ASUPRA REPREZENTĂRII MATRICIALE A ARBORILOR

DE

T. RUS

În lucrarea [2] pornindu-se de la definiția arborilor ca și grafe fără cicluri se consideră un mod de reprezentare a lor cu ajutorul matricilor. În cele ce urmează vom defini arborii recursiv și vom ataşa în mod recursiv fiecărui arbore cîte o matrice. De asemenea vom construi un algoritm de descompunere a matricii corespunzătoare unui arbore în matricile corespunzătoare subarborilor principali [1] ai arborelui dat.

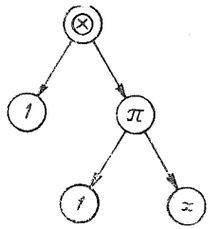
Fie $\mathfrak{N}$ o mulțime finită de simboluri astfel încît pe această mulțime este definită o funcție caracteristică grad, în felul următor : Dacă $n \in \mathfrak{N}$, atunci avem $\delta(n) = p$, p fiind un număr natural pozitiv sau $\delta(n) = 0$. Se vede deci că elementele mulțimii $\mathfrak{N}$ sînt împărțite în clase de elemente de către funcția δ. Dacă $n \in \mathfrak{N}$ și dacă $\delta(n) = 0$, atunci n se va numi element de bază al mulțimii $\mathfrak{N}$. Subliniem că dată fiind mulțimea $\mathfrak{N}_1$ a elementelor de bază ale mulțimii $\mathfrak{N}$, vom presupune că există o submulțime a mulțimii $\mathfrak{N}_1$ astfel încît aceasta considerată ca și un alfabet, atunci și cuvintele în acest alfabet vor fi numite elemente de bază ale mulțimii $\mathfrak{N}$, pentru care valoarea funcției δ o considerăm de asemenea zero. Elementele acestei submulțimi, împreună cu cuvintele în această submulțime, vor fi numite constante. Restul elementelor de bază vor fi numite variabile.

Dacă $\delta(n) = p$, $p \geqslant 1$, atunci n se va numi operator p-ar al mulțimii $\mathfrak{N}$. Fie n un operator p-ar al mulțimii $\mathfrak{N}$. Oricare ar fi în mulțimea elementelor de bază p elemente $n_1, n_2, \ldots, n_p$, aceste elemente vor fi numite operanzii operatorului n. Definim atunci pentru fiecare element $n \in \mathfrak{N}$ cu proprietatea $\delta(n) = p$, $p \geqslant 1$ o funcție care face ca oricărui vector $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ de dimensiunea p ale cărui componente sînt elemente de bază constante ale mulțimii $\mathfrak{N}$ să-i punem în corespondență un element de bază constant $\tilde{n}$ notat cu $n(n_1, n_2, \ldots, n_p)$.

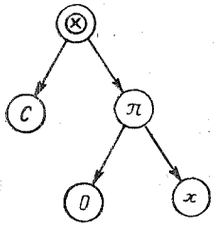
Acest element va fi numit valoarea operatorului n aplicat asupra elementelor $n_1, n_2, \ldots, n_p$.

ST. CERC. MAT., TOM. 16, NR. 9, P. 1179–1185, BUCUREȘTI, 1964.

Să ataşăm acum fiecărui element de bază al mulţimii $\mathfrak{N}$ un arbore numit arbore elementar de tipul



dacă elementul de bază respectiv este o variabilă oarecare x sau



dacă elementul de bază respectiv este o constantă c. Simbolurile $\otimes$ şi π sînt simboluri de operatori pentru care avem definite valoarea lor, respectiv corespunzătoare produsului şi puterii din aritmetica obişnuită. Simbolurile 1 şi 0 sînt două constante fixe, ele corespunzînd lui 1 şi 0 din aritmetica obişnuită. Elementele arborilor elementari marcate de simbolurile mulţimii $\mathfrak{N}$ sau de elementele de bază, vor fi numite noduri. Nodul în care nu intră nici o săgeată va fi numit rădăcină. Nodul în care intră o singură săgeată, dar din care nu pleacă nici o săgeată va fi numit vîrf. Săgeata care uneşte două noduri oarecare ale unui arbore elementar se numeşte drumul orientat între cele două noduri. Două noduri oarecare n_p şi n_q spunem că sînt legate printr-un drum dacă sînt îndeplinite condiţiile :

(1) Există o mulţime de noduri $\{n_{k_0}, \ldots, n_{k_l}\}$ astfel ca

$$n_{k_0} = n_p, \quad n_{k_l} = n_q,$$

în sens grafic.

(2) Între nodurile n_{k_i} şi $n_{k_{i+1}}$ să existe un drum orientat oricare ar fi $0 \leqslant i \leqslant l-1$.

Vom numi în cele ce urmează lungimea drumului dintre nodurile n_p şi n_q numărul l şi-l vom nota cu $l = l\ (n_p, n_q)$.

Noţiunea de arbore o vom defini recursiv în felul următor :

1. Oricare arbore elementar se numeşte arbore.

2. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sînt arbori şi dacă $n \in \mathfrak{N}$, $\delta(n) = p$, atunci şi $a = (n, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ este un arbore obţinut în felul următor: n este rădăcina arborelui a iar $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sînt astfel că drumul de la n la rădăcina oricăruia dintre aceşti arbori este de lungimea 1. Săgeţile care pleacă de la n la rădăcinile arborilor $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sînt numerotate cu indicii $1, 2, \ldots, p$, de la stînga la dreapta corespunzător arborilor $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Noţiunea de drum de lungime dată permite să introducem într-un arbore noţiunea de nivel. Pentru aceasta însă vom defini noţiunea de subarbore al unui arbore dat. O mulţime $\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ de noduri ale arborelui a se numeşte subarbore al arborelui a dacă sînt îndeplinite condiţiile :

(1) Fiecare nod al mulţimii $\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ este un nod al arborelui a.

(2) Există un singur nod n' în mulţimea $\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$ cu proprietatea că el este legat de fiecare din celelalte noduri ale acestei mulţimi prin drumuri de lungime $l \geqslant 1$. Acesta va fi numit rădăcina subarborelui respectiv, iar subarborele se va numi înrădăcinat în nodul n'.

Vom nota subarborele respectiv cu a_p, p fiind numărul nodurilor lui.

Dat fiind arborele a, nodurile $n_1, n_2, \ldots, n_p$ ale acestui arbore se vor numi nivelul k al arborelui a dacă, n fiind rădăcina lui a, avem

$$l(n, n_i) = k, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

În cele ce urmează va fi deseori important de ştiut care este numărul nodurilor pe un nivel oarecare k al arborelui a. Dacă notăm cu N_k acest număr, atunci el se obţine recursiv cu ajutorul schemei

$$N_0 = 1$$

$$N_{k+1} = \sum_{i=1}^{p} \delta(n_i)$$

unde $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sînt nodurile de pe nivelul k. Numărul nivelelor k, cu proprietatea că $N_k > 0$, îl vom nota cu N. Dacă presupunem că am numerotat nodurile n ale arborelui a cu indicii $1, 2, \ldots, p$, în ordinea în care ele apar pe nivelele succesive ale arborelui a, atunci schema de mai sus se poate pune sub forma

$$N_0 = 1,$$

$$N_1 = \delta(n_1),$$

$$N_{k+1} = \sum_{i=0}^{N_k} \delta\left(n_{k-1}^{\sum_{j=1} N_j + i}\right).$$

Vom ataşa acum oricărui arbore a o matrice M în felul următor. Fie $N_0, N_1, \ldots, N_p$ numărul nodurilor de pe nivelele $0, 1, 2, \ldots p$, $N_0 = 1$, $N_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Prima linie a matricei M va fi atunci

$$\delta(n_1)\ n_1\ 00 \ldots 01,$$

unde numărul zerourilor este egal cu lungimea maximă a drumurilor care pornesc din nodul n_1, rădăcina arborelui a, respectiv cu numărul p. Dacă s-au construit primele N_i linii ale matricei M, atunci următoarele N_{i+1} linii se construiesc în mod analog, ataşîndu-se în ordinea în care apar fiecărui nod de pe nivelul $i+1$ cîte o linie în felul următor:

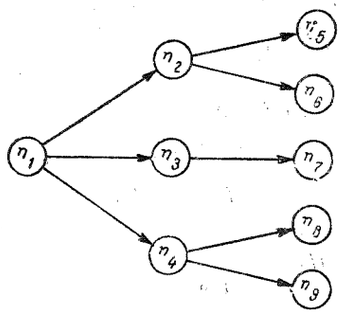
Fie $n_1^{i+1}, n_2^{i+1}, \ldots, n_{N_{i+1}}^{i+1}$ nodurile de pe nivelul $i+1$ şi $n_1^i, n_2^i \ldots,$ $\ldots, n_{N_i}^i$ nodurile de pe nivelul i. Dacă liniile corespunzătoare nodurilor de pe nivelul i sînt de tipul

$$\delta(n_k^i)\ \ n_k^i\ \ 00 \ldots 0\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_i,$$

atunci liniile corespunzătoare de pe nivelul $i+1$ sînt de tipul

$$\delta(n_k^{i+1})\ n_k^{i+1}\ 00 \ldots 0\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{i+1},$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i+1}$ sînt construiţi în felul următor: dacă n_k^i este o rădăcină a unui subarbore şi dacă $n_1^{i+1}, n_2^{i+1}, \ldots, n_p^{i+1}$ sînt noduri care aparţin acestui subarbore şi $l(n_k^i, n_j^{i+1}) = 1$, $j = 1, 2, \ldots, p$, atunci $\delta(n_k^i) = p$. Liniile corespunzătoare nodurilor $n_1^{i+1}, \ldots, n_p^{i+1}$ se obţin atunci din linia lui n_k^i prin ştergerea ultimului zero din această linie şi înlocuirea lui cu 1, iar primul indice după acest 1 luînd valorile corespunzătoare 1, 2, ..., p pentru liniile corespunzătoare nodurilor n_1^{i+1}, $n_2^{i+1}, \ldots, n_p^{i+1}$, restul indicilor rămînînd neschimbaţi. Acest proces se repetă pentru fiecare nod n_k^i, $k = 1, 2, \ldots, u_i$ începînd de la dreapta spre stînga după cum apare el în arbore. Din definiţia recursivă a arborilor precum şi din definiţia subarborilor rezultă că toate nodurile de pe nivelul $i+1$ sînt noduri în subarbori cu rădăcinile pe nivelul i. De aici rezultă că matricea M este bine definită pentru oricare arbore a. Prima coloană a acestei matrici va fi numită vector grad al arborelui a, a doua coloană va fi numită vector nod al arborelui a. Matricea obţinută din M prin



Figură

eliminarea vectorului nod şi a vectorului grad se numeşte matrice de indici. Matricea M se vede uşor că caracterizează complet arborele a corespunzător. Pentru exemplificare să considerăm arborele din figură.

Matricea M ataşată acestui arbore este atunci următoarea:

$$M = \left|\begin{array}{ccccc} 3 & n_1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & n_2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & n_3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & n_4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & n_5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & n_6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & n_7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & n_8 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & n_9 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right|$$

Vectorul grad este (3, 2, 1, 2, 0, 0, 0, 0, 0), iar vectorul nod este (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9).

Fie daţi, în continuare, arborii $a_1, a_2, \ldots, a_p$ şi simbolul $n \in \mathfrak{N}$ pentru care $\delta(n) = p$. De asemenea, presupunem date matricile M_1, $M_2, \ldots, M_p$ corespunzătoare arborilor $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Vom descrie acum algoritmul de obţinere al matricii M corespunzătoare arborelui $a = (n, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ din matricile $M_1, M_2, \ldots, M_p$. Fie, de asemenea, N_0^1, $N_1^1, \ldots, N_{k_1}^1, N_0^2, N_1^2, \ldots, N_{k_2}^2, \ldots, N_0^p, N_1^p, \ldots, N_{k_p}^p$ numărul nodurilor pe fiecare din nivelele 0, 1, ..., K_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ ale arborilor a_1, $a_2, \ldots, a_p$.

Primul pas al algoritmului constă atunci în aplicarea asupra matricilor $M_1, M_2, \ldots, M_p$ a următoarelor reguli de transformare.

Regula 1. În matricea de indici ai matricei M_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ se va insera în fiecare linie după primul element diferit de zero indicele i, restul elementelor lăsîndu-se neschimbate.

Fie $k_j = \max_{i=1}^{p} \{k_i\}$. Aceasta înseamnă că lungimea liniilor matricei de indici a matricei M_j este egală cu k_j.

Regula 2. Se vor ataşa în matricile de indici ale matricilor M_i, $i \neq j$ atîtea simboluri zero, la începutul liniilor matricei de indici, pînă cînd lungimile lor vor deveni egale cu k_j.

Să notăm cu $M_1', M_2', \ldots, M_p'$ matricile obţinute din $M_1, M_2, \ldots, M_p$ după transformarea lor conform regulilor 1 şi 2. Matricea M se va obţine atunci aplicînd următorii paşi ai algoritmului despre care a fost vorba mai sus. La pasul al doilea se va construi prima linie a matricei M de forma

$$\delta(n)\ n\ 00 \ldots 01,$$

unde numărul simbolurilor zero este egal cu k_j.

Pasul al treilea al algoritmului constă în alegerea unui număr de N_k^i linii din matricile M_i' şi ataşarea lor ca următoarele linii ale matricei M, în ordine, pentru $i = 1, 2, \ldots, p$. Acest pas se repetă pentru $k = 0, 1, \ldots, k_i$ pînă cînd se epuizează în întregime toate matricile M_i'. Aceasta bineînţeles se obţine pentru cazul cînd $k = k_j$.

Algoritmul se opreşte cînd nu se mai poate aplica pasul al treilea. Matricea obţinută o notăm cu M şi vom arăta că ea este matricea corespunzătoare arborelui a.

Pentru aceasta se observă imediat că prima ei linie coincide cu prima linie a matricei care se ataşează arborelui a după procedeul recursiv descris mai sus. Ceea ce se realizează la pasul al treilea al algoritmului de construire a matricei M nu este altceva decît trecerea recursivă de la liniile corespunzătoare nivelului k la liniile corespunzătoare nivelului $k+1$, pînă cînd $k = k_j$ pentru $k = 0, 1, \ldots, k_j$. Pentru claritate vom considera exemplul următor : fie arborii a_1, a_2, a_3 subarbori ai arborelui din figură, înrădăcinaţi respectiv în nodurile n_2, n_3, n_4 iar arborele $a = (n, a_1, a_2, a_3)$. Matricile corespunzătoare lui a_1, a_2, a_3 sînt respectiv

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & n_2 & 0 & 1 \\ 0 & n_5 & 1 & 1 \\ 0 & n_6 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & n_3 & 0 & 1 \\ 0 & n_7 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & n_4 & 0 & 1 \\ 0 & n_8 & 1 & 1 \\ 0 & n_9 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$N_0' = 1,\ N_1' = 2;\ N_0^2 = 1,\ N_1^2 = 1;\ N_0^3 = 1,\ N_1^3 = 2.$$

Matricile transformate M_1', M_2', M_3' după regulile 1 şi 2 vor fi

$$M_1' = \begin{vmatrix} 2 & n_2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & n_5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & n_6 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad M_2' = \begin{vmatrix} 1 & n_3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & n_7 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_3' = \begin{vmatrix} 2 & n_4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & n_8 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & n_9 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicînd al doilea şi al treilea pas al algoritmului descris mai sus vom obţine matricea

$$M = \begin{vmatrix} 3 & n_1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & n_2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & n_3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & n_4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & n_5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & n_6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & n_7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & n_8 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & n_9 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

care, după cum se vede, coincide cu matricea ataşată arborelui din figură.

În cele de mai sus nu am folosit reprezentările matricilor corespunzătoare arborilor elementari, respectiv corespunzătoare elementelor n din matricea unui arbore pentru care $\delta(n) = 0$ deoarece în codificarea lor în limba unei maşini electronice de calcul acestora, după cum se va vedea ulterior, le corespunde o singură celulă de tipul

n	$'C_1$	x	$'C_2$

unde $'C_1$, $'C_2$ sînt adrese de celule care conţin elementele de bază C_1 şi C_2 iar x este codul unei variabile. Prin n am notat un cod special care are menirea de a arăta că este vorba de un arbore elementar pe care-l vom numi nucleu.

Fie dată acum matricea M corespunzătoare arborelui $a = (n, a_1, \ldots, a_p)$. Vom construi un algoritm care aplicat matricei M o va transforma în şirul matricilor $M_1, M_2, \ldots, M_p$ corespunzătoare arborilor $a_1, a_2, \ldots, a_p$ şi în prima ei linie. Pentru aceasta să observăm că prima linie a matricei M are forma p, n 00 ... 01.

Primul pas al algoritmului va consta atunci în punerea în evidenţă a acestei linii.

Pasul al doilea al algoritmului constă în alegerea următoarelor p linii ale matricei M şi în scrierea lor separată. Acestea vor fi respectiv primele linii ale unor matrici $M_1', M_2', \ldots, M_p'$ pe care le vom obţine din matricea M.

Pasul al treilea al algoritmului constă în considerarea componentelor corespunzătoare ale vectorului grad, din liniile puse deja în evidenţă ale matricelor $M_1', M_2', \ldots, M_p'$. Fie aceste componente $\delta(n_1'), \delta(n_2'), \ldots, \ldots, \delta(n_p')$. Atunci se iau în ordine din matricea M următoarele $\delta(n_i')$ linii şi se aşază sub formă de următoarele linii ale matricilor M_i' pentru $i = 1, 2, \ldots, p$. Se consideră apoi componentele vectorilor grad ataşaţi matricilor M_i' la aplicarea precedentă a pasului al treilea al algoritmului, şi se face suma componentelor lor. Fie aceste numere $N_1, N_2, \ldots, N_p$. Se procedează apoi la următoarea aplicare a pasului al treilea al algoritmului cu N_i ca şi cu $\delta(n_i')$. Procedeul se repetă pînă cînd se epuizează complet matricea M. Aplicarea algoritmului se începe cu primul pas şi se continuă în felul descris mai sus. Fie $M_1', M_2', \ldots, M_p'$ matricile obţinute în urma acestui proces. Aceste matrici vor fi transformate la pasul următor al algoritmului după următoarele reguli :

Regula 3. Se va şterge din fiecare linie a matricilor de indici ai matricilor M_i' al doilea indice diferit de zero.

Regula 4. Matricile obţinute în urma aplicării regulii 3 se transformă scoţînd din matricile lor de indici din fiecare linie atîţia indici zero de la începutul lor pînă cînd rămîne cel puţin o linie care nu conţine indici zero, lungimile liniilor respective păstrîndu-se egale.

Este evident că trebuie să existe cel puţin o matrice pentru care regula 4 nu se poate aplica deoarece în matricea ei de indici există linii care nu conţin indici zero. Matricile obţinute în urma aplicării regulii 4 le vom nota cu $M_1, M_2, \ldots, M_p$ ele fiind matricile corespunzătoare arborilor $a_1, a_2 \ldots, a_p$ ceea ce se poate demonstra uşor.

BIBLIOGRAFIE

1. TREVOR EVANS, *A decision problem for transformation of trees.* Canadian Journal of Mathematics, **15**, *4*, 584—590 (1963).
2. KENNETH E. IVERSON, *A programing Language*, John Wiley and Sons, Inc. New York — — London, 1962.