

8.67.
STUDII ȘI CERCETĂRI
MATEMATICE

EXTRAS

5

TOMUL 17
1965

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMANE

ASUPRA TRANSFORMĂRILOR UNIVALENTE ÎNTRE SPAȚII EUCLIDIENE¹⁾

DE

G. CĂLUGĂREANU

(Cluj)

În prezenta lucrare se stabilesc condiții necesare și suficiente pentru ca o transformare a unui domeniu n -dimensional în alt domeniu n -dimensional să fie un omeomorfism.

În două lucrări anterioare am stabilit un sistem de condiții necesare și suficiente pentru univalența unei transformări a unui domeniu plan în alt domeniu plan [1], sau a unui domeniu tridimensional în alt domeniu tridimensional [2]. Metoda utilizată se extinde fără modificări esențiale în cazul unei transformări univalente a unui domeniu din E_n în alt domeniu din E_n (transformarea fiind continuă și univalentă, deci omeomorfă, cele două domenii au în mod necesar aceeași dimensiune, conform teoremei lui Brouwer). În afară de această extindere, indicăm mai jos o nouă formă a condițiilor necesare și suficiente de univalență, valabilă oricare ar fi dimensiunea n .

Fie $\bar{D}$ o regiune din E_n pe care transformarea (T) este definită și continuă. Aceasta aplică $\bar{D}$ pe o regiune $R \subset E_n$, unde R este o regiune pe care o presupunem mărginită, univalentă sau multivalentă. Să formăm funcția

$$f(\lambda, M_1) = \frac{1}{\sigma_n} \int_R \lambda e^{-\lambda r_{12}^n} d\omega_2,$$

unde λ este un parametru real, M_1 un punct oarecare din E_n , M_2 un punct curent al regiunii R , $d\omega_2$ elementul de volum n -dimensional care conține M_2 în interior, r_{12} distanța $M_1 M_2$, σ_n volumul sferei n -dime-

¹⁾ Lucrare prezentată la Sesiunea științifică a Filialei din Cluj a Academiei R.P.R., din 11–12 decembrie 1964.

sionale de rază 1, iar integrala este luată în sens Lebesgue pe regiunea R . Obținem, ca și în cazurile $n = 1, 2$,

$$f(\lambda, M_1) \rightarrow q(M_1), \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

unde $q(M_1)$ este valența regiunii R în punctul M_1 , adică numărul întreg care arată de câte ori punctul M_1 este acoperit de regiunea R .

Formînd acum funcția

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sigma_n} \int_R f(\lambda, M_1) d\omega_1$$

obținem condiția necesară și suficientă pentru univalența regiunii R , deci și a transformării (T) , sub forma

$$g(\lambda) < \frac{V}{\sigma_n}, \quad -\infty < \lambda < +\infty,$$

unde V reprezintă volumul n -dimensional al regiunii R . Această condiție se mai scrie

$$\frac{1}{\sigma_n^2} \int_R \int_R \lambda e^{-\lambda r_{12}^n} d\omega_1 d\omega_2 < \frac{V}{\sigma_n}$$

sau, notînd $\lambda = \frac{u\sigma_n}{V}$,

$$\Phi(u) = \int_R \int_R \left(1 - u e^{-\frac{\sigma_n r_{12}^n}{V}}\right) d\omega_1 d\omega_2 > 0, \quad -\infty < u < +\infty.$$

Această funcție $\Phi(u)$ este întregă, de gen 1, și ea rămîne pozitivă de-a lungul axei reale atunci și numai atunci cînd regiunea R este univalentă. Putem da altă formă, mai precisă, acestei condiții.

Condiția $\Phi(u) > 0$, $u > 0$ se mai exprimă sub forma echivalentă

$$\int_0^\infty e^{-u} [P(u)]^2 \Phi(u) du > 0,$$

unde $P(u)$ este un polinom oarecare, $P(u) = a_0 + a_1 u + \dots + a_m u^m$, cu coeficienți reali. Găsim

$$\int_0^\infty e^{-u} [P(u)]^2 \Phi(u) du = \sum \mu_{i+j} a_i a_j, \quad \mu_k = \int_0^\infty e^{-u} u^k \Phi(u) du.$$

Convergența uniformă a integralei cu limita infinită ne permite să scriem

$$\begin{aligned} \mu_k &= \int_R \int_R \left(k! - \int_0^\infty e^{-u} u^{k+1} e^{-\frac{\sigma_n r_{12}^n}{V}} du \right) d\omega_1 d\omega_2 = \\ &= k! \int_R \int_R \left(1 - \frac{(k+1)V^{k+2}}{(V + \sigma_n r_{12}^n)^{k+2}} \right) d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned}$$

aplicînd formula

$$\int_0^\infty e^{-au} u^k du = \frac{k!}{a^{k+1}}.$$

Condițiile necesare și suficiente pentru pozitivitatea formei pătratice $\sum \mu_{i+j} a_i a_j$ se exprimă sub forma

$$\mu_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Ținînd seama de expresia dată mai sus constantelor μ_k , găsim

$$\int_R \int_R \left[1 - \left(\frac{V}{V + \sigma_n r_{12}^n} \right)^2 \right] d\omega_1 d\omega_2 > 0,$$

$$\int_R \int_R \int_R \int_R \left| 1 - \left(\frac{V}{V + \sigma_n r_{12}^n} \right)^2, \quad 1 - 2 \left(\frac{V}{V + \sigma_n r_{12}^n} \right)^3, \right. \\ \left. 1 - 2 \left(\frac{V}{V + \sigma_n r_{34}^n} \right)^2, \quad 2 \left[1 - 3 \left(\frac{V}{V + \sigma_n r_{34}^n} \right)^4 \right] \right| d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4 > 0$$

Prima condiție este verificată în mod banal, însă următoarele constituie condiții necesare și suficiente de univalență, sub formă finită, numărul acestor condiții fiind însă infinit.

Primită la redacție la 28 ianuarie 1965

Institutul de calcul al Academiei R.P.R.,
Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. G. CĂLUGĂREANU, *Sur la représentation analytique des régions du plan*. Revue de math. pures et appl., II, 281–288 (1957).
2. G. CĂLUGĂREANU, *Despre domeniile univalente*. Bul. științ. Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, VII, 853–860 (1955).