

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

EXTRAS

4

TOMUL 15

1964

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

EXTINDERE A UNEI TEOREME A LUI H. WEYL PRIVITOARE LA ȘIRURILE DE DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ¹⁾

DE
ȘTEFAN N. BERTI

După cum se știe [5], șirul

$$\alpha : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

de puncte din hipercubul unitar d -dimensional

$E_d = A(0, 0, \dots, 0; 1, 1, \dots, 1) = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : 0 \leq x_j < 1, j \in \overline{1, d}\}$
se spune că este un șir de distribuție uniformă pe E_d , dacă pentru orice hiperparalelipiped

$$A = A(a_1, a_2, \dots, a_d; b_1, b_2, \dots, b_d) = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : a_j \leq x_j < b_j, j \in \overline{1, d}\}$$

unde $0 \leq a_j < b_j \leq 1, j \in \overline{1, d}$ are loc relația

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \chi_A(\alpha_j) = |A|,$$

unde

$$\chi_A(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \alpha_j \in A \\ 0 & \text{dacă } \alpha_j \notin A \end{cases}$$

și

$$|A| = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j).$$

Noțiunea de șir de distribuție uniformă, introdusă de H. Weyl în 1916, se aplică în formulele de cubatură cu nodurile aleatoare [1] sau în metodele din teoria numerelor pentru calculul integralelor multiple [3].

La baza acestor aplicații stă următoarea teoremă a lui H. Weyl [5]:

TEOREMA 1. Dacă $\alpha : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ este un șir de distribuție uniformă pe E_d și $f(x)$ este o funcție complexă integrabilă Riemann pe E_d , atunci în formula de cubatură

$$\int_{E_d} f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\alpha_j) + R(\alpha, f, N)$$

¹⁾ Comunicare prezentată la Institutul de calcul al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj, în ședința din 24 septembrie 1963.

are loc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R(\alpha, f, N) = 0.$$

În lucrarea de față se extinde acest rezultat (teorema 2) pentru integrale definite pe un câmp de probabilitate $\{E, K, P\}$ ([4], pag. 99).

Fie f o funcție simplă definită pe E , cu domeniul de valori $f(E) = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ ($c_1, c_2, \dots, c_m$ sînt numere complexe) și cu

$$f^{-1}(c_j) \in K, (j \in \overline{1, m}).$$

Orice funcție simplă cu $f(E) = \{c_1, \dots, c_m\}$ are reprezentarea [2]:

$$f = \sum_{j=1}^m c_j \chi_{f^{-1}(c_j)}$$

iar integrala pe o mulțime $A \in K$ a unei funcții simple f , se definește prin

$$\int_A f(s) P(ds) = \sum_{j=1}^m c_j \cdot P(A \cap f^{-1}(c_j)).$$

Șirul $\alpha: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ de elemente din E se spune că este un șir de distribuție uniformă față de câmpul de probabilitate $\{E, K, P\}$, dacă pentru orice $A \in K$ are loc relația

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \chi_A(\alpha_j) = P(A).$$

Dacă α este un șir de elemente din E și $A \subseteq E$, atunci prin

$$\langle \alpha, A \rangle$$

vom nota subșirul lui α format din acei termeni care aparțin lui A .

Pentru câmpul de probabilitate $\{E, K, P\}$ și mulțimea $A \in K$ cu $P(A) > 0$, vom nota

$$K_A = \{B : B \in K, B \subseteq A\}$$

și

$$P_A(B) = \frac{1}{P(A)} \cdot P(B)$$

pentru orice $B \in K_A$.

Se arată simplu că $\{A, K_A, P_A\}$ este un câmp de probabilitate.

Dacă α este un șir de distribuție uniformă pe $\{E, K, P\}$, mulțimea $A \in K_A$ și $P(A) > 0$, atunci șirul $\langle \alpha, A \rangle$ este de asemenea un șir de distribuție uniformă pe $\{A, K_A, P_A\}$.

Acest fapt se demonstrează folosind definițiile și următoarea propoziție elementară. Dacă A, B, C, D, ε sînt numere reale strict pozitive, atunci din îndeplinirea condițiilor

$$|A - c| < \frac{BD}{A+B} \cdot \varepsilon, |B - D| < \frac{BD}{A+B} \cdot \varepsilon$$

rezultă

$$\left| \frac{A}{B} - \frac{C}{D} \right| < \varepsilon.$$

Cu aceste pregătiri, putem trece la demonstrarea următoarei teoreme:

TEOREMA 2. Dacă f este o funcție simplă definită pe E , mulțimea $A \in K$ iar șirul α este un șir de distribuție uniformă pe câmpul de probabilitate $\{E, K, P\}$, atunci în formula de cubatură

$$\int_A f(s) P(ds) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\beta_j) + R(\alpha, f, A, N)$$

unde β este șirul $\langle \alpha, A \rangle$, are loc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R(\alpha, f, A, N) = 0.$$

Demonstratie. Fie $M_j (j \in \overline{1, m})$ numărul de termeni din secțiunea N a șirului $\langle \alpha, A \rangle$, care aparțin mulțimii $f^{-1}(c_j)$. În acest caz

$$\sum_{j=1}^m f(\beta_j) = \sum_{j=1}^m n_j c_j.$$

Astfel au loc egalitățile

$$|R(\alpha, f, A, N)| = \left| \int_A f(s) P(ds) - \sum_{j=1}^m \frac{c_j n_j}{N} \right| = \left| \sum_{j=1}^m c_j \cdot \left[P(A \cap f^{-1}(c_j)) - \frac{n_j}{N} \right] \right|.$$

Șirul $\langle \alpha, A \rangle$ fiind de distribuție uniformă pe câmpul de probabilitate $\{A, K_A, P_A\}$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ corespunde un număr natural N_ε , astfel ca

$$|P(A \cap f^{-1}(c_j)) - \frac{n_j}{N}| < \frac{\varepsilon}{m} (j \in \overline{1, m})$$

deci pentru $N > N_\varepsilon$ are loc

$$|R(\alpha, f, A, N)| < \varepsilon$$

și teorema este demonstrată.

Funcția complexă $f(u)$ definită pe E se numește *P-integrabilă*, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și $a > 0$ există un șir de funcții simple

$$f_{1,\varepsilon}, f_{2,\varepsilon}, \dots, f_{n,\varepsilon}, \dots$$

și un număr N_ε , astfel ca pentru

$$N > N_\varepsilon$$

să avem

$$P(\{s : |f(s) - f_{N,\varepsilon}(s)| < a\}) < \varepsilon \quad (s \in E)$$

și

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_A f_{N,\varepsilon}(s) P(ds) \quad (A \in K)$$

există. Pentru funcțiile P -integrabile, teorema 2 se extinde imediat.

Primită la redacție la 12 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. Н. П. БУСЛЕНКО, Д. И. ГОЛЕНКО, И. М. СОБОЛЬ, В. Г. СРАГОВИЧ, Ю. А. ШРЕЙДЕР, *Метод статистических испытаний*, Москва, 1962.
2. N. DUNFORD, J. SCHWARTZ, *Linear operators*. New York, London, 1958.
3. Н. М. КОРОБОВ, *Вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел*. ДАН СССР, **115**, 6 (1957).
4. O. ONICESCU, *Teoria probabilităților și aplicații*. București, 1963.
5. H. WEYL, *Über die Gleichverteilung von Zahlen Mod. 1*. Math. Ann., **77** (1916).