

ASUPRA UNUI SISTEM FORMAL(I)¹⁾

DE

T. RUS

În această lucrare vom construi un sistem formal ale cărui obiecte într-o interpretare adecvată să corespundă unor categorii de obiecte matematice din analiza numerică și logică. Scopul acestui sistem formal este acela de a arăta rezolvabilitatea unor clase largi de probleme care admit o formalizare (probleme ce se vor preciza într-o altă lucrare) cu ajutorul mașinilor electronice de calcul. Categoriile de bază ale sistemului formal pe care îl avem în vedere vor fi definite în cele ce urmează, ținând seama de observațiile propuse de Church asupra noțiunii de „nume proprii” în lucrarea [1].

Termenul de constantă va fi sinonim cu expresia „numele propriu care are un denotat”. Atunci când vom face apel la unul din numele proprii care au denotat, sau mai scurt, la o constantă, vom deosebi două cazuri :

a) Constanta respectivă este de bază — adică face parte dintr-o mulțime $\mathcal{C}$ de constante precizate dinainte prin denotatul lor. Deoarece noi nu avem în vedere o interpretare imediată a sistemului formal pe care-l construim, nu vom preciza constantele din $\mathcal{C}$ în afară de specificarea că în $\mathcal{C}$ intră un număr finit de constante. Mulțimea $\mathcal{C}$ o vom numi alfabetul constantelor de bază.

b) Constante care sînt cuvinte în alfabetul $\mathcal{C}$, unde prin termenul de cuvînt se înțelege, șiruri finite de intrări ale constantelor de bază.

Noțiunea de variabilă, ca de obicei în matematică, coincide cu conținutul unui oarecare nume propriu sau cu o constantă în care denotatul constantei se schimbă cu diferite valori posibile ale variabilei. Prin urmare este necesar să mărginim valorile pe care le poate lua variabila și în felul acesta apare necesitatea de a lega de variabilă un anumit domeniu nevid de valori pe care poate să le ia. Subliniem că noțiunea de valoare în

¹⁾ Lucrare prezentată în ședința de comunicări din 26.X.1963 a Institutului de calcul din Cluj.

cazul nostru este sinonimă cu expresia „denotatul unui oarecare nume propriu”.

Presupunem în cele ce urmează că mulțimea variabilelor întâlnite în sistemul nostru formal este grupată în mulțimea $\mathcal{X}$, pe care o numim și alfabetul variabilelor. Din această frază rezultă că deși noțiunea de variabilă este precizată, noi nu fixăm de la început numărul variabilelor, ci facem ipoteza că dacă o variabilă apare într-o expresie oarecare, atunci această variabilă este un element al mulțimii $\mathcal{X}$.

Este util, în cele ce urmează, să observăm că dacă într-un sistem formal expresiile se descompun în simboluri simple, atunci la un moment dat simbolurile simple nu se mai pot descompune, socotindu-se nedecomponibile (de exemplu literele alfabetului unei oarecare limbi). Această nedecomponibilitate trebuie înțeleasă în sensul că în continuare termenii care compun aceste simboluri nu posedă conținut. În felul acesta, într-o astfel de descompunere, pot să apară la sfârșit două genuri de simboluri :

a) Nume proprii inițiale (constante și variabile). Acestea vor fi numite pe scurt simboluri proprii sau simboluri de bază și socotim că ele au conținut luate singure, după cum s-a văzut mai sus.

b) Simbolurile improprii sau sintactice care nu au conținut luate singure, însă luate împreună cu simbolurile proprii în anumită ordine determinată, după cum se va vedea mai jos, formează expresii compuse care au deja conținut de sine stătător. Această categorie de simboluri o vom considera descompusă în trei subcategorii, după rolul pe care simbolurile respective îl joacă în expresiile în care apar.

Prima subcategorie o formează simbolurile sintactice care se întâlnesc în expresii și care nu schimbă expresia în care apar în sensul schimbării denotatului acestei expresii. Ele au rolul numai de a preciza sau de a limita anumite părți componente ale expresiei respective. Exemplu de asemenea simboluri îl constituie parantezele așa cum apar ele de obicei în matematică. Presupunem că mulțimea acestor simboluri este grupată în mulțimea $\mathcal{S}$. Asupra mulțimii $\mathcal{S}$ nu facem nici o ipoteză, în afară de aceea că dacă la un moment dat în sistemul formal apare necesitatea folosirii unui simbol sintactic care nu face parte din $\mathcal{S}$, acest simbol se introduce în mulțimea $\mathcal{S}$. Mulțimea $\mathcal{S}$ o vom numi-o și alfabetul simbolurilor sintactice de prima categorie.

A doua subcategorie de simboluri sintactice o constituie așa-numiții operatori. Aceștia sînt simboluri care ajută la construirea unor expresii noi în sistemul formal, pornind de la expresii deja date. Aceste expresii trebuie înțelese ca expresii noi în sensul că denotatul lor diferă de denotatul expresiilor de la care pornim, el fiind un denotat nou, obținut din cele date. În cele ce urmează vom deosebi două tipuri de operatori.

Operatorii care dau naștere la expresii noi pornind întotdeauna de la două expresii date, pe care-i vom numi operatori cu două locuri și operatori care dau naștere la expresii noi pornind de la o singură expresie dată, numiți în cele ce urmează operatori cu un loc. Dacă presupunem că am fixat mulțimea operatorilor cu două locuri $\mathcal{O}_2$ și mulțimea operatorilor cu un loc $\mathcal{O}_1$, atunci mulțimea operatorilor va fi $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$, unde simbolul $\cup$ are sensul reuniunii din teoria mulțimilor. Mulțimea $\mathcal{O}$ o vom

numi și alfabetul operatorilor și presupunem că ea este o mulțime finită. Din cele de mai sus urmează că întotdeauna cînd avem de-a face cu un operator, de el se leagă o anumită expresie pe care el o transformă în altă expresie. Expresia inițială o vom numi, în cele ce urmează, domeniu de acțiune al operatorului și o vom nota prin D_0 unde prin θ am notat operatorul respectiv. În cazul operatorilor din $\mathcal{O}_2$, această expresie o punem în evidență în sistemul nostru formal sub forma $(P) \theta (Q)$ unde simbolurile (și) sînt paranteza dreaptă, respectiv stîngă, iar prin P și Q am înțeles două expresii date. Dacă operatorul este din $\mathcal{O}_1$, atunci domeniul său de acțiune se pune în evidență sub forma $\theta (P)$. În primul caz, D_0 este (P) și (Q) iar în al doilea caz (P) .

A treia subcategorie de simboluri sintactice o constituie așa-numitele relații. Acestea sînt simboluri care desenează raportul în care se găsesc unele expresii față de altele.

Dacă presupunem că am fixat de la început un număr finit de relații, atunci le putem grupa în mulțimea $\mathcal{R}$, care se numește mulțimea relațiilor sau alfabetul relațiilor. Ca și în cazul operatorilor și aici vom avea de-a face cu un domeniu de acțiune al relației care apare într-o expresie, și care este format chiar din expresiile pe care le leagă relația respectivă, împreună cu parantezele care le conțin, și care servesc pentru delimitarea lor.

În cele ce urmează vom mai folosi următoarele notații : Deoarece simbolul egalității obișnuite „=” considerăm că face parte din alfabetul $\mathcal{R}$, cînd vom raționa asupra obiectelor sistemului formal, pentru a nota egalitatea a două obiecte, vom folosi simbolul $\subseteq$. Deoarece parantezele fac parte din simbolurile alfabetului $\mathcal{S}$, atunci cînd vom spune că o anumită transformare, de exemplu un algoritm $\mathcal{A}$, se aplică asupra unui obiect P al sistemului formal și-l transformă în obiectul R , vom scrie acesta folosind simbolurile [și] sub forma $\mathcal{A} [P] \subseteq R$.

Alfabetul

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{O} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{R}$$

în cele ce urmează va fi numit alfabetul sistemului formal.

Simbolurile de bază formează prima categorie de obiecte formale. Pornind de la ele, putem obține o a doua categorie de obiecte formale, pe calea construirii unui șir finit de intrări a simbolurilor formale. Acest șir îl vom numi în cele ce urmează expresia formală sau cuvînt în alfabetul $\mathcal{A}$. Cuvîntul „intrare” înseamnă că termenii șirului se consideră în calitate de părți componente ale expresiei formale, sau a cuvîntului considerat, adică se subliniază împrejurarea că diferiți termeni pot fi unul și același simbol. Cuvîntul care nu conține nici un simbol va fi numit cuvîntul vid, și se va nota prin Λ .

În raționamentele despre obiectele formale, noi deseori nu vom scrie aceste obiecte explicit, ci vom folosi litere sau expresii, care conțin litere — după cum am văzut deja mai sus — pentru a nota aceste obiecte.

Trebuie deci să deosebim două genuri de simbolisme. Simbolismul formal despre care vorbim și simbolismul intuitiv sau metamatematic [2] cu ajutorul căruia noi vorbim despre un alt simbolism. Pentru primul

gen de simbolisme vom folosi litere care presupunem că aparțin alfabetului $\mathcal{A}$, atunci cînd vom scrie explicit un cuvînt în acest alfabet. În cazul celui de-al doilea simbolism vom folosi litere sau litera cu indici care presupunem că nu fac parte din alfabetul $\mathcal{A}$.

Pentru studierea expresiilor formale sau a cuvintelor, în alfabetul $\mathcal{A}$ vom folosi operația de reunire (sau de compunere) prin mijlocul căreia două sau mai multe expresii formale se reunesc în una singură, formînd o nouă expresie formală.

Vom defini, în cele ce urmează, cîteva subcategorii de expresii formale cu ajutorul regulilor de formare prin recurență [4].

DEFINIȚIA 1.1). Orice simbol format s este termen dacă $s \in \mathcal{C} \cup \mathcal{X}$, unde simbolul $\in$ este simbolul de apartenență care presupunem că nu face parte din $\mathcal{A}$.

2) $s_0 s_1 \dots s_k$, $k \geq 0$ este termen dacă și numai dacă $s_i \in \mathcal{C}$, $i = 0, 1, \dots, k$. Cu alte cuvinte, $s_0 s_1 \dots s_k$ este termen dacă și numai dacă el este un cuvînt în $\mathcal{C}$.

3) Dacă P și Q sînt termeni, atunci și cuvîntul $(P) \theta (Q)$ este termen dacă $\theta \in \mathcal{O}_2$.

4) Dacă P este termen, atunci și cuvîntul $\theta (P)$ este termen dacă $\theta \in \mathcal{O}_1$.

5) Nu există alți termeni în afară de cei definiți de regulile 1)–4).

DEFINIȚIA 2. 1) Dacă cuvintele P și Q sînt termeni, atunci cuvîntul $(P) \alpha (Q)$ este o condiție dacă $\alpha \in \mathcal{R}$.

2) Dacă A și B sînt condiții, atunci există în mulțimea $\mathcal{O}$ operatorii $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_k$ astfel ca și cuvintele $(A) \theta_1 (B)$, $(A) \theta_2 (B)$, $(A) \theta_3 (B)$, $\dots$, $(A) \theta_k (B)$ și $\theta_0 (A)$ să fie numite condiții.

3) Dacă x este o variabilă iar A o condiție, atunci există în $\mathcal{O}$ operatori θ' și θ'' astfel ca și cuvintele $\theta' ((x) (A))$ și $\theta'' ((x) (A))$ să fie numite condiții.

4) Nu există nici o altă condiție în sistemul formal în afara celor definite de regulile 1)–3).

Să facem acum cîteva observații:

1) Dacă P și Q sînt termeni și dacă $\alpha \in \mathcal{R}$, atunci condiția $(P) \alpha (Q)$ va fi numită formulă.

2) Operatorii $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_k$ de la punctul 2) al definiției 2 vor fi numiți operatori logici.

3) Operatorii θ' și θ'' de la punctul 3) al definiției 2 vor fi numiți evantori [1].

4) Variabila x care apare în cuvintele $\theta' ((x) (A))$ și $\theta'' ((x) (A))$ (de la punctul 3) al definiției 2 se va numi variabilă legată [2].

DEFINIȚIA 3. Cuvîntul $P \subseteq s_0 s_1 \dots s_k$ în alfabetul $\mathcal{A}$ se numește bine construit în sistemul formal, dacă el este construit după regulile definițiilor 1 și 2.

Se observă imediat că într-un cuvînt bine construit intră întotdeauna un număr par $2k$ de paranteze, k drepte și k stîngi. Această observație este o consecință directă a faptului că parantezele apar în regulile de formare numai pentru a delimita domeniul de acțiune al operatorilor sau al relațiilor. Dacă θ este un operator din $\mathcal{O}_2$, atunci față de domeniul său de acțiune el poate să aibă numai forma ${}_i \theta ({}_j \dots)$, unde parantezele notate cu

indici i și j admit paranteze cu aceiași indici corespunzători dreaptă și stîngă $({}_i \dots {}_j)$ în cuvîntul bine construit. În cazul cînd avem de-a face cu o relație, situația este analogă. Dacă $\theta \in \mathcal{O}_1$, atunci în cuvîntul bine construit el poate să apară numai sub forma $\theta ({}_i \dots {}_i)$. Prin urmare dacă în cuvîntul bine construit P avem k_1 operatori din $\mathcal{O}_1$, k_2 operatori din $\mathcal{O}_2$ și k_3 relații, numărul parantezelor în cuvîntul respectiv este $2[k_1 + 2k_2 + k_3]$, unde prin $+$ am notat operația obișnuită de adunare pentru a nu se confunda cu simbolul $+$ care presupunem că face parte din $\mathcal{A}$. Din același motiv am folosit și parantezele $[$, și,] iar semnul operației de înmulțire l-am omis.

DEFINIȚIA 4. Un cuvînt $P \subseteq s_0 s_1 \dots s_k$ este compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

1) $s_0 s_1 \dots s_k$ este un cuvînt în $\mathcal{A}$ și nu există intrări de formă $(\dots)$ în P .

1') Dacă în cuvîntul P există intrări de simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$, atunci orice simbol din $\mathcal{C} \cup \mathcal{X}$ sau cuvînt în $\mathcal{C}$ apare sub forma (ξ) , $\xi \in \mathcal{C} \cup \mathcal{X}$ sau (P_1) , $P_1 \in \mathcal{C}$.

2) În cuvîntul P nu există intrare a unui operator sau relații oarecare fără domeniu de acțiune în acest cuvînt și nici un simbol, diferit de simboalele operatorilor sau al relațiilor, în afara domeniului de acțiune a unui oarecare operator sau relație.

3) Dacă cuvîntul P nu conține intrări ale operatorilor, atunci el este compatibil dacă și numai dacă este sau un simbol din $\mathcal{C} \cup \mathcal{X}$ sau un cuvînt în $\mathcal{C}$ sau o condiție.

4) Oricare ar fi simboalele s_1 și s_2 din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în cuvîntul P , unul dintre ele aparține domeniului de acțiune al celuilalt.

Înainte de a trece la enunțarea cîtorva rezultate asupra cuvintelor compatibile, să facem cîteva observații asupra unui sistem de $2n$ paranteze dispuse liniar, n drepte (deschise) și n stîngi (inchise) expuse pe larg în lucrarea [2].

Vom numi pereche de paranteze, două paranteze, una dreaptă și alta stîngă, notate cu aceiași indici $({}_i \dots {}_i)$.

Spunem că două perechi de paranteze se separă dacă ele se întîlnesc sub forma $({}_i \dots {}_i) {}_j \dots {}_j$.

O corespondență biunivocă stabilită între parantezele drepte și parantezele stîngi astfel ca cele $2n$ paranteze să se grupeze în perechi de paranteze, și să nu existe perechi care să se separe, o vom numi împerechere proprie a celor $2n$ paranteze.

Kleene în lucrarea [2] a demonstrat următoarele proprietăți ale unui sistem de $2n$ paranteze dispuse liniar, n drepte și n stîngi.

a) Orice împerechere proprie a $2n$ ($n > 0$) paranteze admite cel puțin o pereche interioară, adică o pereche de paranteze între care nu există nici o altă pereche de paranteze.

b) Orice mulțime din $2n$ paranteze dispuse liniar, n drepte și n stîngi, admite o singură împerechere proprie.

c) Dacă o mulțime din $2n$ paranteze și o submulțime a ei din $2m$ paranteze admit ambele cîte o împerechere proprie, atunci împerecherea proprie a submulțimii este o parte a împerecherii proprii a mulțimii,

adică fiecare paranteză a submulțimii se împerechează cu una și aceeași paranteză în ambele împerecheri.

În cele ce urmează construim un algoritm normal, care aplicat oricărui cuvânt format din $2n$ paranteze transformă acest cuvânt în cuvântul vid dacă cuvântul inițial admite o împerechere proprie și într-un cuvânt diferit de cuvântul vid în caz contrar. Să considerăm pentru construirea algoritmului respectiv alfabetul $\mathcal{S}_0 \cong \{(\,,)\}$ și o extindere a sa $\mathcal{A}_0 \cong \mathcal{S}_0 \cup \{\alpha\}$, unde $\alpha \in \mathcal{S}$. Notînd cu $\mathfrak{A}$ algoritmul despre care a fost vorba, va trebui să avem

$$\mathfrak{A}[P] \cong \begin{cases} \Lambda \text{ dacă } P \subset \mathcal{S}_0 \text{ și admite o împerechere proprie,} \\ R \notin \Lambda \text{ dacă } P \subset \mathcal{S}_0 \text{ și nu admite o împerechere proprie.} \end{cases}$$

Schema algoritmului $\mathfrak{A}$ în alfabetul $\mathcal{A}_0$ este următoarea :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha ((\rightarrow (\alpha(, \\ \alpha () \rightarrow \alpha, \\ (\alpha) \rightarrow \alpha), \\ (\alpha \rightarrow . (\alpha, \\ \alpha (\rightarrow . \alpha(\\ \alpha) \rightarrow . \alpha), \\ \alpha \rightarrow ., \\ \rightarrow \alpha. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Se poate vedea ușor că algoritmul $\mathfrak{A}$ dat prin schema (1) este cel căutat. Algoritmul $\mathfrak{A}$ aplicat la cuvântul P în alfabetul $\mathcal{A}_0$ caută în acest cuvânt perechea cea mai interioară și o înlocuiește cu litera α . Dacă o asemenea pereche nu există, înseamnă că toate parantezele sînt sau dreapta și atunci algoritmul se va opri la cuvântul α (sau stîngi și atunci algoritmul se va opri la cuvântul α). Dacă s-a înlocuit o pereche interioară $(\)$ cu α , în continuare algoritmul caută următoarele perechi interioare care fie că există inițial fie că se obțin prin înlocuirea primei perechi.

Să demonstrăm în cele ce urmează cîteva proprietăți ale cuvintelor compatibile în alfabetul $\mathcal{A}$.

TEOREMA 1. *Dacă cuvîntul P este un cuvînt compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$, atunci orice parte proprie a cuvîntului P de forma (P_1) unde în P_1 avem intrările unui număr par de paranteze care admit o împerechere proprie, este un cuvînt compatibil în $\mathcal{A}$.*

Demonstrația acestei teoreme o vom face arătînd că cuvîntul P_1 verifică condițiile de compatibilitate din definiția 4.

Deoarece cuvîntul P este un cuvînt compatibil, se vede imediat că condițiile (1) și (1') sînt îndeplinite.

Prin parte proprie a unui cuvînt P înțelegem orice cuvînt P_1 astfel ca $P = P_1 P_2$ sau $P = P_2 P_1$, $P_2, P_1 \notin \Delta$.

Condiția 3) din definiția 4 rezultă imediat, deoarece în acest caz cuvîntul P_1 este una din expresiile care aparțin domeniului de definiție a condiției α din condiția 3). Cum alți operatori nu există, înseamnă că P_1 este simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ și prin urmare cuvînt compatibil în $\mathcal{A}$.

Condiția 2) rezultă din faptul că dacă ar exista relații sau operatori fără domeniu de acțiune în P_1 , atunci ei ar fi fără domeniu de acțiune și în P . Aceasta datorită faptului că domeniul de acțiune al oricărui operator sau relații cuprinde un număr par de paranteze care admit o împerechere proprie. În cuvîntul P_1 avem un număr par de paranteze care admit o împerechere proprie. Cum aceasta este o parte a împerecherii parantezelor din cuvîntul P , înseamnă că nici o paranteză nu se deschide în P_1 fără să se închidă tot în acest cuvînt, ceea ce înseamnă că oricare operator sau relație din P_1 are domeniu de acțiune tot în P_1 .

Din același motiv se observă că dacă ar exista vreun simbol în afara domeniului de acțiune al unui oarecare operator sau relații din P_1 , el ar fi în afara domeniului de acțiune al unui operator sau relații oarecare și în P ceea ce contrazice ipoteza compatibilității cuvîntului P .

Condiția 4) rezultă ușor că este îndeplinită și pentru cuvîntul P_1 , deoarece dacă s_1 și s_2 ar fi două simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în P_1 , astfel ca $s_1 \in D_{s_2}$ și $s_2 \in D_{s_1}$, atunci aceasta ar fi valabil și în cuvîntul P pentru simbolurile s_1 și s_2 , ceea ce ar contrazice ipoteza compatibilității cuvîntului P .

TEOREMA 2. *Dacă într-un cuvînt compatibil P există intrări ale simbolurilor din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$, atunci există unul și numai unul în afara domeniului de acțiune al oricărui alt simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în cuvîntul P .*

Să arătăm în primul rînd că există simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care nu aparțin domeniului de acțiune al altor simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în P .

Să facem însă cîteva observații înainte de aceasta :

1) Dacă $s_1 \in \mathcal{O} \cup \mathcal{R}$, atunci $s_1 \in D_{s_1}$ ceea ce se vede clar din definiția domeniului de acțiune.

2) Dacă $s_i \in D_{s_j}$, atunci $D_{s_i} \subset D_{s_j}$. Aceasta se vede clar din faptul că între s_i și domeniul său de acțiune nu există nici un alt simbol.

Să presupunem acum contrariul și anume că nu există nici un simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ dintre cele care intră în cuvîntul P în afara domeniului de acțiune a oricărui alt simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în P . Fie atunci $s_1, s_2, \dots, s_k$ toate simbolurile din $\mathcal{O} \cup \mathcal{R}$ care intră în P , unele din ele putînd avea intrări repetate în acest șir însă diferă ca poziție în cuvîntul P . După o renumerotare a acestor simboluri, din cauza ipotezei contrarii vom avea :

$$\begin{aligned} s_1 &\in D_{s_2}, \\ s_2 &\in D_{s_3}, \\ &\dots \dots \dots \\ s_{k-1} &\in D_{s_k}, \\ s_k &\in D_{s_1}. \end{aligned} \quad (a)$$

Pentru a ajunge la numerotarea simbolurilor s_i astfel ca ele să se găsească în relațiile (a) vom aplica următorul algoritm. Să presupunem că relațiile inițiale au fost

$$\begin{aligned} s_1 &\in D_{s_{i_1}}, \\ s_2 &\in D_{s_{i_2}}, \\ &\dots \dots \dots (a') \\ s_{k-1} &\in D_{s_{i_{k-1}}}, \\ s_k &\in D_{s_{i_k}}, \end{aligned}$$

unde $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_k}$ este o permutare a șirului $s_1, s_2, \dots, s_k$. Aceste relații există datorită ipotezei contrarii de mai sus. Să considerăm prima din aceste relații:

$$s_1 \in D_{s_{i_1}}.$$

Simbolul s_{i_1} se găsește în șirul $s_2, \dots, s_k$. Îl vom nota cu s_2 . Atunci relația de mai sus se transformă în

$$s_1 \in D_{s_2}.$$

Vom considera apoi următoarea relație din (a')

$$s_2 \in D_{s_{i_2}},$$

unde s_2 din această relație presupunem că este chiar simbolul notat mai sus cu s_2 iar s_{i_2} este unul din elementele, șirului $s_1, s_3, \dots, s_k$. Să arătăm că nu poate fi s_1 . Să presupunem că ar fi s_1 . Atunci $s_2 \in D_{s_1}$ și $s_1 \in D_{s_2}$. De aici rezultă că

$$D_{s_2} \subset D_{s_1} \text{ și } D_{s_1} \subset D_{s_2},$$

de unde $D_{s_1} \subseteq D_{s_2}$, deci s_1 și s_2 coincid și ca simboluri și ca poziții în șir, caz care se exclude. Deci $s_1 \notin D_{s_2}$. Prin urmare simbolul s_{i_2} se găsește în șirul $s_3, s_4, \dots, s_k$. Fie acesta un s_i oarecare. Îl vom nota pe acesta cu s_3 și vom considera relația următoare din (a'). După un număr finit de pași, cel mult k , vom ajunge la relațiile (a).

Datorită observațiilor de mai sus vom avea și

$$D_{s_2} \subset D_{s_3}, \dots, D_{s_k} \subset D_{s_1},$$

de unde rezultă că

$$s_1 \subset D_{s_3}, \dots, s_1 \in D_{s_1}$$

ceea ce este o absurditate.

Dacă am considera în locul lui s_1 oricare alt simbol din șirul considerat și am raționa în mod analog, am ajunge la aceeași concluzie absurdă și anume că acesta aparține domeniului său de acțiune. Aceasta înseamnă

că ipoteza că oricare simbol din $O \cup \mathcal{R}$ care intră în P aparține domeniului de acțiune al unui oarecare alt simbol din $O \cup \mathcal{R}$ care intră în P este falsă. Atunci înseamnă că există astfel de simboluri din $O \cup \mathcal{R}$ care intră în P și care nu aparțin domeniului de acțiune al nici unui alt simbol din $O \cup \mathcal{R}$ care intră în P .

Să arătăm acum că există un singur astfel de simbol. Să presupunem că acest simbol nu ar fi unic și anume că există două astfel de simboluri s_1 și s_2 . Atunci am avea situația $s_1 \in D_{s_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) și $s_2 \in D_{s_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$); de aici rezultă, în particular, că $s_1 \in D_{s_2}$ și $s_2 \in D_{s_1}$ ceea ce contrazice ipoteza compatibilității cuvintului P deoarece nu are loc condiția 4) pentru simbolurile s_1 și s_2 .

TEOREMA 3. *Orice cuvînt bine construit în alfabetul $\mathcal{A}$ este un cuvînt compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$.*

Această teoremă o vom demonstra verificînd condițiile compatibilității din definiția 4 asupra cuvintelor bine construite.

Condiția 1) din definiția compatibilității (definiția 4) rezultă imediat deoarece regulile de formare din definițiile 1 și 2 se aplică numai asupra simbolurilor din alfabetul $\mathcal{A}$. Prin urmare orice cuvînt bine construit este un cuvînt în alfabetul $\mathcal{A}$, de unde rezultă condiția 1) a compatibilității. Condiția 1') de asemenea este evident îndeplinită.

Fie acum cuvîntul bine construit P . El este un termen sau o condiție. Să presupunem că el este termen. Atunci putem avea două cazuri posibile. Sau în cuvîntul P nu avem intrări ale operatorilor și atunci el este sau un cuvînt în alfabetul $\mathcal{O}$, caz în care conform condiției 3) din definiția compatibilității (definiția 4) el este compatibil, sau un simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{X}$, caz în care conform aceleiași condiții el este de asemenea un cuvînt compatibil în $\mathcal{A}$.

Dacă în cuvîntul P avem intrări ale operatorilor, atunci din regulile 3) și 4) ale definiției 1 rezultă că el are una din formele

$$P \subseteq (P_1) \theta (P_2) \quad (1)$$

sau

$$P \subseteq \theta (P_1) \quad \theta \in \mathcal{O}. \quad (2)$$

Dacă notăm cu θ_1 operatorul pus în evidență în descompunerile de mai sus, atunci se vede că el are un domeniu de definiții în cuvîntul P , cuvintele P_1 și P_2 fiind la rîndul lor termeni. Raționînd în mod analog asupra cuvintelor P_1 și P_2 care sînt la rîndul lor termeni deci cuvinte bine construite, ne situăm sau în cazul în care ele nu conțin intrări de operatori și atunci sînt cuvinte compatibile, sau în cazul în care ele conțin intrări ale operatorilor și atunci ele trebuie să aibă la rîndul lor o descompunere de forma (1) sau (2). Deoarece cuvîntul P are un număr finit de simboluri, după un număr finit de pași o să ajungem la descompunerea de forma (1) sau (2) în care P_1 sau P_1 și P_2 sînt fie cuvinte în $\mathcal{O}$, fie simboluri în $\mathcal{O} \cup \mathcal{X}$, de unde rezultă că sînt cuvinte compatibile în $\mathcal{A}$. Parcurgînd apoi calea inversă, rezultă că fiecare operator care intră în P are domeniu de acțiune în acest cuvînt și nici un simbol în afară de sim-

bolurile operatorilor nu este în afara domeniului de acțiune al unui oarecare operator care intră în acest cuvânt. Dacă θ_2 este un oarecare operator diferit de operatorul θ_1 de mai sus, se vede că $\theta_2 \in D_{\theta_1}$, de unde rezultă că pentru cuvintele bine construite, în cazul când ele sînt termeni, are loc și condiția 4) din definiția compatibilității (definiția 4). Prin urmare în acest caz cuvîntul P este compatibil.

Să presupunem acum că P este o condiție. Atunci și acest caz admite două subcazuri posibile. Sau în P nu există intrări de operatori și atunci el este o condiție simplă de forma $(P_1) \alpha (P_2)$, unde P_1 și P_2 sînt fie simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathcal{X}$ fie cuvinte în $\mathcal{O}$ și atunci cuvîntul P este compatibil conform condiției 3) din definiția compatibilității sau în cuvîntul P avem intrări de operatori. În acest caz cuvîntul P poate avea forma

$$P \subseteq (P_1) \alpha (P_2), \quad (3)$$

unde P_1 și P_2 sînt termeni, deci cuvinte compatibile și prin urmare și cuvîntul P este un cuvînt compatibil ceea ce rezultă imediat. În afară de forma (3) dacă cuvîntul P este o condiție, și conține intrări ale operatorilor el poate admite și una din descompunerile

$$P = (P_1) \theta (P_2), \quad (4)$$

sau

$$P = \theta ((x) (P_1)). \quad (5)$$

Asupra acestor descompuneri vom raționa exact ca și mai sus în sensul că dacă P_1 sau P_1 și P_2 sînt compatibile, atunci și P este compatibil în $\mathcal{A}$. Prin urmare vom considera cuvintele P_1 sau P_1 și P_2 și după un număr finit de pași vom ajunge la unul din cazurile analizate mai sus în care cuvintele P_1 sau P_1 și P_2 au fost compatibile în $\mathcal{A}$. Pornind apoi pe calea inversă, rezultă că P este un cuvînt compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$.

TEOREMA 4. Orice cuvînt compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$ este un cuvînt bine construit în acest alfabet.

Fie deci cuvîntul P compatibil în alfabetul $\mathcal{A}$. Vom deosebi două cazuri, după cum în P intră sau nu intră simboluri din alfabetul $\mathcal{O} \cup \mathcal{Q}$. Să presupunem, pentru început, că în P nu intră nici un simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{Q}$. Deoarece P este un cuvînt compatibil, atunci el este sau nu simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{X}$ sau un cuvînt în $\mathcal{O}$. În ambele cazuri conform primei reguli din definiția 1 cuvîntul P este bine construit.

Fie acum cazul în care în cuvîntul P intră simboluri din alfabetul $\mathcal{O} \cup \mathcal{Q}$. Atunci, după teorema 2, există un singur simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{Q}$ astfel ca el să nu aparțină domeniului de acțiune al nici unui alt simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{Q}$ care intră în cuvîntul P . Fie acest simbol s_1 . Cum cuvîntul P este un cuvînt compatibil, înseamnă că toate simbolurile lui aparțin domeniului de acțiune al unui simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{Q}$, în particular se poate

vedea simplu că toate simbolurile lui aparțin domeniului de acțiune al simbolului s_1 .

Dacă ar exista vreun simbol care nu aparține domeniului de acțiune al simbolului s_1 , atunci cuvîntul P ar admite descompunerea

$$P \subseteq P_1 (P_2) s_1 (P_3) P_4, \quad (6)$$

unde se presupune că simbolul s care nu aparține domeniului de acțiune al lui s_1 se găsește fie în P_1 fie în P_4 , deoarece (P_2) și (P_3) constituie domeniul de acțiune al lui s_1 . Dacă ar fi așa, atunci cel puțin unul dintre cuvintele P_1 sau P_4 diferă de cuvîntul vid. Fie acesta, pentru precizarea ideilor, P_1 ; cum $P_1 \neq \Lambda$ și P este un cuvînt compatibil, înseamnă că s aparține domeniului de acțiune al unui simbol din $\mathcal{O} \cup \mathcal{Q}$ care intră în P_1 . Fie acest simbol s_2 . Atunci $s_2 \in D_{s_1}$ și $s_1 \in D_{s_2}$ din teorema 2. Atunci ar rezulta că cuvîntul P nu este compatibil, deoarece pentru simbolurile s_1 și s_2 nu are loc condiția 4) din definiția 2, ceea ce este în contradicție cu ipoteza compatibilității cuvîntului P .

Rezultă deci că toate simbolurile cuvîntului P , în afară de s_1 , aparțin domeniului de acțiune al simbolului s_1 . Atunci cuvîntul P are următoarea descompunere :

$$P \subseteq (P_1) s_1 (P_2), \quad (7)$$

sau

$$P \subseteq s_1 (P_1). \quad (8)$$

După teorema 1 în oricare din aceste cazuri cuvintele P_1 sau P_1 și P_2 sînt cuvinte compatibile. Dacă ele sînt și cuvinte bine construite, atunci cuvîntul P este un cuvînt bine construit, deoarece se încadrează în una din regulile de bine construire ale definițiilor 1 sau 2.

Pentru a decide dacă, cuvintele P_1 sau P_1 și P_2 sînt bine construite, procedăm cu ele în mod analog ca și cu cuvîntul P . După un număr finit de pași vom ajunge la cuvintele P_i sau P_i și P_{i+1} , care joacă rolul lui P_1 sau P_1 și P_2 de forma

$$P_i \subseteq (P'_i) s_i (P'_{i+1}); P_{i+1} \subseteq (P'_{i+1}) s_{i+1} (P'_{i+2}), \quad (7')$$

$$P_i \subseteq s_i (P'_i); P_{i+1} = s_{i+1} (P'_{i+1}), \quad (8')$$

unde P'_i sau P'_i și P'_{i+1} , P'_{i+1} sau P'_{i+1} și P'_{i+2} sînt sau simboluri din $\mathcal{O} \cup \mathcal{X}$ sau cuvinte în $\mathcal{O}$. În ambele cazuri conform regulilor 1) și 2) din definiția 1 respectiv 1) din definiția 2, cuvintele P_i sau P_i și P_{i+1} sînt cuvinte bine construite. Parcurgînd acum șirul cuvintelor P_i în sens invers, ajungem la concluzia că P_1 sau P_1 și P_2 sînt cuvinte bine construite, deci cuvîntul P este un cuvînt bine construit.

Din teoremele 3 și 4 rezultă că definițiile 3 și 4 sînt echivalente. Aceasta ne dă posibilitatea ca dîndu-ne un cuvînt oarecare în alfabetul $\mathcal{A}$ să conchidem dacă el este cuvînt bine construit sau nu în acest alfabet, după cum el este un cuvînt compatibil sau nu în acest alfabet.

Primită la redacție la 7 februarie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. ALONZA CHURCH, *Introduction to Mathematical Logic*, I. Princeton, New-Jersey, 1956.
 2. ST. C. KLEFNE, *Introduction to Metamathematics*. D. Van Nostrand, New York, 1952.
 3. А. А. МАРКОВ, *Теория алгоритмов*. Труды матем.инст. им. В. А. Стеклова, **XLII**, (1954).
 4. Р. ПЕТЕР, *Рекурсивные функции, перевод с немецкого*, И. Л., Москва, 1954.
 5. Н. А. ШАНИН, *О конструктивном понимании суждений*. Труды метем. инст. им. В. А. Стеклова, **LII**, 226—311 (1958).
 6. ALFRED TARSKI, *A decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. University of California press Berkeley and Los Angeles, 1951.
 7. ALFRED TARSKI, *Logics Semantics, Mathematics*. Oxford, 1956.
-