Q a secțiunii $x_1, \dots, x_n$ din ω , iar prin $\mu(Q)$ volumul lui Q .

Există o familie foarte vastă de șiruri de distribuție uniformă, din care vom aminti următoarele:

1) Să considerăm vectorul aleator $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$, fiecare din variabilele aleatoare ξ_i ($i = 1, \dots, d$) fiind de distribuție uniformă pe $[0, 1]$, adică

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leq 0, \\ x & \text{pentru } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{pentru } x > 1. \end{cases}$$

În acest caz, cu probabilitatea 1, șirul $\{\xi\}$ va fi de distribuție uniformă.

2) Dacă variabila aleatoare ξ este de distribuție uniformă pe $[0, 1]$ și ia valorile

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$$

în urma unui șir de experiențe (independente), atunci oricare ar fi d (număr natural), șirul de puncte

$$x_1 = (\xi_1, \dots, \xi_d), x_2 = (\xi_2, \dots, \xi_{d+1}), \dots, x_k = (\xi_k, \dots, \xi_{k+d-1}), \dots$$

va fi cu probabilitatea 1 de distribuție uniformă în hipercubul unitar din spațiul d -dimensional.

3) Oricare ar fi o mulțime numărabilă densă de puncte din E , se poate ordona astfel mulțimea într-un șir, încît acesta să fie de distribuție uniformă.

În ultimul timp, noțiunea de șir de distribuție s-a extins la spații mai generale decît spațiul euclidian d -dimensional.

În această lucrare vom extinde noțiunea de șir de distribuție uniformă la un caz mult mai general.

2. ECHIVALENȚA ȘIRURILOR ÎN SISTEMUL $S = (E, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, R)$

În continuare vom folosi următoarele notații și noțiuni: sistemul $S = (E, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, R)$ este sistemul format dintr-o mulțime E , din două familii de submulțimi $\mathcal{L}_1$ și $\mathcal{L}_2$ din E și dintr-o relație R definită pe $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ ¹⁾. Prin X, Y, ω, Ω vom nota elementele din $\mathcal{L}_1$, din $\mathcal{L}_2$, șirurile de elemente din $\mathcal{L}_1$ precum familii de șiruri ω . Prin $\mathcal{L}_1^\infty$ vom nota mulțimea tuturor șirurilor ω .

Fiind dat un sistem S , prin frecvența secțiunii n a șirului ω față de S vom înțelege expresia

$$v_n(\omega, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R(X_i, Y),$$

unde $X_1, \dots, X_n$ este secțiunea n a șirului ω .

În cazul unui sistem S oarecare, avem

$$0 \leq v_n(\omega, Y) \leq 1$$

oricare ar fi n, ω, Y .

Pentru ω, Y fixați, mulțimea

$$v(\omega, Y)$$

formată din toate punctele de acumulare ale șirului

$$\{v_n(\omega, Y)\}_{n=1,2,3,\dots}$$

este o mulțime închisă de puncte din $[0,1]$, deci există punctele

$$\inf v(\omega, Y) \in v(\omega, Y) \text{ și } \sup v(\omega, Y) \in v(\omega, Y)$$

¹⁾ Se face o descompunere $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ unde $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ și se definește pentru orice $X \in \mathcal{L}_1, Y \in \mathcal{L}_2$:

$$R(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } (X, Y) \in \mathcal{A} \text{ (} X \text{ este în relație } R \text{ cu } Y\text{)} \\ 0 & \text{dacă } (X, Y) \in \mathcal{B} \text{ (} X \text{ nu este în relație } R \text{ cu } Y\text{)} \end{cases}$$

bine determinate, astfel încît pentru orice $\alpha \in v(\omega, Y)$ avem

$$0 \leq \inf v(\omega, Y) \leq \alpha \leq \sup v(\omega, Y) \leq 1.$$

Familia $\mathcal{L}_1^\infty$ se descompune acum în mod natural în niște familii de șiruri echivalente

Vom spune că șirurile ω_1 și ω_2 sînt inferior echivalente, dacă pentru orice Y avem

$$\inf v(\omega_1, Y) = \inf v(\omega_2, Y).$$

Vom nota

$$\omega_1 \simeq \omega_2$$

Vom spune că șirurile ω_1 și ω_2 sînt superior echivalente, dacă pentru orice Y avem

$$\sup v(\omega_1, Y) = \sup v(\omega_2, Y).$$

Vom nota

$$\omega_1 \approx \omega_2.$$

Relațiile $\simeq$ și $\approx$ sînt relații de echivalență în $\mathcal{L}_1^\infty$, prin urmare vom avea descompunerile

$$\mathcal{L}_1^\infty = \bigcup_{i \in I} \Omega_i = \bigcup_{i \in \bar{I}} \Omega_i$$

ale lui $\mathcal{L}_1^\infty$ în clase de șiruri inferior respectiv superior echivalente.

Prin urmare avem:

pentru orice $i, i' \in I, i \neq i' : \Omega_i \cap \Omega_{i'} = \emptyset ; \omega_1, \omega_2 \in \Omega_i \Rightarrow \omega_1 \simeq \omega_2,$

pentru orice $i, i' \in \bar{I}, i \neq i' : \Omega_i \cap \Omega_{i'} = \emptyset ; \omega_1, \omega_2 \in \Omega_i \Rightarrow \omega_1 \approx \omega_2.$

Descompunerile $\mathcal{L}_1^\infty = \bigcup_{i \in I} \Omega_i = \bigcup_{i \in \bar{I}} \Omega_i$ determină două familii de funcții de mulțime definite pe $\mathcal{L}_2$:

$$\{\underline{f}_i\}_{i \in I} \text{ și } \{\overline{f}_i\}_{i \in \bar{I}},$$

unde prin definiție pentru orice $Y \in \mathcal{L}_2$ avem:

pentru $i \in I : \underline{f}_i(Y) = \inf v(\omega, Y)$, unde $\omega \in \Omega_i$,

pentru $i \in \bar{I} : \overline{f}_i(Y) = \sup v(\omega, Y)$, unde $\omega \in \Omega_i$.

Dacă $I \cap \bar{I} \neq \emptyset$, atunci pentru orice $Y \in \mathcal{L}_2$ și $i \in I \cap \bar{I}$ se definesc

$$\underline{f}_i(Y) \text{ și } \overline{f}_i(Y)$$

și avem

$$\underline{f}_i(Y) \leq \overline{f}_i(Y).$$

Prin I vom nota acea submulțime a lui $I \cap I$ (dacă există) pentru care din $\iota \in I$ și $Y \in \mathcal{L}_2$ rezultă

$$\mathcal{F}_\iota(Y) = \overline{\mathcal{F}_\iota(Y)} = \mathcal{F}_\iota(Y).$$

Pentru cazul special al sistemului S în care E este mulțimea punctelor din hipercubul d -dimensional unitar, $\mathcal{L}_1$ este familia de submulțimi din E formate din câte un punct, $\mathcal{L}_2$ este familia hiperparalelipipedelor (paralele cu E) cuprinse în E , iar R relația de apartenență definită pe $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ în felul următor: oricare ar fi $\{x\} \in \mathcal{L}_1$ și $Q \in \mathcal{L}_2$ avem

$$R(\{x\}, Q) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in Q, \\ 0 & \text{dacă } x \notin Q. \end{cases}$$

Familia șirurilor de distribuție uniformă va fi o familie Ω_ι ($\iota \in I$) de șiruri. În acest caz funcția de mulțime respectivă $\mathcal{F}_\iota$ va fi o măsură pe $\mathcal{L}_2$.

Primită la redacție la 2 decembrie 1963

BIBLIOGRAFIE

1. J. CIGLER, G. HELMBERG, *Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung*. Jahresbericht der D. M., **64**, 1-50 (1961).
2. А. Г. ПОСТНИКОВ, *Усиленный закон больших чисел для выборки из равномерно распределенной случайной величины*. Изв. АН СССР, **22**, 433—438 (1958).
3. H. WEYL, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*. Math. Ann., **77**, 313-352 (1916).