

ASUPRA UNOR EVALUĂRI ALE FUNCȚIILOR DERIVABILE, CU APLICAȚII LA STUDIUL PROBLEMEI POLILOCALE (I) ¹⁾

DE

OLEG ARAMĂ
(Cluj)

1. În studiul problemei polilocale relative la ecuații diferențiale prezintă interes cunoașterea unor cît mai bune delimitări ale funcțiilor f ($f \in C^{(n)} [a, b]$), care se anulează de un anumit număr dat n ori într-un interval dat $[a, b]$, cu ajutorul maximului derivatei lor de ordinul n pe acel interval. Studiul unor astfel de delimitări se află în strînsă legătură cu studiul restului unor formule de interpolare și de derivare numerică.

Fie $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ n noduri dintr-un interval $[a, b]$, astfel încît $x_1 = a$ și $x_n = b$. Fie f o funcție oarecare din clasa $C^{(n)} [a, b]$ iar $L(x_1, x_2, \dots, x_n; f|x)$ polinomul lui Lagrange, care interpoalează funcția f pe nodurile considerate. Dacă se consideră nodurile x_i ($i = 1, \dots, n$) fixate și dacă x reprezintă de asemenea o valoare fixată din intervalul $[a, b]$, atunci oricare ar fi numărul întreg fixat $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, diferența

$$(1) \quad R^{(\nu)}(f; x) = \frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x) - \frac{d^\nu}{dx^\nu} L(x_1, \dots, x_n; f|x)$$

reprezintă o funcțională liniară, definită pe spațiul $C^{(n)} [a, b]$, și mărginită în raport cu norma

$$(2) \quad \|f\| = \sum_{i=0}^n \max_{x \in [a, b]} |f^{(i)}(x)|.$$

Oricare ar fi valoarea fixată x din intervalul $[a, b]$, funcționala $R^{(\nu)}(f; x)$ se anulează pentru funcțiile $1, x, \dots, x^{n-1}$, iar pentru funcția x^n ea este diferită de zero pentru orice valoare a lui x , care diferă de rădăcinile ecua-

¹⁾ Lucrare prezentată la Sesiunea științifică a Filialei din Cluj a Academiei R.P.R., din 11 — 12 decembrie 1964.

ției $R^{(v)}(x^n; x) = 0$. Conform teoriei generale a restului formulelor de aproximare ale analizei, elaborate de acad. T. Popoviciu în lucrarea [8], funcționala (1) va admite o reprezentare de forma

$$(3) \quad R^{(v)}(f; x) = \frac{1}{n!} [A_v f^{(n)}(\xi) - B_v f^{(n)}(\eta)], \quad \xi, \eta \in [a, b],$$

unde A_v și B_v sînt constante (în raport cu f) nenegative.

Un caz particular important este acela în care unul dintre coeficienții A_v și B_v care intervin în (3) este nul. În acest caz, conform terminologiei utilizate în lucrarea [8], se spune că funcționala $R^{(v)}(f; x)$ corespunzătoare este de formă simplă. În lucrarea [9], T. Popoviciu făcînd un studiu sistematic al restului formulelor de derivare numerică, arată că restul $R^{(v)}(f; x)$ din (1) nu este în general de formă simplă pentru orice x din $[a, b]$ decît în cazul particular $v = 0$, cînd avem

$$(4) \quad R^{(0)}(f; x) = \frac{1}{n!} K(x) f^{(n)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Aici $K(x)$ reprezintă un coeficient care nu depinde de funcția f , el depinzînd numai de valoarea x și de nodurile $x_1, \dots, x_n$. Considerînd în formula (4) $f(x) = \pi(x)$, unde $\pi(x)$ reprezintă polinomul normat de gradul n , care se anulează pe nodurile $x_1, \dots, x_n$, adică

$$\pi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n),$$

se obține

$$(5) \quad K(x) = R^{(0)}(\pi; x) = \pi(x).$$

Înlocuind în (4), se obține pentru orice $x \in [a, b]$ formula

$$(6) \quad R^{(0)}(f; x) = \frac{1}{n!} \pi(x) f^{(n)}(\xi).$$

De aici se obține pentru orice $x \in [a, b]$ delimitarea

$$(7) \quad |R^{(0)}(f; x)| \leq \frac{\mu}{n!} \max_{x \in [a, b]} |\pi(x)|,$$

unde s-a notat

$$(8) \quad \mu = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)|.$$

Pentru a obține însă o delimitare a restului $R^{(0)}(f; x)$, independentă de poziția nodurilor de interpolare $x_1, \dots, x_n$ în intervalul $[a, b]$, care de altfel au fost presupuse arbitrare, cu singura condiție ca $x_1 = a$ și $x_n = b$, vom scrie

$$(9) \quad |R^{(0)}(f; x)| \leq \frac{\mu}{n!} \max_{\substack{x_2, x_3, \dots, x_{n-1} \in [a, b] \\ (x_1 = a, x_n = b)}} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |\pi(x)| \right\}.$$

Se arată că marginea superioară dublă care figurează în membrul al doilea al inegalității (9) este atinsă pentru cazul cînd $n-1$ din nodurile $x_1, \dots, x_n$ coincid cu extremitatea a a intervalului $[a, b]$ (sau cu extremitatea b), iar nodul rămas coincide cu extremitatea b (respectiv cu extremitatea a). Vom putea deci scrie inegalitatea

$$(9') \quad |R^{(0)}(f; x)| \leq \frac{\mu}{n!} \max_{x \in [a, b]} |(x - a)^{n-1} (x - b)|,$$

de unde, în baza unui calcul simplu, se obține următoarea delimitare, dată, sub o formă puțin diferită, de G. A. Bessmertnih și A. Iu. Levin în lucrarea [3]:

$$(10) \quad |R^{(0)}(f; x)| \leq \frac{(n-1)^{n-1} (b-a)^n}{n! n^n} \cdot \mu, \quad x \in [a, b].$$

Această delimitare este valabilă pentru orice $x \in [a, b]$ și oricare ar fi poziția nodurilor $x_1, \dots, x_n$ în intervalul $[a, b]$, cu respectarea condiției $x_1 = a$ și $x_n = b$.

În cele de mai sus s-a considerat $v = 0$. Dacă însă $v \neq 0$, atunci așa cum a arătat T. Popoviciu în lucrarea [9], există valori ale lui x în intervalul $[a, b]$, pentru care restul (1) nu este de formă simplă, adică nu este de forma (4). În acest caz restul (1) admite o reprezentare de forma (3), în care constantele A_v și B_v sînt amîndouă diferite de zero (pozitive). Perechea de constante A_v și B_v , care poate fi considerată în formula (3), nu este unică. Tot în lucrarea [8] se dau formulele care permit obținerea perechii *minimale* de constante A_v și B_v . În cazul de față, aceste formule se scriu

$$(11) \quad A_v(x) = \frac{n}{2} \int_a^b [R^{(v)}(\varphi_{n,\lambda}; x) + |R^{(v)}(\varphi_{n,\lambda}; x)|] d\lambda,$$

$$B_v(x) = A_v(x) - R^{(v)}(x^n; x),$$

unde

$$(12) \quad \varphi_{n,\lambda}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} (x - \lambda + |x - \lambda|)^{n-1}.$$

Pentru a obține în acest caz delimitări ale restului (1), se poate utiliza formula (3). Se obține

$$(13) \quad |R^{(v)}(f; x)| \leq \frac{1}{n!} (A_v + B_v) \cdot \mu,$$

unde μ are semnificația din (8). Totuși calculul cu precizie al coeficienților A_v și B_v este în general dificil pentru valori mari ale lui n și de aceea este util de ținut seamă de următoarea proprietate pusă în evidență de către G. A. Bessmertnih și A. Iu. Levin în lucrarea [3]:

Cu toate că restul $R^{(v)}(f; x)$ ($1 \leq v \leq n-1$) din (1) nu este în general de formă simplă pe intervalul $[a, b]$, el admite totuși următoarea delimitare, care prezintă o mare analogie cu delimitarea (9):

$$(14) \quad |R^{(v)}(f; x)| \leq \frac{\mu}{n!} \cdot \max_{\substack{x_1, \dots, x_n \in [a, b] \\ (x_1 = a, x_n = b)}} \left\{ \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{d^v}{dx^v} \pi(x) \right| \right\}.$$

Întocmai ca și în cazul $v = 0$, se demonstrează în lucrarea citată [3], că marginea superioară dublă care figurează în membrul al doilea al inegalității (14) este atinsă pentru cazul când $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = a$, iar $x_n = b$ (și de asemenea pentru cazul când $x_1 = a$, iar $x_2 = x_3 = \dots = x_n = b$). Se poate deci scrie

$$(14') \quad |R^{(v)}(f; x)| \leq \frac{\mu}{n!} \cdot \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{d^v}{dx^v} [(x-a)^{n-1}(x-b)] \right|.$$

de unde, în baza unui calcul simplu, se obține formula

$$(15) \quad |R^{(v)}(f; x)| \leq \frac{k(b-a)^{n-k}}{(n-k)!n} \cdot \mu, \quad x \in [a, b].$$

În lucrarea de față se dau unele extinderi ale formulelor (9) și (14) pentru cazul când funcția f se interpolează cu ajutorul soluțiilor unor ecuații diferențiale liniare și omogene de ordinul n . Scopul prezentei cercetări îl constituie în primul rând aplicațiile pe care le au astfel de formule în studiul unor probleme polilocale relative la ecuații diferențiale. Rezultatele pe care le obținem se bazează pe utilizarea unor formule de medie stabilite de G. Pólya [7] și D. V. Widder [10], referitoare la interpolarea funcțiilor cu ajutorul soluțiilor unor ecuații diferențiale liniare și omogene. Aceste formule au fost aprofundate și generalizate de T. Popoviciu în lucrarea deja citată [8], pentru sisteme interpolatoare liniare oarecare, elaborându-se tot o dată o teorie generală a restului formulelor liniare de aproximare ale analizei. Pentru cazul sistemelor interpolatoare neliniare, formulele de medie amintite au fost extinse de E. Moldovan în lucrarea [5].

2. Fie L_n un operator diferențial liniar și omogen, de ordinul $n \geq 2$, definit pentru orice funcție $y \in C^{(n)}[a, b]$ și avînd expresia

$$(16) \quad L_n[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y,$$

unde $a_i(x)$ ($i = 0, \dots, n$) reprezintă funcții continue pe intervalul $[a, b]$, iar $a_0(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Vom mai presupune că acest operator are proprietatea $I_n^*[a, b]$; prin aceasta înțelegem că oricum s-ar alege din intervalul $[a, b]$ n noduri $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ și oricum s-ar alege n numere reale $y_1, y_2, \dots, y_n$, ecuația diferențială $L_n[y] = 0$ admite o soluție $y(x)$ și una singură pentru alegerea făcută, satisfăcînd condițiile $y(x_i) = y_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Fie, în continuare, f o funcție oarecare din clasa $C^{(n)}[a, b]$ și fie $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ un sistem de noduri din intervalul $[a, b]$, astfel încît

$x_1 = a$ și $x_n = b$. Să notăm cu $H_f(x) = H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)$ soluția ecuației omogene $L_n[H_f(x)] = 0$, satisfăcînd condițiile

$$(17) \quad H_f(x_i) = f(x_i), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Să notăm cu $N(x) = N(x; L_n; x_1, \dots, x_n)$ soluția ecuației neomogene $L_n[N(x)] = 1$, soluție care satisface condițiile

$$(18) \quad N(x_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Existența și unicitatea soluțiilor $H_f(x)$ și $N(x)$ este asigurată de proprietatea $I_n^*[a, b]$ a operatorului L_n .

În lucrarea [7], G. Pólya a demonstrat că, în ipotezele adoptate mai sus, are loc următoarea formulă de medie, care generalizează formula de interpolare a lui Lagrange:

$$(19) \quad f(x) = H_f(x) + N(x)L_n[f(\xi)], \quad \xi \in (a, b).$$

De aici se obține următoarea delimitare valabilă pentru orice $x \in [a, b]$:

$$(20) \quad |f(x) - H_f(x)| \leq N(x)|\mu_f|,$$

unde

$$(21) \quad \mu_f = \max_{x \in [a, b]} |L_n[f(x)]|.$$

Pentru a obține o delimitare independentă de poziția nodurilor de interpolare $x_2, \dots, x_{n-1}$ ($x_1 = a, x_n = b$), vom scrie următoarea inegalitate, care rezultă din (20):

$$(22) \quad |f(x) - H_f(x)| \leq \mu_f \cdot \max_{\substack{x_2, x_3, \dots, x_{n-1} \in [a, b] \\ (x_1 = a, x_n = b)}} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |N(x)| \right\}.$$

În lucrarea [1] am arătat că marginea superioară dublă care figurează în membrul al doilea al inegalității (22) este atinsă pentru cazul când nodurile de interpolare $x_1, \dots, x_n$ coincid cu extremitățile intervalului $[a, b]$. Pentru o mai mare claritate, vom utiliza următoarea notație:

Fie $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ ($m \leq n$) noduri distincte din intervalul $[a, b]$, avînd respectiv multiplicitățile $p_1, p_2, \dots, p_m$, astfel încît $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$. Vom nota cu

$$N \left(x; L_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_m \\ p_1, p_2, \dots, p_m \end{matrix} \right)$$

soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale neomogene $L_n[y] = 1$, soluție care verifică condițiile

$$(23) \quad y(x_i) = y'(x_i) = \dots = y^{(p_i-1)}(x_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Considerăm numerele

$$(24) \quad M_p(L_n; a, b) = \max_{x \in [a, b]} \left| N\left(x; L_n; \frac{a, b}{p, n-p}\right) \right|, \quad (p = 1, 2, \dots, n-1),$$

$$(25) \quad M(L_n; a, b) = \max_{p=1, 2, \dots, n-1} \{M_p(L_n; a, b)\}.$$

Cu aceste notații are loc următoarea teoremă, pe care am stabilit-o în lucrarea [1]:

TEOREMA 1. În ipoteza că operatorul L_n are proprietatea $I_n^*[a, b]$, are loc următoarea delimitare

$$(26) \quad \left| N\left(x; L_n; \frac{x_1, \dots, x_m}{p_1, \dots, p_m}\right) \right| \leq M(L_n; a, b), \quad x \in [x_1, x_m],$$

valabilă oricare ar fi sistemul de noduri $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ ($2 \leq m \leq n$) din $[a, b]$ și oricare ar fi sistemul de numere naturale $p_1, p_2, \dots, p_m$ astfel încât $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$.

Din această teoremă și din inegalitatea (22), rezultă următoarea

TEOREMA 2. În ipotezele adoptate mai sus, relativ la operatorul L_n și relativ la funcția f , are loc următoarea delimitare

$$(27) \quad |f(x) - H_f(x)| \leq \mu_f \cdot M(L_n; a, b), \quad x \in [a, b],$$

valabilă oricare ar fi nodurile $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ($x_1 = a, x_n = b$), care intervin în condițiile (17).

Observație. Inegalitatea (27) se transformă în egalitate, dacă se consideră $f(x) = N\left(x; L_n; \frac{a, b}{p^*, n-p^*}\right)$, unde p^* reprezintă valoarea lui p pentru care se realizează maximul din (25), considerându-se ca nodurile de interpolare $x_1 = x_2 = \dots = x_{p^*} = a, x_{p^*+1} = \dots = x_n = b$, iar pentru x , valoarea care realizează maximul funcției $\left| N\left(x; L_n; \frac{a, b}{p^*, n-p^*}\right) \right|$ pe intervalul $[a, b]$. Într-adevăr, în acest caz funcția $H_f(x)$ corespunzătoare va fi nulă în baza proprietății $I_n^*[a, b]$ a operatorului L_n . Rezultă, în definitiv, că relativ la operatorul L_n considerat și relativ la clasa $C^{(n)}[a, b]$, constanta $M(L_n; a, b)$ reprezintă cea mai mică constantă (pozitivă), care verifică inegalitatea (27), oricare ar fi $f \in C^{(n)}[a, b]$ și oricare ar fi poziția nodurilor $x_2, \dots, x_{n-1}$ în intervalul $[a, b]$ ($x_1 = a, x_n = b$).

Exemplu. Dacă $L_n = \frac{d^n}{dx^n}$, atunci $N\left(x; \frac{d^n}{dx^n}; \frac{a, b}{p, n-p}\right) \frac{1}{n!} (x-a)^p \times$

$\times (x-b)^{n-p}$ și un calcul simplu ne dă

$$(28) \quad M_p\left(\frac{d^n}{dx^n}; a, b\right) = \frac{1}{n!} \frac{p^p (n-p)^{n-p}}{n^n} (b-a)^n,$$

$$(29) \quad M\left(\frac{d^n}{dx^n}; a, b\right) = \max_{p=1, \dots, n-1} \left\{ M_p\left(\frac{d^n}{dx^n}; a, b\right) \right\} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n! n^n} (b-a)^n.$$

Înlocuind în formula (27), se regăsește inegalitatea (10).

3. Presupunem că operatorul L_n din (16) admite o descompunere de forma

$$(30) \quad L_n[y] = B_\tau A_\sigma[y] = B_\tau\{A_\sigma[y]\}, \quad x \in [a, b],$$

unde A_σ și B_τ reprezintă operatori diferențiali liniari și omogeni de ordinele σ , respectiv τ ($\sigma + \tau = n$):

$$A_\sigma[y] = a_{\sigma,0}(x) y^{(\sigma)} + a_{\sigma,1}(x) y^{(\sigma-1)} + \dots + a_{\sigma,\sigma}(x) y$$

$$B_\tau[Y] = b_{\tau,0}(x) Y^{(\tau)} + b_{\tau,1}(x) Y^{(\tau-1)} + \dots + b_{\tau,\tau}(x) Y.$$

Presupunem că sînt îndeplinite următoarele condiții

1°. Coeficienții operatorului B_τ sînt continui pe $[a, b]$ și $b_{\tau,0}(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$.

2°. Coeficienții operatorului A_σ sînt funcții din clasa $C^{(\tau)}[a, b]$, iar $a_{\sigma,0}(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$.

3°. Operatorii A_σ și B_τ au respectiv proprietățile $I_\sigma^*[a, b]$ și $I_\tau^*[a, b]$.

Se arată (a se consulta de exemplu lucrarea [2]) că în aceste ipoteze operatorul-produs $L_n = B_\tau A_\sigma$ are proprietatea $I_{\sigma+\tau}^*[a, b]$, adică proprietatea $I_n^*[a, b]$.

Cu aceste precizări, fie f o funcție din clasa $C^{(n)}[a, b]$ și fie $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ un sistem de noduri astfel încît $x_1 = a, x_n = b$. Vom nota ca și în paragraful precedent cu $H_f(x) = H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)$ soluția ecuației diferențiale omogene $L_n[H_f(x)] = 0$, care verifică condițiile (17) și cu $N(x) = N(x; L_n; x_1, \dots, x_n)$ soluția ecuației diferențiale neomogene $L_n[N(x)] = 1$, soluție care verifică condițiile (18). Considerăm diferența

$$(31) \quad \begin{aligned} \delta(x) &= A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)] = \\ &= A_\sigma[f(x) - H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]. \end{aligned}$$

În paragraful următor (§4), vom stabili o delimitare pentru $\delta(x)$, analogă cu delimitarea (14) obținută pentru restul $R^{(v)}(f; x)$ din (1). În acest scop ne vom folosi de următoarea teoremă, a cărei demonstrație am dat-o în lucrarea [1]:

TEOREMA 3. În ipoteza că operatorul L_n admite o descompunere de forma (30), în care operatorii A_σ și B_τ au proprietățile 1° - 3°, iar $\tau \geq 2$, fie $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ un sistem de noduri, astfel încît $x_1 = a$ și $x_n = b$ și fie $N(x) = N(x; L_n; x_1, \dots, x_n)$ soluția ecuației diferențiale neomogene $L_n[N(x)] = 1$, soluție care verifică condițiile (18). Să notăm cu $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi$ rădăcinile din $[a, b]$ ale funcției $A_\sigma[N(x)]$. (Se arată ușor că în ipotezele adoptate referitor la operatorii diferențiali A_σ și B_τ , funcția $A_\sigma[N(x)]$ se anulează în $[a, b]$ de τ ori și nu mai mult). Atunci au loc delimitările:

$\alpha)$ Pentru $x \in [a, \xi_1]$,

$$|A_\sigma[N(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| \leq |A_\sigma[N(x; L_n; a, \underbrace{b, b, \dots, b}_{n-1})]|.$$

$\beta)$ Pentru $x \in [\xi_\tau, b]$,

$$|A_\sigma[N(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| \leq |A_\sigma[N(x; L_n; \underbrace{a, a, \dots, a}_{n-1}, b)]|$$

$\gamma)$ Pentru $x \in (\xi_1, \xi_\tau)$,

$$|A_\sigma[N(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| < \max_{p=1, \dots, \tau-1} |N(x; B_\tau; \underbrace{a, a, \dots, a}_p, \underbrace{b, b, \dots, b}_{\tau-p})|.$$

În cazul când $\tau = 1$, intervalul (ξ_1, ξ_τ) se reduce la un singur punct ξ_1 , care reprezintă unica rădăcină din $[a, b]$ a funcției $A_\sigma[N(x)]$. În acest caz, în enunțul teoremei 3, propoziția $\gamma)$ se suprimă.

În enunțul acestei teoreme s-a notat prin

$$N(x; B_\tau; \underbrace{a, a, \dots, a}_p, \underbrace{b, b, \dots, b}_{\tau-p})$$

soluția $z(x)$ a ecuației diferențiale $B_\tau[z(x)] = 1$, soluție care se anulează pentru $x = a$ și $x = b$ cu ordinele de multiplicitate p , respectiv $\tau - p$.

În cele ce urmează, vom presupune că în afară de condițiile $1^\circ - 3^\circ$, mai este îndeplinită și următoarea:

4° . Ecuația $B_\tau[y] = 0$ admite ca soluții funcțiile constante pe $[a, b]$, ceea ce înseamnă că $a_{\tau, \tau}(x) \equiv 0$.

Această condiție nu constituie o restricție esențială, întrucât dacă operatorul L_n are proprietatea $I_n^*[a, b]$, atunci în baza unui rezultat stabilit de G. G. Pólya [7] și G. Mammanna [4], operatorul L_n va admite o descompunere de forma

$$(32) \quad L_n[y] = p_n(x) \frac{d}{dx} p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} \dots p_2(x) \frac{d}{dx} p_1(x) \frac{d}{dx} p_0(x) y,$$

unde $p_i(x)$ ($i = 0, \dots, n$) sînt funcții continue, care nu se anulează în nici un punct din intervalul $[a, b]$. În aceste condiții, fiind date: numerele naturale σ și τ , astfel încît $\sigma + \tau = n$, vom putea considera ca operatori A_σ și B_τ următorii operatori:

$$A_\sigma(y) = p_\sigma(x) \frac{d}{dx} p_{\sigma-1}(x) \dots p_1(x) \frac{d}{dx} p_0(x) y$$

$$B_\tau[Y] = p_n(x) \frac{d}{dx} p_{n-1}(x) \dots p_{\sigma+1}(x) \frac{d}{dx} Y,$$

care satisfac condițiile $1^\circ - 4^\circ$.

4. Vom nota respectiv cu $C_{(+)}^{(n)}[a, b]$, $C_{(-)}^{(n)}[a, b]$, $C_{(=)}^{(n)}[a, b]$, $C_{(\neq)}^{(n)}[a, b]$ subclasele formate din toate funcțiile $f \in C^{(n)}[a, b]$, care verifică pe intervalul $[a, b]$ respectiv inegalitățile $L_n[f(x)] > 0$, $L_n[f(x)] \geq 0$, $L_n[f(x)] < 0$, $L_n[f(x)] \leq 0$. În acest paragraf ne vom ocupa cu delimitarea diferenței $\delta(x)$ din (31), în cazurile particulare când funcția f aparține uneia din clasele definite mai sus.

Cazul 1: $f \in C_{(+)}^{(n)}[a, b]$ și $\sigma \leq n - 2$ (adică $\tau \geq 2$).

În acest caz va avea deci loc inegalitatea

$$(33) \quad L_n[f(x)] > 0, \quad x \in [a, b].$$

Întrucît operatorii A_σ și B_τ au proprietățile $I_\sigma^*[a, b]$, respectiv $I_\tau^*[a, b]$, rezultă în baza unor rezultate a lui G. Pólya [7] și G. Mammanna [4], că acești operatori admit descompuneri de forma

$$(34) \quad A_\sigma[y(x)] = \alpha_\sigma(x) \frac{d}{dx} \alpha_{\sigma-1}(x) \dots \frac{d}{dx} \alpha_1(x) \frac{d}{dx} \alpha_0(x) y(x),$$

$$(35) \quad B_\tau[Y(x)] = \beta_\tau(x) \frac{d}{dx} \beta_{\tau-1}(x) \dots \frac{d}{dx} \beta_1(x) \frac{d}{dx} \beta_0(x) Y(x),$$

unde coeficienții $\alpha_i(x)$ și $\beta_j(x)$ ($i = 0, 1, \dots, \sigma$; $j = 0, 1, \dots, \tau$) sînt continui pe $[a, b]$ și nu se anulează în nici un punct din acest interval. Din (17) rezultă însă că funcția $f(x) - H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)$ se anulează de n ori în intervalul $[a, b]$. De aici, ținînd seamă de expresia (34) a operatorului A_σ , se deduce prin aplicarea de σ ori a teoremei lui Rolle, că funcția $\delta(x)$ din (31) are în intervalul $[a, b]$ cel puțin $n - \sigma$ rădăcini (considerate împreună cu ordinele lor de multiplicitate). Pe de altă parte, numărul acestor rădăcini nu poate fi mai mare ca $n - \sigma$, căci în caz afirmativ, înlocuind în (35) pe $Y(x)$ cu $\delta(x)$, s-ar obține prin aplicarea de mai multe ori succesiv a teoremei lui Rolle, că funcția $B_\tau A_\sigma[\delta(x)] \equiv \equiv L_n[f(x)]$ ar avea în intervalul $[a, b]$ cel puțin o rădăcină, ceea ce ar contrazice ipoteza (33). Rezultă deci că numărul rădăcinilor (considerate cu ordinele lor de multiplicitate) ale funcției $\delta(x)$ este egal cu $n - \sigma$. Vom nota aceste rădăcini cu $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_\tau$. Evident că $a \leq r_1$ și $r_\tau \leq b$. De asemenea se constată că întrucît, prin ipoteză, cel puțin două din rădăcinile funcției $f - H_f$ din intervalul $[a, b]$ sînt distincte, și întrucît, tot prin ipoteză, ordinul σ al operatorului A_σ satisface inegalitatea $\sigma \leq n - 2$, rezultă că printre rădăcinile $r_1, \dots, r_\tau$ ale funcției $A_\sigma[f(x) - H_f(x)]$ sînt cel puțin distincte. Astfel, va avea loc inegalitatea strictă $r_1 < r_\tau$.

Fie acum x o valoare oarecare din $[a, b]$. Distingem următoarele 3 subcazuri, după cum $x \in [r_1, r_\tau]$, $x > r_\tau$, sau $x < r_1$.

Subcazul 1.1: $x \in [r_1, r_\tau]$.

Operatorul B_τ avînd prin ipoteză proprietatea $I_\tau^*[a, b]$, în baza formulei de medie (19) vom putea scrie pentru orice funcție $\varphi \in \in C^{(\tau)}[a, b]$ și pentru orice sistem de noduri $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_\tau$, din $[a, b]$, următoarea egalitate

$$\varphi(x) = H_\varphi(x; B_\tau; \xi_1, \dots, \xi_\tau) + N(x; B_\tau; \xi_1, \dots, \xi_\tau) \cdot B_\tau[\varphi(\xi)],$$

$$(36) \quad x \in [a, b], \quad \xi \in (a, b),$$

unde prin $H_\varphi(x; B_\tau; \xi_1, \dots, \xi_\tau)$ am notat soluția $y(x)$ a ecuației omogene $B_\tau[y] = 0$, soluție care verifică condițiile

$$(37) \quad y(\xi_i) = \varphi(\xi_i) \quad (i = 1, \dots, \tau),$$

iar prin $N(x; B_\tau; \xi_1, \dots, \xi_\tau)$ am notat soluția $z(x)$ a ecuației diferențiale neomogene $B_\tau[z] = 1$, verificând condițiile

$$(38) \quad z(\xi_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, \tau).$$

Să considerăm în (36) $\varphi(x) = \delta(x)$, unde $\delta(x)$ este funcția definită în (31) și de asemenea să considerăm $\xi_i = r_i$ ($i = 1, \dots, \tau$). Prin definiție, funcția $H_\delta(x; B_\tau; r_1, \dots, r_\tau)$ corespunzătoare, constituie o soluție (în raport cu variabila x) a ecuației diferențiale $B_\tau[y] = 0$, soluție care verifică condițiile polilocale $y(r_i) = \delta(r_i)$ ($i = 1, \dots, \tau$). Întrucât numerele r_i reprezintă rădăcinile funcției $\delta(x)$, aceste condiții polilocale devin condiții de anulare pentru $y(x)$: $y(r_i) = 0$ ($i = 1, \dots, \tau$). De aici rezultă că funcția $H_\delta(x; B_\tau; r_1, \dots, r_\tau)$ este identic nulă în raport cu variabila x în intervalul $[a, b]$, întrucât în baza proprietății I_τ^* $[a, b]$, orice soluție a ecuației diferențiale $B_\tau[y] = 0$, care se anulează de τ ori în intervalul $[a, b]$, este identic nulă. Totodată se observă că $B_\tau[\delta(x)] \equiv L_n[f(x)]$, întrucât $L_n[H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)] \equiv 0$. Cu aceste observații, înlocuind în formula (36) pe $\varphi(x)$ cu $\delta(x)$, obținem egalitatea

$$(39) \quad \delta(x) = N(x; B_\tau; r_1, \dots, r_\tau) \cdot L_n[f(\xi)].$$

Pentru a delimita expresia care figurează în membrul al doilea al egalității (39), ne putem folosi de teorema 1, în baza căreia are loc inegalitatea

$$(39') \quad |N(x; B_\tau; r_1, \dots, r_\tau)| \leq M(B_\tau; a, b), \quad x \in [r_1, r_\tau].$$

Aici, numărul $M(B_\tau; a, b)$ se definește cu ajutorul relațiilor (24) și (25), considerând în locul operatorului L_n , operatorul B_τ . Din (39) și (39'), ținând totodată seama de expresia (31) a funcției δ , obținem delimitarea

$$(40) \quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| \leq \mu_f \cdot M(B_\tau; a, b), \quad x \in [r_1, r_\tau]$$

unde μ_f este dat de (21).

Subcazul 1.2: $r_\tau < b$ și $x > r_\tau$.

Ținând seamă de formulele (30) și (35) se obține, pentru orice funcție $\psi \in C^{(n)}[a, b]$, identitatea

$$L_n[\psi(x)] \equiv \beta_\tau(x) \frac{d}{dx} \beta_{\tau-1}(x) \dots \frac{d}{dx} \beta_1(x) \frac{d}{dx} \beta_0(x) \cdot A_\sigma[\psi(x)].$$

Considerând în această identitate $\psi(x) = f(x) - H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)$ și ținând seamă de faptul că pentru această alegere a lui ψ avem $L_n[\psi(x)] \equiv L_n[f(x)]$, obținem formula

$$(41) \quad L_n[f(x)] \equiv \beta_\tau(x) \frac{d}{dx} \beta_{\tau-1}(x) \dots \frac{d}{dx} \beta_1(x) \frac{d}{dx} \beta_0(x) \delta(x), \quad x \in [a, b],$$

unde funcția $\delta(x)$ este dată în (31). După cum s-a văzut anterior, în ipoteza că $f \in C_{+}^{(n)}[a, b]$, numărul rădăcinilor (considerate cu ordinele lor de mul-

tiplicitate) ale funcției δ este egal cu τ . Atunci, conform teoremei lui Rolle, funcția $\frac{d}{dx} [\beta_0(x) \delta(x)]$ va avea în intervalul $[r_1, r_\tau]$ cel puțin $\tau - 1$

rădăcini. Această funcție nu se poate anula în intervalul $(r_\tau, b]$, întrucât în caz afirmativ, ea ar avea în intervalul $[a, b]$ cel puțin τ rădăcini și din (41), prin aplicarea de $\tau - 1$ ori succesiv a teoremei lui Rolle, s-ar obține că funcția $L_n[f(x)]$, se anulează în cel puțin un punct din $[a, b]$. Aceasta ar contrazice însă ipoteza adoptată (33). Rezultă deci că funcția

$\frac{d}{dx} [\beta_0(x) \delta(x)]$ păstrează un semn constant (diferit de zero) pe intervalul $(r_\tau, b]$. Dar, în virtutea ipotezei 4° de la § 3, operatorul B_τ este astfel încât ecuația $B_\tau[y] = 0$ admite ca soluții, funcțiile constante pe intervalul $[a, b]$. De aici rezultă că $\beta_0(x)$ este o constantă diferită de zero. Cu această observație, ținând seamă de cele stabilite anterior, se ajunge la concluzia că funcția $\delta(x)$ este monotonă (în sens strict) pe intervalul $[r_\tau, b]$ și întrucât $\delta(r_\tau) = 0$, va avea loc inegalitatea strictă

$$(42) \quad |\delta(x)| < |\delta(b)|, \quad x \in [r_\tau, b].$$

În cele ce urmează, vom da o delimitare a numărului $|\delta(b)|$. În acest scop, considerăm funcția auxiliară

$$(43) \quad \Phi_\lambda(x) = f(x) - H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n) - \lambda N(x; L_n; x_1, \dots, x_n),$$

unde λ este o constantă, pe care o vom determina astfel încât $A_\sigma[\Phi_\lambda(b)] = 0$. Vom arăta întâi că această determinare este posibilă.

Pentru o mai mare claritate a expunerii, vom nota cu $t_1, \dots, t_m$ ($t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m$) nodurile distincte dintre nodurile $x_1, x_2, \dots, x_n$ și vom nota cu $p_1, p_2, \dots, p_m$, ordinele de multiplicitate cu care intervin aceste noduri în relațiile (17) și (18). Evident că $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$. Întrucât prin ipoteză $x_1 = a$, iar $x_n = b$, rezultă că $t_1 = a$, iar $t_m = b$.

De asemenea, pentru motive de claritate, vom utiliza notațiile

$$H_f(x) = H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n) = H_f\left(x; L_n; \begin{matrix} t_1, t_2, \dots, t_m \\ p_1, p_2, \dots, p_m \end{matrix}\right),$$

$$N(x) = N(x; L_n; x_1, \dots, x_n) = N\left(x; L_n; \begin{matrix} t_1, t_2, \dots, t_m \\ p_1, p_2, \dots, p_m \end{matrix}\right).$$

Vom arăta în cele ce urmează că $A_\sigma[N(b)] \neq 0$. Într-adevăr, în subcazul considerat, după cum rezultă din (42), avem $\delta(b) \neq 0$. De aici rezultă că ordinul p_m cu care figurează nodul $t_m = b$ în relațiile (17), trebuie să verifice inegalitatea

$$(44) \quad p_m \leq \sigma.$$

Apoi, conform egalităților (18), ținând seamă că $b = t_m$, vom avea

$$(45) \quad N(b) = N'(b) = \dots = N^{(p_m-1)}(b) = 0.$$

În mod necesar, trebuie să aibă loc relația

$$(46) \quad N^{(p_m)}(b) \neq 0,$$

întrucît, în caz contrar, ar rezulta în baza egalităților (18) că funcția N se anulează de $n + 1$ ori în intervalul $[a, b]$ și de aici, în baza formulelor (30), (34), (35), s-ar deduce că funcția $L_n[N(x)]$ se anulează cel puțin într-un punct ξ din $[a, b]$. Acest rezultat ar contrazice faptul că: $N(x)$ reprezintă o soluție a ecuației diferențiale $L_n[y] = 1$. Pe de altă parte, în baza acelorași egalități (18) și (34), se deduce prin aplicarea de σ ori succesiv a teoremei lui Rolle că funcția $A_\sigma[N(x)]$ are în intervalul $[a, b]$ cel puțin $n - \sigma = \tau$ rădăcini. Numărul rădăcinilor din $[a, b]$ ale funcției $A_\sigma[N(x)]$ nu poate fi mai mare decît $n - \sigma$, întrucît în caz contrar, ținând seamă de (30) și (35), s-ar deduce că funcția $L_n[N(x)]$ se anulează cel puțin pentru o valoare $\xi \in [a, b]$, ceea ce ar contrazice identitatea $L_n[N(x)] \equiv 1$, valabilă pentru orice x din $[a, b]$. Aceste rădăcini se vor afla în subintervalul (închis), avînd ca extremități rădăcinile extreme din $[a, b]$ ale funcției

$$\eta_k(x) = \alpha_k(x) \frac{d}{dx} \alpha_{k-1}(x) \frac{d}{dx} \dots \alpha_1(x) \frac{d}{dx} \alpha_0(x) \cdot N(x),$$

unde k este un număr natural oarecare, dat, satisfăcînd inegalitatea $k \leq \sigma$. Ținînd seamă de (44), vom putea să considerăm numărul k astfel încît $k = p_m$ și atunci în baza afirmației de mai sus, va rezulta că rădăcinile din intervalul $[a, b]$ ale funcției $A_\sigma[N(x)]$ vor fi situate între rădăcinile extreme din același interval $[a, b]$ ale funcției

$$\eta_{p_m}(x) = \alpha_{p_m}(x) \frac{d}{dx} \alpha_{p_m-1}(x) \frac{d}{dx} \dots \alpha_1(x) \frac{d}{dx} \alpha_0(x) \cdot N(x).$$

Însă în baza relațiilor (45), se obține că

$$\eta_{p_m}(b) = \alpha_{p_m}(b) \cdot \alpha_{p_m-1}(b) \dots \alpha_1(b) \cdot \alpha_0(b) \cdot N^{p_m}(b)$$

și întrucît funcțiile $\alpha_i(x)$ ($i = 0, \dots, \sigma$) nu se anulează pentru nici o valoare din $[a, b]$, va rezulta în baza relației (46) că $\eta_{p_m}(b) \neq 0$.

De aici, în baza unei afirmații de mai sus, rezultă că $A_\sigma[N(b)] \neq 0$, ceea ce era de demonstrat.

În continuare, să observăm că întrucît $A_\sigma[N(b)] \neq 0$, vom putea să determinăm parametrul λ astfel încît funcția $L_\sigma[\Phi_\lambda(x)]$, obținută din (43), să se anuleze pentru $x = b$. Vom obține pentru λ valoarea

$$(47) \quad \lambda_0 = \frac{A_\sigma[f(b) - H_f(b)]}{A_\sigma[N(b)]}.$$

Pe de altă parte, se observă că oricare ar fi valoarea reală pe care o ia parametrul λ , funcția Φ_λ din (43) se anulează în intervalul $[a, b]$ pentru valorile $x_1, x_2, \dots, x_n$, sau mai precis spus, pentru valorile $t_1, t_2, \dots, t_m$ ($t_m = b$), respectiv cu ordinele de multiplicitate $p_1, p_2, \dots, p_m$ ($p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$). În particular, pentru valoarea $t_m = b$, funcția Φ_{λ_0} va îndeplini condițiile

$$\Phi_{\lambda_0}(b) = \Phi'_{\lambda_0}(b) = \dots = \Phi_{\lambda_0}^{(p_m-1)}(b) = 0.$$

Distingem următoarele două subcazuri, după cum $\Phi_{\lambda_0}^{(p_m)}(b) = 0$, sau $\Phi_{\lambda_0}^{(p_m)}(b) \neq 0$.

Dacă $\Phi_{\lambda_0}^{(p_m)}(b) = 0$, atunci, după cum rezultă din egalitățile scrise mai sus, valoarea $t_m = b$ constituie pentru funcția Φ_{λ_0} o rădăcină multiplă de ordin mai mare sau cel puțin egal cu $p_m + 1$. De aici, ținînd seamă de faptul că $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$, rezultă că funcția Φ_{λ_0} se anulează în $[a, b]$ de cel puțin $n + 1$ ori, și ținînd seamă de formulele (30), (34) și (35), se ajunge la concluzia că funcția $L_n[\Phi_{\lambda_0}(x)]$ se anulează pentru cel puțin o valoare $\xi \in (a, b)$. Scriînd aceasta și observînd pe de o parte că $L_n[H_f(x)] \equiv 0$, iar pe de altă parte că $L_n[N(x)] \equiv 1$, se obține egalitatea $L_n[f(\xi)] - \lambda_0 = 0$, de unde, ținînd seamă de (47), se obține formula de medie

$$(48) \quad A_\sigma[f(b) - H_f(b)] = A_\sigma[N(b)] \cdot L_n[f(\xi)], \quad \xi \in [a, b].$$

Dacă însă $\Phi_{\lambda_0}^{(p_m)}(b) \neq 0$, atunci ținînd seamă de faptul că funcția Φ_{λ_0} se anulează pentru valorile $t_1, t_2, \dots, t_m$ din $[a, b]$, respectiv cu ordinele de multiplicitate mai mari sau cel puțin egale respectiv cu $p_1, p_2, \dots, p_m$ ($p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$), rezultă, în baza teoremei lui Rolle, că funcția

$$\zeta_{p_m}(x) = \alpha_{p_m}(x) \frac{d}{dx} \alpha_{p_m-1}(x) \frac{d}{dx} \dots \alpha_1(x) \frac{d}{dx} \alpha_0(x) \cdot \Phi_{\lambda_0}(x)$$

se anulează în intervalul *semideschis* $[a, b)$, cel puțin de $n - p_m$ ori, iar $\zeta_{p_m}(b) \neq 0$; întrucît

$$\zeta_{p_m}(b) = \alpha_{p_m}(b) \cdot \alpha_{p_m-1}(b) \dots \alpha_1(b) \cdot \alpha_0(b) \cdot \Phi_{\lambda_0}^{(p_m)}(b) \neq 0.$$

De aici, ținînd seamă de inegalitatea (44) și de expresia (34) a operatorului A_σ , se constată tot în baza teoremei lui Rolle că funcția $A_\sigma[\Phi_{\lambda_0}(x)]$ se anulează în intervalul *semideschis* $[a, b)$ de $n - \sigma = \tau$ ori cel puțin. Dar prin modul cum a fost ales numărul λ_0 , această funcție se anulează și pentru valoarea $x = b$. Rezultă, în definitiv, că funcția $A_\sigma[\Phi_{\lambda_0}(x)]$ se anulează în $[a, b]$ de cel puțin $\tau + 1$ ori. Ținînd seamă de expresia (35) a operatorului B_τ , rezultă de aici prin aplicarea de τ ori succesiv a teoremei lui Rolle că funcția $B_\tau\{A_\sigma[\Phi_{\lambda_0}(x)]\} = L_n[\Phi_{\lambda_0}(x)]$ se anulează pentru cel puțin o valoare ξ din $[a, b]$. De aici, procedînd întocmai ca și în cazul tratat anterior, se obține formula (48).

Revenind la inegalitatea (42) și ținând seamă de formula (31), care definește funcția $\delta(x)$, se obține din (42) și (48) delimitarea

$$(49) \quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| < \mu_f |A_\sigma[N(b; L_n; x_1, \dots, x_n)]|,$$

valabilă pentru $x > r_\tau$. De aici se obține a fortiori

$$(50) \quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| < \mu_f \max_{\substack{x_2, \dots, x_{n-1} \in [a, b] \\ (x_1 = a, x_n = b)}} |A_\sigma[N(b; L_n; x_1, \dots, x_n)]|, \quad (x > r_\tau).$$

În baza teoremei 3, marginea superioară care figurează în membrul al doilea al inegalității (50) este atinsă pentru cazul cînd $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = a$ și $x_n = b$. Cu notațiile utilizate anterior, inegalitatea (50) se transcrie

$$(51) \quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| < \mu_f \left| A_\sigma \left[N \left(b; L_n; \begin{smallmatrix} a, & b \\ & n-1, 1 \end{smallmatrix} \right) \right] \right| \quad (x > r_\tau).$$

În sfîrșit, avem de considerat

Subcazul 1.3: $x < r_1$ (evident, numai dacă $a < r_1$).

Procedînd în acest subcaz întocmai ca în subcazul 1.2, se ajunge la inegalitatea

$$(52) \quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| < \mu_f \left| A_\sigma \left[N \left(a; L_n; \begin{smallmatrix} a, & b \\ & 1, n-1 \end{smallmatrix} \right) \right] \right|, \quad (x < r_1).$$

Pentru a sintetiza rezultatele obținute cu ocazia studierii celor trei subcazuri, definim numărul $M(L_n; A_\sigma; a, b)$ precum urmează:

$$(53) \quad M(L_n, A_\sigma; a, b) = \max \left\{ \left| A_\sigma \left[N \left(b; L_n; \begin{smallmatrix} a, & b \\ & n-1, 1 \end{smallmatrix} \right) \right] \right|, \left| A_\sigma \left[N \left(a; L_n; \begin{smallmatrix} a, & b \\ & 1, n-1 \end{smallmatrix} \right) \right] \right| \right\},$$

$$M(B_\tau; a, b) \quad (\sigma \leq n-2).$$

Are loc deci următoarea leamnă:

LEMA 1. În ipoteza că operatorul L_n admite o descompunere de forma (30), în care operatorii A_σ și B_τ ($\tau \geq 2$) verifică condițiile 1° - 4° din § 3, are loc pentru orice funcție $f \in C_{(+)}^{(n)}[a, b]$ delimitarea

$$(54) \quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| \leq \mu_f M(L_n, A_\sigma; a, b), \quad x \in [a, b],$$

unde μ_f este dat în (21), iar constanta $M(L_n, A_\sigma; a, b)$ este dată în (53).

Vom considera în continuare

Cazul 2: $f \in C_{(+)}^{(n)}[a, b]$ și $\sigma \leq n-2$ (adică $\tau \geq 2$).

În acest caz va avea loc, prin ipoteză, inegalitatea

$$(55) \quad L_n[f(x)] \geq 0, \quad x \in [a, b].$$

Fie ε un număr pozitiv oarecare. Vom nota cu $f_\varepsilon(x)$ soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale

$$(56) \quad L_n[y] = L_n[f(x)] + \varepsilon,$$

soluție care verifică condițiile

$$(57) \quad y(x_i) = f(x_i), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Întrucît funcția $f_\varepsilon(x)$ satisface condițiile lemei 1, vom putea scrie pentru această funcție inegalitatea (54). Vom obține:

$$(58) \quad |A_\sigma[f_\varepsilon(x)] - A_\sigma[H_{f_\varepsilon}(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| \leq \mu_{f_\varepsilon} M(L_n, A_\sigma; a, b), \quad x \in [a, b],$$

unde am notat prin $H_{f_\varepsilon}(x; L_n; x_1, \dots, x_n)$ soluția $z(x)$ a ecuației diferențiale $L_n[Z] = 0$, soluție care verifică condițiile

$$(59) \quad z(x_i) = f_\varepsilon(x_i), \quad (i = 1, \dots, n),$$

iar

$$(60) \quad \mu_{f_\varepsilon} = \max_{x \in [a, b]} |L_n[f_\varepsilon(x)]| = \max_{x \in [a, b]} |L_n[f(x)] + \varepsilon|.$$

Ținînd seamă de faptul că ecuația (56) depinde în mod continuu de parametrul ε , precum și de faptul că condițiile (57) pe care le verifică funcția $f_\varepsilon(x)$ nu depind de ε , rezultă egalitatea

$$(61) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon^{(i)}(x) = f^{(i)}(x), \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad x \in [a, b].$$

Apoi, ținînd seamă din nou de condițiile (57), vom putea să transcriem egalitățile (59) care intervin în definiția funcției $H_{f_\varepsilon}(x; L_n; x_1, \dots, x_n)$ astfel:

$$(59') \quad z(x_i) = f(x_i), \quad (i = 1, \dots, n).$$

De aici rezultă identitatea

$$(62) \quad H_{f_\varepsilon}(x; L_n; x_1, \dots, x_n) \equiv H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n), \quad x \in [a, b],$$

unde prin $H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)$ s-a notat, ca și anterior, soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale $L_n[y] = 0$, soluție care verifică condițiile (57). În sfîrșit, din (60) rezultă

$$(63) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{f_\varepsilon} = \mu_f.$$

Cu aceste observații, făcând în (58) ca $\varepsilon \rightarrow 0^+$ și ținând seamă de (61) — (63), obținem delimitarea (54), ceea ce demonstrează valabilitatea lemei 1 și în cazul 2. În sfârșit, mai rămâne de considerat

Cazul 3: $f \in C_{(-)}^{(n)}[a, b]$ și $\sigma \leq n-2$ (adică $\tau \geq 2$).

În acest caz se consideră, în locul funcției f , funcția $f_1 = -f$, reducându-se astfel studiul acestui caz la studiul cazului anterior.

★

În cele anterioare, am considerat $\sigma \leq n-2$, adică $\tau \geq 2$. Dacă $\sigma = n-1$, adică $\tau = 1$, atunci procedind analog ca pentru $\sigma \leq n-2$, vom distinge de asemenea 3 cazuri după cum f aparține uneia din clasele $C_{(+)}^{(n)}[a, b]$, $C_{(-)}^{(n)}[a, b]$, sau $C_{(0)}^{(n)}[a, b]$. În cazul 1, adică în cazul când $f \in C_{(+)}^{(n)}[a, b]$, se constată că funcția $\delta(x)$ din (31) va avea în $[a, b]$ o rădăcină și numai una singură r_1 . Astfel, în vederea delimitării funcției $\delta(x)$ din (39), vom avea de considerat doar două subcazuri, după cum $x > r_1$, sau $x < r_1$. (Pentru $x = r_1$ avem $\delta(r_1) = 0$). Vom ajunge astfel la o afirmație analoagă cu aceea a lemei 1, cu deosebirea că în cazul $\sigma = n-1$, numărul $M(L_n, A_\sigma; a, b)$ trebuie definit astfel:

$$M(L_n, A_\sigma; a, b) = \max \left\{ \left| A_\sigma \left[N(b; L_n; \frac{a}{n-1}, \frac{b}{1}) \right] \right|, \right. \\ \left. \left| A_\sigma \left[N(a; L_n; \frac{a}{1}, \frac{b}{n-1}) \right] \right| \right\} \quad (\sigma = n-1). \quad (64)$$

Cazul $f \in C_{(+)}^{(n)}[a, b]$ și cazul $f \in C_{(-)}^{(n)}[a, b]$ se studiază la fel ca și pentru $\sigma \leq n-2$. Ajungem în definitiv la următoarea teoremă:

TEOREMA 4. Dacă operatorul L_n admite o descompunere de forma (30) în care A_σ și B_τ verifică condițiile 1° — 4° de la § 3, și dacă f este o funcție oarecare din $C^{(n)}[a, b]$, astfel încît $L_n[f(x)]$ nu schimbă de semn în $[a, b]$, atunci oricare ar fi sistemul de noduri $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, astfel încît $x_1 = a$ și $x_n = b$, are loc delimitarea (54), în care numărul $M(L_n, A_\sigma; a, b)$ se definește conform formulelor (53) sau (64), după cum $\sigma \leq n-2$, sau $\sigma = n-1$.

5. Pentru a exemplifica cele expuse în §§ 3 și 4, să considerăm

$$L_n = \frac{d^n}{dx^n}, A_\sigma = \frac{d^\sigma}{dx^\sigma}, B_\tau = \frac{d^\tau}{dx^\tau}, \quad (\sigma + \tau = n).$$

Atunci

$$N\left(x; L_n; \frac{a}{n-1}, \frac{b}{1}\right) = \frac{1}{n!} (x-a)^{n-1} (x-b); \quad N\left(x; L_n; \frac{a}{1}, \frac{b}{n-1}\right) = \\ = \frac{1}{n!} (x-a) (x-b)^{n-1},$$

$$A_\sigma \left[N\left(x; L_n; \frac{a}{n-1}, \frac{b}{1}\right) \right] = \frac{1}{(n-\sigma)! n} (x-a)^{n-\sigma-1} [n(x-b) + \sigma(b-a)],$$

$$A_\sigma \left[N\left(x; L_n; \frac{a}{1}, \frac{b}{n-1}\right) \right] = \frac{1}{(n-\sigma)! n} (x-b)^{n-\sigma-1} [n(x-a) + \sigma(a-b)].$$

Dacă $\tau \geq 2$, atunci

$$N\left(x; B_\tau; \frac{a}{p}, \frac{b}{\tau-p}\right) = \frac{1}{\tau!} (x-a)^p (x-b)^{\tau-p}, \quad (p = 1, \dots, \tau-1).$$

De aici, obținem îndată

$$\left| A_\sigma \left[N\left(b; L_n; \frac{a}{n-1}, \frac{b}{1}\right) \right] \right| = \left| A_\sigma \left[N\left(a; L_n; \frac{a}{1}, \frac{b}{n-1}\right) \right] \right| = \\ = \frac{\sigma}{(n-\sigma)! n} h^{n-\sigma} \quad (h = b-a).$$

Utilizînd egalitatea (29) în care înlocuim pe n cu τ , obținem

$$M(B_\tau; a, b) = \max_{p=1,2,\dots,\tau-1} \left\{ \max_{x \in [a,b]} \left| N\left(x; B_\tau; \frac{a}{p}, \frac{b}{\tau-p}\right) \right| \right\} = \frac{(\tau-1)^{\tau-1}}{\tau! \tau^\tau} h^\tau.$$

Se observă însă că în cazul acestui exemplu are loc pentru $\tau \geq 2$ inegalitatea

$$M(B_\tau; a, b) < \left| A_\sigma \left[N\left(b; L_n; \frac{a}{n-1}, \frac{b}{1}\right) \right] \right|.$$

În conformitate cu formula (53), vom avea deci

$$M(L_n, A_\sigma; a, b) = \frac{\sigma}{(n-\sigma)! n} h^{n-\sigma}, \quad (\sigma = 1, \dots, n-1).$$

Teorema 4 revine în acest caz la următoarea afirmație:

Dacă f este o funcție oarecare din clasa $C^{(n)}[a, b]$, astfel încît $f^{(n)}(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, sau $f^{(n)}(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci oricare ar fi nodurile $x_1 \leq \dots \leq x_n$ din $[a, b]$, astfel încît $x_1 = a$, iar $x_n = b$, și oricare ar fi $\sigma = 1, \dots, n-1$, are loc delimitarea

$$f^{(\sigma)}(x) - \frac{d^\sigma}{dx^\sigma} L[x_1, \dots, x_n; f|x] \leq \frac{\sigma}{(n-\sigma)! n} h^{n-\sigma} \mu_1,$$

valabilă pentru orice $x \in [a, b]$.

Aici s-a notat, ca de obicei, cu $L[x_1, \dots, x_n; f | x]$ polinomul de interpolare al lui Lagrange, de gradul $n-1$, care coincide cu f pe nodurile x_i ($i = 1, \dots, n$). Astfel, se regăsește (în cazul particular când $f^n(x)$ nu schimbă de semn în $[a, b]$) inegalitatea (15), dată (sub o formă puțin diferită) de G. A. Bessmertnih și A. Iu. Levin în lucrarea citată anterior [3].

6. În acest paragraf vom studia cazul mai general când $f \in C^{(n)}[a, b]$. Fie dată funcția f ($f \in C^{(n)}[a, b]$) și n noduri $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ astfel încât $x_1 = a$, iar $x_n = b$. Considerăm funcțiile φ și ψ definite precum urmează:

$$(65) \quad \varphi(x) = \begin{cases} L_n[f(x)], & \text{dacă } L_n[f(x)] > 0, \\ 0, & \text{dacă } L_n[f(x)] \leq 0, \end{cases}$$

$$(66) \quad \psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } L_n[f(x)] \geq 0, \\ L_n[f(x)], & \text{dacă } L_n[f(x)] < 0, \end{cases}$$

Fie $f_{(+)}(x)$ soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale $L_n[y] = \varphi(x)$, soluție care satisface condițiile

$$(67) \quad y(x_i) = f(x_i), \quad (i = 1, \dots, n)$$

și fie $f_{(-)}(x)$ soluția $z(x)$ a ecuației diferențiale $L_n[z] = \psi(x)$, soluție care verifică condițiile

$$(68) \quad z(x_i) = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Întrucât, prin definiție, funcțiile f și $f_{(+)} + f_{(-)}$ verifică o aceeași ecuație diferențială $L_n[Y] = L_n[f(x)]$ și întrucât aceste funcții coincid pentru valorile $x_1, \dots, x_n$ ale variabilei independente, va rezulta în baza proprietății $I_n^*[a, b]$ a operatorului L_n , următoarea identitate

$$(69) \quad f(x) \equiv f_{(+)}(x) + f_{(-)}(x), \quad x \in [a, b].$$

Evident că au loc de asemenea inegalitățile

$$L_n[f_{(+)}(x)] \geq 0, \quad L_n[f_{(-)}(x)] \leq 0, \quad x \in [a, b].$$

Atunci, în baza teoremei 4, vom putea să scriem pentru fiecare din funcțiile $f_{(+)}$ și $f_{(-)}$, inegalitățile (54). Vom obține:

$$(70) \quad |A_\sigma[f_{(+)}(x) - H_{f_{(+)}}(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| \leq \mu_{f_{(+)}} M(L_n, A_\sigma; a, b),$$

$$|A_\sigma[f_{(-)}(x) - H_{f_{(-)}}(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| \leq \mu_{f_{(-)}} M(L_n, A_\sigma; a, b).$$

Pe de altă parte, ținând seamă de condițiile (67), respectiv (68), pe care le verifică $f_{(+)}$, respectiv $f_{(-)}$, se constată că pentru $x \in [a, b]$ au loc identitățile

$$H_{f_{(+)}}(x; L_n; x_1, \dots, x_n) \equiv H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n) \\ H_{f_{(-)}}(x; L_n; x_1, \dots, x_n) \equiv 0,$$

astfel că vom putea scrie:

$$A_\sigma[f(x) - H_f(x)] \equiv A_\sigma[f_{(+)}(x) + f_{(-)}(x)] - A_\sigma[H_{f_{(+)}}(x) + H_{f_{(-)}}(x)] \equiv \\ \equiv A_\sigma[f_{(+)}(x) - H_{f_{(+)}}(x)] + A_\sigma[f_{(-)}(x) - H_{f_{(-)}}(x)].$$

De aici, ținând seamă de (70), obținem delimitarea

$$(71) \quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x)]| \leq (\mu_{f_{(+)}} + \mu_{f_{(-)}}) \cdot M(L_n, A_\sigma; a, b), \quad x \in [a, b].$$

Dar

$$0 \leq \mu_{f_{(+)}} \leq \mu_f; \quad 0 \leq \mu_{f_{(-)}} \leq \mu_f,$$

de unde rezultă $\mu_{f_{(+)}} + \mu_{f_{(-)}} \leq 2\mu_f$, și înlocuind în (71), obținem delimitarea

$$(72) \quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x)]| \leq 2\mu_f M(L_n, A_\sigma; a, b), \quad x \in [a, b].$$

Putem astfel enunța următoarea teoremă:

TEOREMA 5. Dacă operatorul L_n admite o descompunere de forma (30) în care operatorii A_σ și B_τ verifică condițiile 1°-4° (de la § 3), și dacă $f \in C^{(n)}[a, b]$, atunci oricare ar fi nodurile $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, astfel încât $x_1 = a$ și $x_n = b$, va avea loc pentru orice $x \in [a, b]$ delimitarea (72).

7. În cele anterioare am presupus că nodurile $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ sînt astfel încât $x_1 = a$ și $x_n = b$. Vom considera în acest paragraf cazul mai general când $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$. De asemenea vom presupune că operatorul L_n admite o descompunere de forma (30), în care A_σ și B_τ verifică condițiile 1°-3° (de la § 3), fără ca să fie îndeplinită neapărat și condiția 4°. Se constată întocmai ca și în studiul cazului 1 de la § 4, că dacă funcția $f \in C^{(n)}[a, b]$, atunci funcția $\delta(x)$ din (31) are în intervalul $[a, b]$ cel puțin $n - \sigma = \tau$ rădăcini (considerate împreună cu ordinele lor de multiplicitate). Să considerăm τ dintre aceste rădăcini și să le notăm cu $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_\tau$. Evident că $a \leq r_1$ și $r_\tau \leq b$. Întocmai ca în studiul subcazului 1.1 de la § 4, se stabilește formula de medie (39), din care se obține delimitarea

$$(73) \quad |\delta(x)| \leq \mu_f \max_{r_1, r_2, \dots, r_\tau \in [a, b]} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |N(x; B_\tau; r_1, \dots, r_\tau)| \right\},$$

valabilă pentru orice $x \in [a, b]$. Aici, spre deosebire de subcazul 1.1 studiat la § 4, valoarea x care intervine în expresia $N(x; B_\tau; r_1, \dots, r_\tau)$ poate fi și exterioră intervalului $[r_1, r_\tau]$, și pentru astfel de valori, inegalitatea (39') nu este în general verificată. Pentru a obține totuși o delimitare a expresiei care figurează în membrul al doilea al inegalității (73), vom utiliza următoarea teoremă, analoagă teoremei 1, a cărei demonstrație este dată în lucrarea [1]:

TEOREMA 1*. În ipotezele teoremei 1 (de la § 2), oricare ar fi nodurile $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ ($1 \leq m \leq n$ și $a \leq x_1, x_n \leq b$), avînd respectiv ordi-

nele de multiplicitate $p_1, p_2, \dots, p_m$ astfel încât $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$, are loc pentru orice $x \in [a, b]$ inegalitatea

$$(74) \quad \left| N \left(x; L_n; \begin{matrix} x_1, \dots, x_m \\ p_1, \dots, p_m \end{matrix} \right) \right| \leq M^*(L_n; a, b), \quad x \in [a, b],$$

unde

$$(75) \quad M^*(L_n; a, b) = \max_{p=0,1,\dots,n} \left\{ M_p(L_n; a, b) \right\},$$

numerele $M_p(L_n; a, b)$ fiind definite întocmai ca în (24). (Spre deosebire de formula (25) care definește numărul $M(L_n; a, b)$, în formula (75) maximumul care figurează în membrul al doilea al acestei formule se consideră atât relativ la valorile $p = 1, \dots, n-1$, cât și relativ la valorile $p = 0$ și $p = n$).

În baza teoremei 1*, se obține din (73) următoarea teoremă:

TEOREMA 6. Dacă operatorul L_n admite o descompunere de forma (30), în care A_σ și B_τ verifică condițiile 1°–3° (de la § 3) și dacă $f \in C^{(n)}[a, b]$, atunci oricare ar fi sistemul de noduri $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ astfel încât $a \leq x_1$ și $x_n \leq b$, va avea loc delimitarea

$$(76) \quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| \leq \mu_1 M^*(B_\tau; a, b), \quad x \in [a, b].$$

Din compararea inegalităților (72) și (76), se obține în definitiv următoarea teoremă:

TEOREMA 7. În ipoteza că operatorul L_n admite o descompunere de forma (30), în care A_σ și B_τ verifică condițiile 1°–4° (de la § 3), atunci oricare ar fi funcția $f \in C^{(n)}[a, b]$ și oricare ar fi nodurile $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, astfel încât $x_1 = a$ și $x_n = b$, are loc pentru orice $x \in [a, b]$ inegalitatea

$$(77) \quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| \leq \mu_1 \min \{M^*(B_\tau; a, b), 2M(L_n, A_\sigma; a, b)\}$$

În cazul exemplului considerat la § 5, vom avea:

$$M^*(B_\tau; a, b) = \frac{1}{\tau!} h^\tau (h=b-a); \quad M(L_n, A_\sigma; a, b) = \frac{\sigma}{\tau! n} h^\tau,$$

$$\min \{M^*(B_\tau; a, b), 2M(L_n, A_\sigma; a, b)\} = \frac{h^\tau}{\tau!} \cdot \min \left\{ 1, \frac{2\sigma}{n} \right\}.$$

Observații. 1. Bănuim că în delimitarea (72), prezența în membrul al doilea a factorului 2 nu este necesară, acest factor provenind din metoda de demonstrație utilizată. În paragraful următor vom arăta justetea acestei afirmații, pentru cazul particular $n = 2$.

2. În ipoteza că operatorul L_n admite o descompunere de forma (30), în care operatorii (dați) A_σ și B_τ verifică condițiile 1°–3° (de la § 3), atunci

marginea inferioară γ_0 a constantelor γ pentru care este verificată inegalitatea (analogă inegalității (77))

$$(77') \quad |A_\sigma[f(x)] - A_\sigma[H_f(x; L_n; x_1, \dots, x_n)]| \leq \gamma \cdot \mu_1,$$

oricare ar fi $f \in C^{(n)}[a, b]$, oricare ar fi nodurile $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ satisfăcând condiția $x_1 = a$ și $x_n = b$ și oricare ar fi $x \in [a, b]$, este dată de formula

$$\gamma_0 = \sup_{f \in C_0^{(n)}[a, b]} \left\{ \left(\max_{x \in [a, b]} |A_\sigma[f(x)]| \right) \left(\max_{x \in [a, b]} |L_n[f(x)]| \right)^{-1} \right\}$$

unde $C_0^{(n)}[a, b]$ reprezintă subclasa funcțiilor neidentic nule, f , din $C^{(n)}[a, b]$, care se anulează de cel puțin n ori în $[a, b]$, astfel încât $f(a) = f(b) = 0$.

Demonstrația acestei afirmații este imediată. După cum rezultă din (76) va avea loc întotdeauna inegalitatea $\gamma_0 \leq M^*(B_\tau; a, b)$.

3. Să considerăm cazul particular cînd $n = 2$ și să presupunem că operatorul diferențial L_2 admite o descompunere de forma

$$L_2[y] = B_1 A_1[y] = B_1 \{A_1[y]\}, \quad y \in C^{(2)}[a, b],$$

unde

$$A_1[y(x)] = a_0(x) \frac{dy}{dx} + a_1(x)y; \quad B_1[Y(x)] = b_0(x) \frac{dY}{dx} + b_1(x)Y,$$

coeficienții $b_0(x)$ și $b_1(x)$ fiind continui în $[a, b]$, iar $a_0(x)$ și $a_1(x)$ aparținînd clasei $C^{(1)}[a, b]$. Mai presupunem că $a_0(x) \neq 0$ și $b_0(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. În aceste ipoteze, operatorul L_2 va admite proprietatea I_2^* $[a, b]$. Fie $K_0^{(2)}[a, b]$ clasa funcțiilor f care se anulează simultan pentru valorile $x = a$ și $x = b$, și care admit o derivată de ordinul 1, continuă pe $[a, b]$, precum și o derivată de ordinul al doilea, continuă în orice punct din $[a, b]$, cu excepția eventual a cel mult 3 puncte (depinzînd de f), în care derivata respectivă prezintă salturi. Pentru funcțiile din clasa $K_0^{(2)}[a, b]$, care nu se anulează identic pe intervalul $[a, b]$, definim următoarea funcțională

$$\mathfrak{F}[f] = \left(\max_{x \in [a, b]} |A_1[f(x)]| \right) \cdot \left(\sup_{x \in [a, b]} |L_2[f(x)]| \right)^{-1}. \quad (78)$$

Dacă f aparține clasei $K_0^{(2)}[a, b]$ și dacă f nu este identic nulă pe $[a, b]$, atunci funcția $L_2[f(x)]$ nu poate fi identic nulă, întrucît, în caz contrar, f ar constitui o soluție a ecuației $L_2[y] = 0$, verificînd condițiile $y(a) = y(b) = 0$ și în baza proprietății I_2^* $[a, b]$ a operatorului L_2 , ar rezulta că $f(x) \equiv 0$ pe $[a, b]$, ceea ce contrazice ipoteza adoptată conform căreia $f(x) \not\equiv 0$ pe $[a, b]$. Rezultă deci că pentru o astfel de funcție f , numitorul care figurează în (78) nu se anulează.

În cele ce urmează, ne propunem să determinăm numărul

$$(79) \quad \gamma(a, b) = \sup_{\substack{f \in K_0^{(2)}[a, b] \\ (f \neq 0)}} \mathfrak{F}[f].$$

Vom arăta întâi că această margine superioară este atinsă în clasa $K_0^{(2)}[a, b]$ pentru cel puțin o funcție. În acest scop, considerăm funcția lui Green $G(x, s)$, corespunzătoare operatorului L_2 și condițiilor bilocale $y(a) = y(b) = 0$. Atunci, oricare ar fi $f \in K_0^{(2)}[a, b]$, vom avea

$$(80) \quad f(x) \equiv \int_a^b G(x, s) L_2[f(s)] ds, \quad x \in [a, b],$$

$$A_1[f(x)] \equiv \int_a^b A_1[G(x, s)] L_2[f(s)] ds, \quad x \in [a, b].$$

De aici rezultă următoarea delimitare, valabilă pentru orice $x \in [a, b]$:

$$(81) \quad |A_1[f(x)]| \leq \left(\max_{x \in [a, b]} \int_a^b |A_1[G(x, s)]| ds \right) \left(\sup_{x \in [a, b]} |L_2[f(x)]| \right).$$

Deoarece funcția f este arbitrară în $K_0^{(2)}[a, b]$, rezultă din (81)

$$(82) \quad \gamma(a, b) \leq \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |A_1[G(x, s)]| ds.$$

Pe de altă parte, din modul în care se construiește funcția lui Green (a se consulta în această direcție de exemplu lucrarea [6]), se constată cu ușurință că funcția $\int_a^b |A_1[G(x, s)]| ds$ este continuă în raport cu variabila x pe intervalul $[a, b]$. Fie x_0 o valoare din $[a, b]$ a variabilei x , pentru care este atins maximumul acestei funcții când x variază în $[a, b]$:

$$(83) \quad \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |A_1[G(x, s)]| ds = \int_a^b |A_1[G(x_0; s)]| ds.$$

Fie în continuare funcția $\varphi_0(x)$ definită precum urmează:

$$(84) \quad \varphi_0(s) = \operatorname{sgn} A_1[G(x_0; s)], \quad s \in [a, b].$$

Tot din construcția funcției $G(x, s)$, se constată că $\varphi_0(x)$ nu poate avea pe intervalul $[a, b]$ mai mult de 3 puncte de discontinuitate (de speța 1-a), întrucât, în cazul de față, oricare ar fi x fixat din $[a, b]$, funcția de variabilă s , $A_1[G(x, s)]$, nu poate schimba semnul mai mult de 3 ori, când s variază în intervalul $[a, b]$.

Fie $f_0(x)$ soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale $L_2[y] = \varphi_0(x)$, soluție care verifică condițiile $y(a) = y(b) = 0$. Existența și unicitatea unei astfel de soluții sînt asigurate de proprietatea $I_2^*[a, b]$ a operatorului L_2 . Dintr-o observație anterioară rezultă că $f_0 \in K_0^{(2)}[a, b]$. Înlocuind în (80) pe f

cu f_0 și ținînd seamă de faptul că $L_2[f_0(x)] \equiv \varphi_0(x)$, unde φ_0 este definită conform formulei (84), obținem identitatea:

$$A_1[f_0(x)] = \int_a^b A_1[G(x, s)] L_2[f_0(s)] ds = \int_a^b A_1[G(x, s)] \cdot \operatorname{sgn} A_1[G(x_0, s)] ds$$

Înlocuind aici pe x cu x_0 , obținem

$$(85) \quad A_1[f_0(x_0)] = \int_a^b |A_1[G(x_0, s)]| ds$$

și întrucît $\sup_{x \in [a, b]} L_2[f_0(x)] = 1$, vom obține din (85) și (78) egalitatea

$$(86) \quad \mathfrak{F}[f_0] = \int_a^b |A_1[G(x_0, s)]| ds.$$

Dar întrucît $f_0 \in K_0^{(2)}[a, b]$, ținînd seamă de definiția (79) a numărului $\gamma(a, b)$, rezultă că

$$(87) \quad \mathfrak{F}[f_0] \leq \gamma(a, b).$$

Din compararea relațiilor (82), (83), (86) și (87) rezultă că

$$(88) \quad \gamma(a, b) = \mathfrak{F}[f_0] = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |A_1[G(x, s)]| ds,$$

ceea ce era de demonstrat.

Să considerăm în continuare funcția f_0 definită anterior, funcție pentru care este atinsă marginea superioară (79). Din (85), (88) și (83) rezultă egalitatea

$$(89) \quad \gamma(a, b) = A_1[f_0(x_0)].$$

Vom da în cele ce urmează o delimitare a numărului $A_1[f_0(x_0)]$. Vom distinge două cazuri.

Cazul 1: $x_0 = a$, sau $x_0 = b$.

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $x_0 = b$. Fie t_1, t_2, t_3 eventualele puncte de discontinuitate din $[a, b]$ ale funcției $\varphi_0 = L_2[f_0]$ definită în (84). Vom izola aceste puncte cu ajutorul unor intervale suficient de mici, de lungime ε și vom modifica în aceste intervale funcția $\varphi_0(x)$, astfel încît noua funcție $\varphi(x, \varepsilon)$ să fie continuă pe întreg intervalul $[a, b]$ și astfel încît $\max_{x \in [a, b]} |\varphi_0(x, \varepsilon)| \leq 1$. Să notăm cu $f_0(x, \varepsilon)$ soluția

$y(x)$ a ecuației diferențiale $L_2[y] = \varphi_0(x, \varepsilon)$, soluție care verifică condițiile $y(a) = y(b) = 0$. Utilizînd un raționament întrucîtva analog cu acela folosit la stabilirea formulei (48) (de la § 4), se obține următoarea formulă de medie

$$A_1[f_0(b, \varepsilon)] = A_1[N(b)] \cdot L_2[f_0(\xi, \varepsilon)] \quad \xi \in [a, b],$$

unde $N(x)$ reprezintă soluția ecuației $L_2[y] = 1$, soluție care verifică condițiile $y(a) = y(b) = 0$. De aici, ținând seamă de faptul că $\max_{x \in [a, b]} |L_2[f(x, \varepsilon)]| \leq 1$, se obține delimitarea $|A_1[f_0(b, \varepsilon)]| \leq |A_1[N(b)]|$, valabilă pentru orice ε suficient de mic. Făcând pe ε să tindă către zero, obținem la limită $|A_1[f_0(b)]| \leq |A_1[N(b)]|$ și ținând seamă de faptul că $x_0 = b$, obținem

$$(90) \quad |A_1[f_0(x_0)]| \leq |A_1[N(b)]|.$$

Dacă $x_0 = a$, s-ar fi obținut în mod analog inegalitatea

$$(91) \quad |A_1[f_0(x_0)]| \leq |A_1[N(a)]|.$$

Cazul 2: $a < x_0 < b$.

Vom distinge două subcazuri, după cum $f_0(x_0) = 0$, sau $f_0(x_0) \neq 0$.

Subcazul 1: $f_0(x_0) = 0$. În acest subcaz, notînd cu $a_1 = a$ și $b_1 = x_0$ și procedînd ca și în cazul 1 studiat anterior, vom obține următoarea delimitare, analogă cu (90):

$$(92) \quad |A_1[f_0(b_1)]| \leq |A_1[N(b_1; a_1, b_1)]|.$$

Dar în baza unei teoreme analoge teoremei 3 de la § 3, vom avea în cazul de față

$$|A_1[N(b_1; a_1, b_1)]| \leq |A_1[N(b_1; a, b)]| \leq \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]|.$$

Astfel, ținînd seamă de faptul că $b_1 = x_0$, din (92) se obține a fortiori

$$(93) \quad |A_1[f_0(x_0)]| \leq \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]|.$$

Subcazul 2: $f_0(x_0) \neq 0$. Pentru fixarea ideilor vom presupune că $f_0(x_0) > 0$. Atunci fie $y(x)$ o soluție pozitivă pe intervalul $[a, b]$ a ecuației diferențiale de ordinul întâi $A_1[y] = 0$. Considerăm funcția $g(x, \lambda) = f_0(x) - \lambda y(x)$ și determinăm parametrul λ astfel încît $g(x_0, \lambda) = 0$. Obținem $\lambda_0 = \frac{f_0(x_0)}{y(x_0)}$. Dar $\frac{d}{dx} g(x, \lambda_0)$ nu se poate anula pentru

$x = x_0$, întrucît, în caz contrar, ținînd seamă și de faptul că $g(x_0, \lambda_0) = 0$, ar rezulta că $A_1[g(x_0, \lambda_0)] = 0$. Dar, întrucît $A_1[y(x)] \equiv 0$, am obține de aici că $A_1[f_0(x_0)] = 0$ și ținînd seamă de (89), ar rezulta că $\gamma(a, b) = 0$. De aici și din (88) ar rezulta că $A_1[G(x, s)] \equiv 0$, ceea ce împreună cu (80) ne conduce la contradicție. Rezultă în definitiv că funcția $g'_x(x, \lambda_0)$ nu se anulează pentru $x = x_0$. Să presupunem de exemplu că $g'_x(x_0, \lambda_0) > 0$, adică că funcția $g(x, \lambda_0)$ este crescătoare în punctul $x = x_0$. Atunci, întrucît $g(x_0, \lambda_0) = 0$, ar rezulta existența unui număr $\varepsilon > 0$ suficient de mic, astfel încît

$$(94) \quad g(x_0 - \varepsilon, \lambda_0) < 0, \quad g(x_0 + \varepsilon, \lambda_0) > 0.$$

Întrucît însă $f_0(a) = f_0(b) = 0$, vom avea

$$(95) \quad g(a, \lambda_0) = -\lambda_0 y(a), \quad g(b, \lambda_0) = -\lambda_0 y(b).$$

Să presupunem de exemplu că $\lambda_0 > 0$. Atunci, întrucît $y(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, vom obține din (94) și (95) relațiile:

$$(96) \quad g(a, \lambda_0) < 0, \quad g(x_0 - \varepsilon, \lambda_0) < 0, \quad g(x_0, \lambda_0) = 0, \quad g(x_0 + \varepsilon, \lambda_0) > 0, \\ g(b, \lambda_0) < 0.$$

Deoarece funcția $g(x, \lambda_0)$ este continuă în $[a, b]$, va rezulta din (96) că ea se anulează, în afară de valoarea $x = x_0$, și pentru o valoare x_1 cuprinsă în intervalul $(x_0 + \varepsilon, b)$. Dacă s-ar fi presupus că $\lambda_0 < 0$, atunci în mod analog s-ar putea arăta existența unei rădăcini x_1 în intervalul $(a, x_0 - \varepsilon)$. Notînd $x_0 = a_1$, $x_1 = b_1$ și procedînd ca și în subcazul 1, obținem următoarea delimitare, analogă cu (93):

$$|A_1[g(x_0, \lambda_0)]| \leq \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]|.$$

Întrucît însă $A_1[y(x)] \equiv 0$, vom avea $A_1[g(x, \lambda_0)] \equiv A_1[f_0(x)]$, astfel că inegalitatea precedentă se va transcrie

$$(97) \quad |A_1[f_0(x_0)]| \leq \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]|.$$

În concluzie, ținînd seamă de (90), (91), (93), (97), precum și de egalitatea (89), obținem

$$(98) \quad \gamma(a, b) \leq \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]|.$$

Pe de altă parte, ținînd seamă de faptul că funcția $N(x) = N(x; a, b)$ aparține clasei $K_0^{(2)}[a, b]$ și ținînd seamă de definiția (78) a funcționalei $\mathfrak{F}$, precum și de definiția (79) a numărului $\gamma(a, b)$, vom avea:

$$(99) \quad \mathfrak{F}[N(x; a, b)] = \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]| \leq \gamma(a, b).$$

Comparînd (98) cu (99), obținem egalitatea

$$(100) \quad \gamma(a, b) = \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; a, b)]|.$$

În sfîrșit, din compararea relațiilor (78), (79) și (100), rezultă următoarea teoremă

TEOREMA 8. În ipotezele adoptate (la începutul § 8) relativ la operatorul L_2 , dacă f este o funcție oarecare din clasa $C^{(2)}[a, b]$, astfel încît $f(a) = f(b) = 0$ (mai general, dacă $f \in K_0^{(2)}[a, b]$), atunci are loc delimitarea

$$(101) \quad |A_1[f(x)]| \leq \mu_f \max_{x \in [a, b]} |A_1[N(x; L_2; a, b)]|,$$

unde $\mu_f = \sup_{x \in [a, b]} |L_2[f(x)]|$.

Această teoremă constituie o completare și în același timp o precizare a enunțului teoremei 7, în cazul particular când $n = 2$. Este de relevat faptul că în enunțul teoremei 8 nu s-a presupus îndeplinirea condiției 4° de la § 3.

Primită la redacție la 28 ianuarie 1965

Institutul de calcul al Academiei R.P.R.,
Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. ARAMĂ O., *Contribuții la studiul problemei polilocale relative la ecuații diferențiale*. Teză Cluj, 1965.
2. — *Sur un theoreme de W. A. Markov*. Mathematica (Cluj), 3 (26), 197—216 (1961). Idem în limba română în revista St. cerc. mat. (Cluj), XIII, 7—25 (1962).
3. БЕССМЕРТНЫХ Г. А. и ЛЕВИН А. Ю., *О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной*. Доклады Акад. наук СССР, 144, № 3, 471—474 (1962).
4. MAMMANA G., *Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotto di fattori e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari*. Math. Zeitschr., 33, 186—231 (1931).
5. MOLDOVAN E., *Asupra noțiunii de funcție conexă față de o mulțime de funcții interpolatoare*. St. cerc. mat. (Cluj), IX, 161—224 (1958). Idem în limba franceză în revista Mathematica (Cluj), 1 (24), 49—80, 281—286 (1959).
6. НАЙМАРК М. А., *Линейные дифференциальные операторы*. Гос. изд. технико-теоретической лит., Москва, 1954.
7. PÓLYA G., *On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation*. Amer. Math. S. Bull., 24, 312—324 (1922).
8. POPOVICIU T., *Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei*. St. cerc. mat. (Cluj), X, 337—389 (1959). Idem în limba franceză în revista Mathematica (Cluj), 1 (24), 95—142 (1959).
9. — *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*. St. cerc. mat. III, 53—122 (1952).
10. WIDDER D. V., *A general mean-value theorem*. Amer. Math. S. Trans., 26, 385—394 (1924).